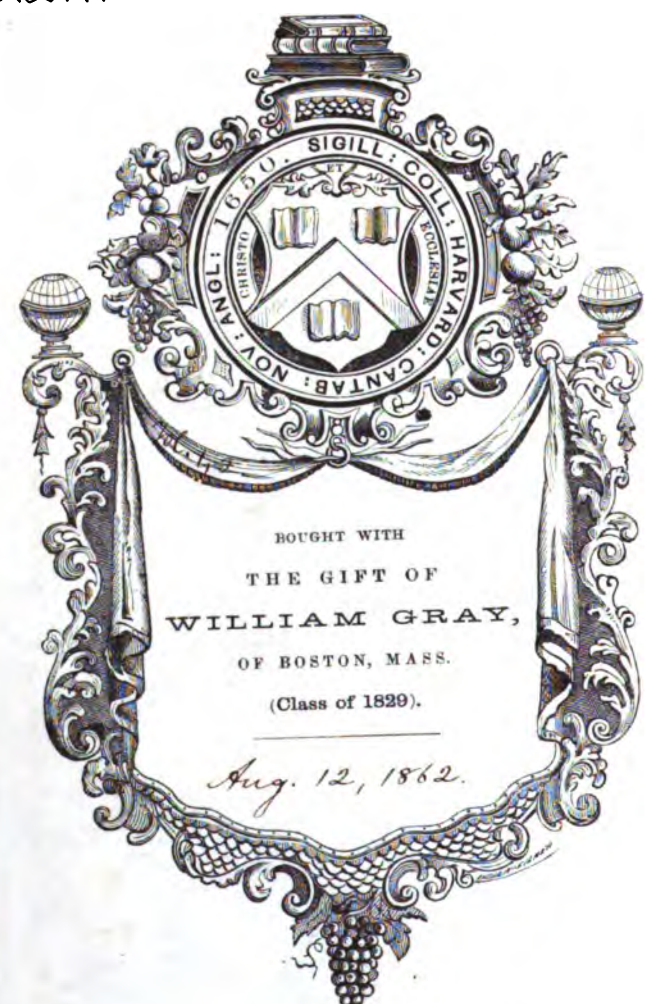
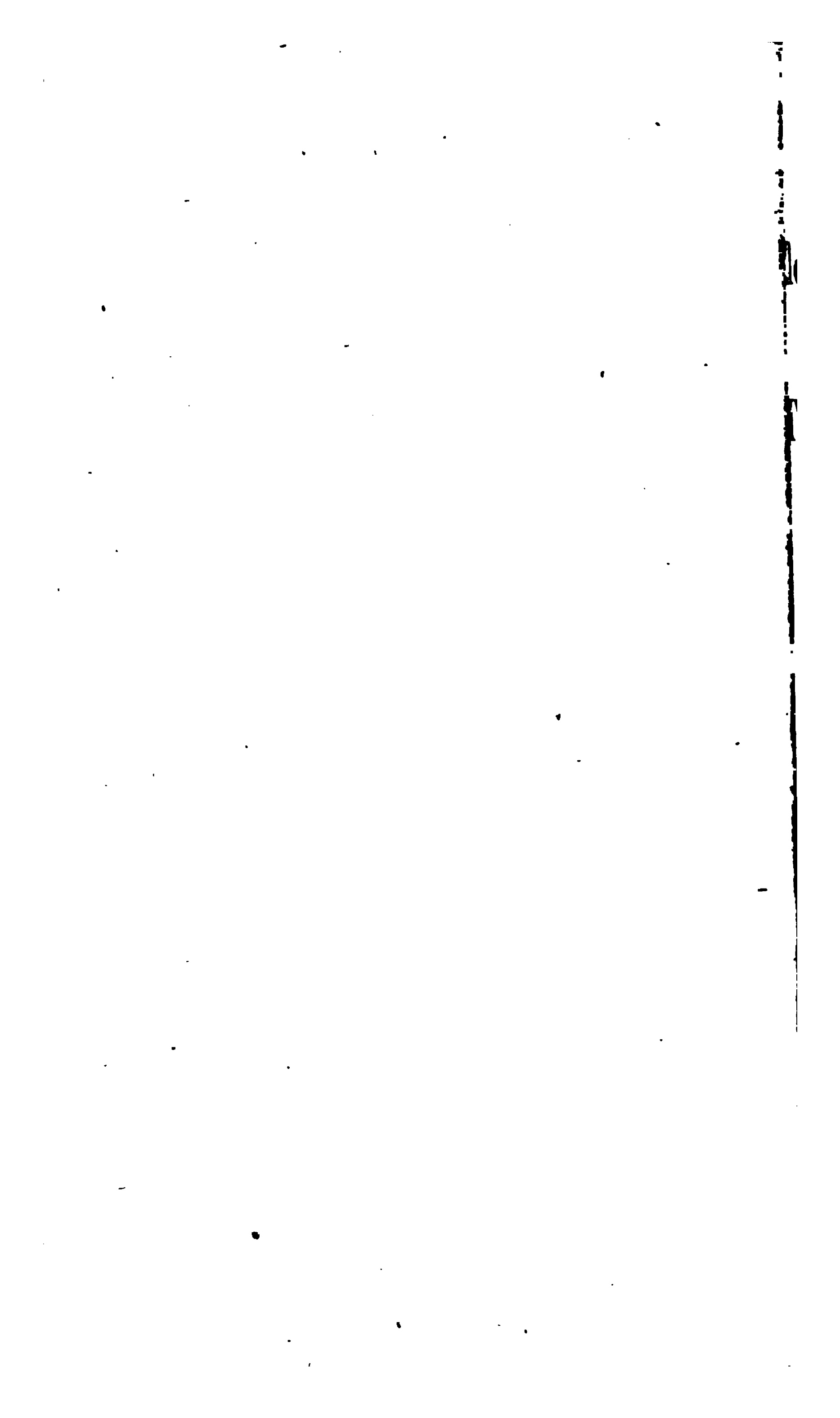

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 12, 1862.





Lehrbuch
der
Elemente der Geometrie
und
der ebenen und sphärischen
Trigonometrie,
vorzüglich
zum
Selbstunterrichte;
verfafst
von

August Leopold
Dr. A. L. Crelle,
Königlich-Preufsischem Geheimen-Ober-Baurathe.

Erster Band,
welcher
die Planimetrie, Goniometrie, ebene Trigonometrie und Polygonometrie
enthält.

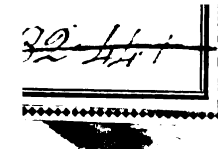
Mit achtzehn Kupfertafeln.

Berlin, 1826.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

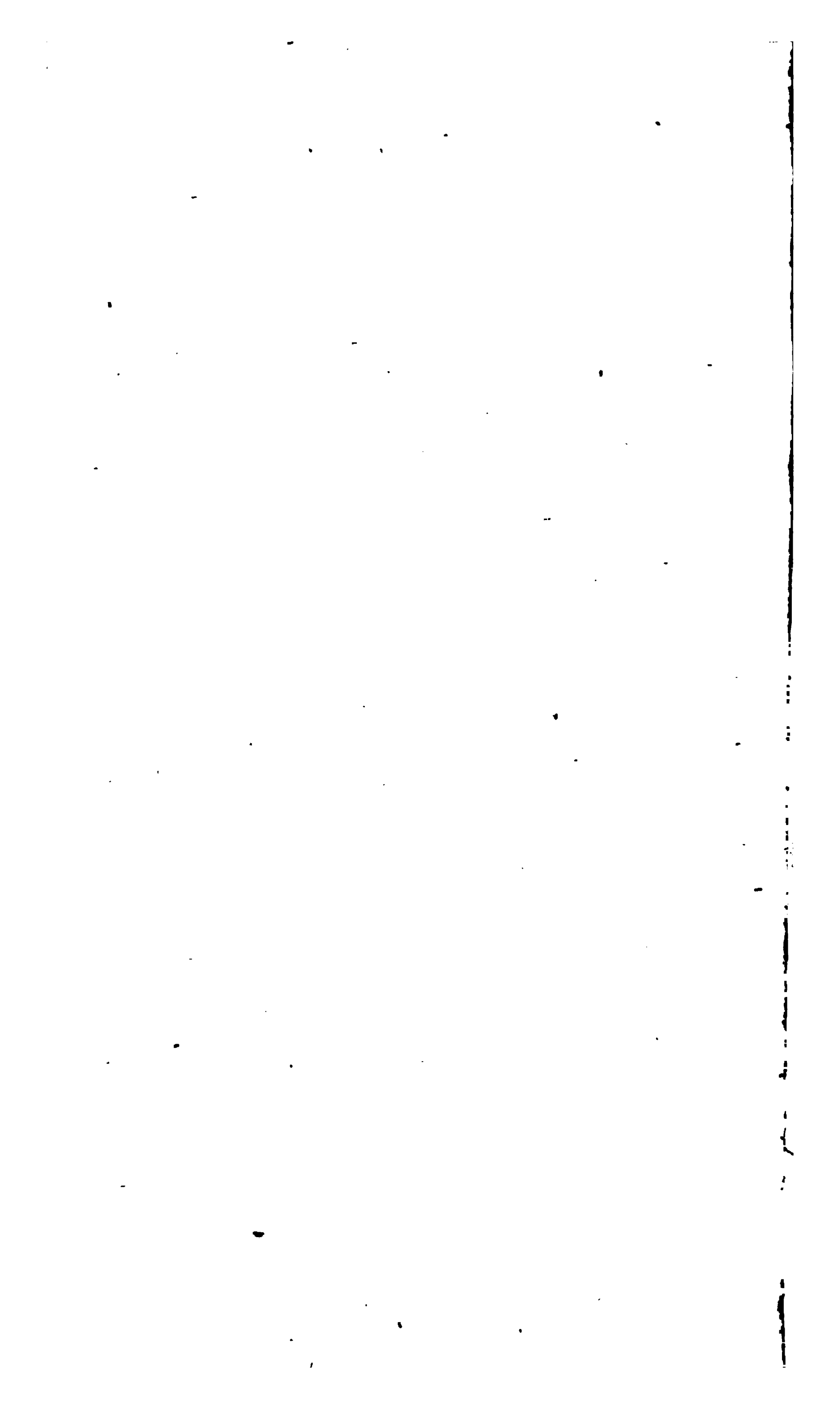
Vorrede.

Die Elemente der Geometrie sind unzähligemal abgehandelt worden, und es fehlt nicht an Werken, welche, mit einem zeitgemäſseren Umfange, an Gediegenheit, dem unerreichten Muster und der Quelle aller, den Elementen des Euclides, nahe kommen.

Gleichwol bleibt dem Lehrgebäude der Geometrie noch Manches zu wünschen übrig. Entweder nemlich umfassen auch die vollständigeren Abhandlungen ihren Gegenstand nicht so ganz, wie es schon der innere Zusammenhang der Sätze zu erfordern scheint, oder wie es, wenn man einen Lehrbegriff der Elemente als Vorbereitung zur weiteren Entwicklung be-







Lehrbuch der Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie,

vorzüglich zum

Selbstunterrichte;

verfafst

von

Dr. A. L. Crelle,

Königlich-Preufsischem Geheimen-Ober-Baurathe.

Erster Band,

welcher

die Planimetrie, Goniometrie, ebene Trigonometrie und Polygonometrie

enthält.

Mit achtzehn Kupfertafeln.

Berlin, 1826.

Gedruckt und verlegt

bei G. Reimer.

Vorrede.

Die Elemente der Geometrie sind unzähligemal abgehandelt worden, und es fehlt nicht an Werken, welche, mit einem zeitgemäſseren Umfange, an Gediegenheit, dem unerreichten Muster und der Quelle aller, den Elementen des Euclides, nahe kommen.

Gleichwol bleibt dem Lehrgebäude der Geometrie noch Manches zu wünschen übrig. Entweder nemlich umfassen auch die vollständigeren Abhandlungen ihren Gegenstand nicht so ganz, wie es schon der innere Zusammenhang der Sätze zu erfordern scheint, oder wie es, wenn man einen Lehrbegriff der Elemente als Vorbereitung zur weiteren Entwicklung be-

trachtet, zu wünschen ist: oder es fehlt dem System hie und da, mehr oder weniger noch an derjenigen nothwendigen innern Ordnung, welche die Strenge und Consequenz des Gegenstandes erheischt.

So zum Beispiel fehlt noch, um Einiges aus dem ersten Abschnitte, von den geradlinigen Figuren in der Ebene und dem Kreise, zu nennen (der zweite Abschnitt würde von den Körpern handeln), gewöhnlich die weitere Ausführung der Sätze von der Gleichheit und Aehnlichkeit mehrseitiger Figuren; es fehlen selbst die ersten Sätze von den Transversalen, von den Figuren von gleichem Umfange, von den Puncten der mittlern und kleinsten Entfernung, von den Ausdrücken der graden Linien und Ebenen und ihrer Lage, durch Gleichungen u. s. w. In der Trigonometrie, die in dem neueren Zustande der Geometrie wesentlich zu ihr gehört, fehlt gewöhnlich der allgemeine Beweis ihrer Fundamental-Sätze und eine

einigermaſsen weitere Ausführung der goniometrischen Sätze, so wie die Entwicklung der Reihen- und Factoren-Ausdrücke der trigonometrischen Linien durch die Kreisbogen; es fehlt gewöhnlich, wenn nicht die Polygonometrie ganz, so doch eine einigermaſsen weitere Ausführung derselben, nebst vielem Andern, was wesentlich zu den Elementen der Geometrie gehört. In dem zweiten Theile, von den Polyëdern und den sogenannten runden Körpern, sind der Lücken nicht weniger.

Für den Zusammenhang und die Ordnung der Sätze ist ebenfalls noch Manches zu wünschen. Man findet z. B. um wiederum Einiges aus dem ersten Theile zu nennen, häufig zusammengehörige Sätze nicht beisammen und andere neben einander, die getrennt seyn sollten. Es sind zum Beispiel die Lehrsätze nur selten mit ihren Gegensätzen, oder Sätze, die sich auf einen und denselben Gegenstand beziehen, mit einander verbunden, oder Sätze

der letzten Art, die nicht unmittelbar auf einander folgen können, wie z. B. diejenigen von der Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren, sind nicht recapitulirt; was die Uebersicht, und dem Lernenden das Studium erschwert. Dagegen findet man Sätze, die nicht wesentlich dieser oder jener Figur bedürfen, z. B. die Sätze von der Centricität der gradlinigen Figuren, welche des Kreises nicht bedürfen, bei der Hülfs-Figur abgehandelt, woraus eine Vermengung mit den Sätzen, die der Hülfs-Figur eigenthümlich sind, z. B. beim Kreise, mit den Sätzen von der Berührung etc., nach sich zieht. In den sogenannten Aufgaben ist häufig das, was Lehrsatz ist, mit dem was der beschreibenden Geometrie angehört, vermischt. Selbst gleich vom Anfange sind die Sätze gewöhnlich nicht nach ihrer natürlichen Eintheilung, nemlich nach Gleichheit, Gröſse und Aehnlichkeit der Figuren, streng gesondert, noch ist bei der Lehre von der Gröſse der Figuren

dasjenige, was ohne Hülfe der Zahl, oder rein geometrisch bewiesen werden kann, von dem was Zahlen oder Verhältnisse zu Hülfe nimmt, genau geschieden. Die Erklärungen und Beweise sind sogar zuweilen nicht streng, oder wenigstens unvollständig; selbst Euclid hat ja Erklärungen, die schon Lehrsätze voraussetzen, welche noch nicht vorausgingen, z. B. von der Aehnlichkeit der Figuren in der Ebene und der Polyëder. Solche Erklärungen, die sich auf später folgende Lehrsätze beziehen, und die also denselben nicht wohl vorhergehen können, sind nicht selten, eben wie nicht ganz vollständige Beweise, wie z. B. der Beweis beim Euclid von der Gleichheit zweier Dreiecke, deren Seiten in dem einen so groſs sind als in dem andern, u. s. w. In der Trigonometrie ist der Mangel an innerer Ordnung gewöhnlich noch gröſser. Viele Lehrbücher erklären selbst noch die Trigonometrie für die Aufgaben vom Dreieck und ziehen also die Gonio-

metrie mit hinein, die dann an sich selbst ganz fehlt. Der Vortrag der Trigonometrie ist häufig zum Theil analytisch, zum Theil goniometrisch zugleich, welches den Gegenstand verdunkelt, und die Polygonometrie nimmt eine andere Art der Entstehung an, wie die Trigonometrie, was nicht der Natur des Gegenstandes gemäſs ist u. s. w. Auch in dem zweiten Theile der Geometrie, der von den Körpern handelt, bleibt Manches zu wünschen übrig.

In keinem Fall kann das Lehrgebäude der Elemente der Geometrie als vollendet betrachtet werden, und wenn gleich die Mängel mehr oder weniger bestritten oder geleugnet werden mögen, so ist es doch wenigstens nicht überflüssig, sie näher durch That und Beispiel nachzuweisen und einen Lehrbegriff aufzustellen, in welchem die Anstöſse, so weit sie bemerklich gewesen, zu vermeiden gesucht worden.

Ein solcher Lehrbegriff ist in dem gegenwärtigen Buche versucht worden. Es

sind in demselben einige Lücken auszufüllen, und die innere Ordnung, welche der Gegenstand zu erfordern scheint, ist näher zu beobachten gesucht worden. Der gegenwärtige erste Band enthält den ersten Theil der Elemente der Geometrie, welcher von gradlinigen Figuren in der Ebene und vom Kreise handelt, mit Einschluſs der Goniometrie, Trigonometrie und Polygonometrie. Der zweite Band, welcher den zweiten Theil, von der Lage der Ebenen und von den Polyëdern und sogenannten runden Körpern, mit Einschluſs der sogenannten sphärischen Trigonometrie, enthalten wird, soll in Kurzem nachfolgen. Das Lehrbuch ist für Schulen und Gymnasien, so wie für alle Diejenigen, welche die Mathematik sonst als Hülfswissenschaft studiren wollen, z. B. Militairs, Physiker, Bergleute, Architecten, Feldmesser etc., insbesondere aber zum Selbstunterrichte bestimmt. Wer sich blos auf die einfacheren Sätze beschrän-

ken will, kann das, was mit kleinerer Schrift gedruckt ist, übergehen.

Der Verfasser wünscht, daſs man seine Arbeit eben so betrachten möge, wie er sie selbst ansieht, nemlich als Versuch eines Beitrages zur Förderung der Wissenschaft. Er hofft, man werde alsdann die Bestätigung der Versicherung, die er giebt, er habe keinen andern Zweck bei seiner Arbeit gehabt als den eben genannten und den Vortheil der Lernenden, auch in dem Werke selbst finden.

Berlin, im November 1825.

Der Verfasser.

Inhalt.

Die Geometrie.

Seite

Einleitung und Uebersicht. 1

Erster Theil.

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien oder von der Kreislinie begrenzt sind.

Erstes Buch.

Von den graden Linien und zum Theil begrenzten Figuren.

Von den graden Linien. 9
Von den Winkeln. 10
Von den Parallelen. 12
Grade Linien, die eine andere schneiden. 15

Zweites Buch.

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien umschlossen sind.

Von solchen Figuren überhaupt. 19

Seite

Erster Abschnitt.

Von der Gleichheit umschlossener Figuren und dem was sich darauf bezieht.

A. Von der Gleichheit der Dreiecke und dem was davon unmittelbar abhängt. 24
Von den schrägen Linien. 39
Erklärung von Coordinaten. 47
Von der Centricität der Dreiecke 47

B. Von der Gleichheit der *Vierecke* und *Vielecke*, und dem, was davon abhängt.

α) *Von den Vierecken.*
Gleichheit der Vierecke. 54
Von der Centricität der Vierecke. 64
Noch von der Gleichheit der Vierecke . . . 70

β) *Von den Vielecken.*
Gleichheit der Vielecke. 72
Centricität der Vielecke. 81
Von den regelmäſsigen Vielecken. 84

Zweiter Abschnitt

Von der Gröſse oder dem Inhalte der Figuren in der Ebene und dem was davon abhängt.

A. Vergleichung der Gröſse der Figuren *ohne Hülfe der Zahl*, oder *geometrisch*. 87
Gröſsere und kleinere Figuren von gleichem Umfange. . 115
B. Vergleichung der Gröſse der Figuren mit Hülfe der Zahl, oder durch Rechnung. 117
Berechnung des Inhalts beliebiger gradliniger Figuren. . 158

Dritter Abschnitt.

Von der *Aehnlichkeit* umschlossener Figuren und dem was sich darauf bezieht.

Von der Möglichkeit ähnlicher Figuren 163
Erklärung der Aehnlichkeit. 164
Von der Aehnlichkeit der Dreiecke. 164
Von der Aehnlichkeit beliebiger Figuren. 166

Seite
Von den Transversalen. 174
Von dem Mittelpuncte der Entfernungen. 185
Von dem Puncte kleinster Entfernung. 193
Von den *Gleichungen* der Linien, besonders der *graden* und ihrer Durchschnitte.
Von den Gleichungen der Linien im Allgemeinen. . . 200
Von den Gleichungen der graden Linie insbesondere. . 201

Drittes Buch.

Vom Kreise. 211
I. Von gleichen Kreisen und dem was davon abhängt. . 213
II. Von ähnlichen Figuren im Kreise und dem was davon abhängt. 236
III. Von der Gröfse der Kreislinien und Kreisflächen. . 251
IV. Von der Gleichung des Kreises. 267

Die Goniometrie nebst Trigonometrie und Polygonometrie. . . . 269

Die Goniometrie.

Von den goniometrischen Linien. 269
Gleichungen zwischen goniometrischen Linien. . . . 277
Ausdruck der goniometrischen Linien durch die Bogen, und umgekehrt. 321
Der Cotesische und Moivrische Lehrsatz. 334
Ausdrücke der goniometrischen Linien durch Factoren. . 339
Tafel goniometrischer Ausdrücke. 350

Anwendung der Goniometrie auf drei- und mehrseitige Figuren, oder *Trigonometrie* und *Polygonometrie*. . . . 365

Seite

A. Trigonometrie.

Rechtwinklige Dreiecke. 368
Beliebige Dreiecke. 379

B. Polygonometrie. . . . 457

Anhang.

Auflösnng einiger Aufgaben von Figuren in der Ebene, durch die grade Linie und den Kreis. 492

Die

Die Geometrie.

Einleitung und Uebersicht.

1.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von der Größe und Gestalt begrenzter Räume.

2.

Die Grenzen von Räumen heißen *Flächen*. Ein begrenzter Raum heißt *körperlicher Raum* zum Unterschiede von dem Raume überhaupt, in welchem sich begrenzte Räume befinden. Die begrenzenden Flächen heißen auch Flächenräume.

Die Durchschnitte von Flächen, welche also Theile der Flächen begrenzen, heißen *Linien*.

Die Durchschnitte von Linien, welche nun Theile der Linien begrenzen, heißen *Puncte*.

Flächen sind daher Grenzen körperlicher Räume; Linien sind Grenzen von Flächen, und Puncte Grenzen von Linien, und so wie man aus dem unbegrenzten Raume beliebige körperliche Räume absondern und weiter in dieselben beliebige Flächen legen kann, so kann man in Flächen-Räume beliebige Linien und in Linien beliebige Puncte legen.

Von Flächen begrenzte körperliche Räume, und von Linien begrenzte Flächen-Räume heißen auch *Figuren*, auch wohl bloß letztere Figuren, erstere, abgekürzt, *Körper*.

Die Figuren und Körper sind entweder **ganz** oder **zum Theil** begrenzt.

3.

Je nachdem die Flächen, welche Körper, oder die Linien welche Flächen, oder die Puncte, welche Linien begrenzen, mehr oder weniger Raum einschliefsen, sind die Körper, Flächen und Linien **kleiner** oder **gröfser**. Die **Gröfse** der Körper, Flächen und Linien in diesem Sinne heifst *Ausdehnung*.

4.

Da sich Linien nicht in die Flächen, die sie begrenzen, sondern nur in sich ausdehnen, so haben sie **nur eine** Ausdehnung. Diese **eine** Ausdehnung heifst *Länge*. Flächen dehnen sich nicht in die körperlichen Räume aus, die sie begrenzen, wohl aber neben beliebige Linien, die man in sie legen kann. Diese zweifache Ausdehnung wird bezeichnet, wenn man sagt: Flächen dehnen sich in die *Länge* und in die *Breite* aus. Körper dehnen sich auch neben beliebige Flächen aus, die man in sie legen kann. Deshalb sagt man, sie dehnen sich in die *Länge*, in die *Breite* und in die *Höhe* aus. Die Ausdehnung der Körper und Flächen überhaupt heifst auch *Inhalt*, auch wohl bei Körpern insbesondere, zum Unterschiede, *Volumen*.

Die verschiedenen Arten der Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe, heifsen *Abmessungen*. Die Körper haben also *drei* Abmessungen, die Flächen *zwei* und die Linien *eine*.

5.

Da **gleich grofse** Körper, Flächen und Linien verschiedene **Gestalt** und **gleich gestaltete** Körper, Flächen und Linien verschiedene **Gröfse** haben können, so kommt es nicht auf die **Aus-**

dehnung oder Gröſse der Körper, Flächen und Linien allein an, sondern auch auf ihre *Gestalt.*

Körper, Flächen und Linien von gleicher Gröſse und von gleicher Gestalt, deren Grenzen also, wenn man sie sich an einerlei Orte im Raume verstellt, alle in einander fallen oder sich decken, heiſsen *gleich* oder auch *congruent.* Ist bloſs die Gröſse oder Ausdehnung gleich, so heiſsen sie *gleich groſs,* und ist bloſs die Gestalt gleich, so heiſsen sie *ähnlich.*

6.

Das Verfahren, durch welches man die Gröſse und Gestalt der Figuren vergleicht, das heiſst, durch welches man, vermittelst Figuren, von deren Gröſse und Gestalt man ursprüngliche Vorstellungen hat, von beliebigen Figuren klare Vorstellungen ausdrückt, heiſst *Messen.* Dieses Messen ist der Gegenstand der Geometrie. Deshalb heiſst sie auch *Meſskunst.*

7.

Da die Körper von Flächen und die Flächen von Linien begrenzt werden, so hängt die Gröſse und Gestalt der Körper von Flächen, die Gröſse und Gestalt der Flächen von Linien ab. Die Untersuchung der Flächen und Linien geht also der Ausmessung der Körper vorher.

8.

Es sind offenbar unzählige, an Gröſse und Gestalt verschiedene Linien und Flächen möglich. Sie lassen sich aber in zwei, wesentlich verschiedene Arten theilen: in *grade* und *krumme,* oder vielmehr, es läſst sich aus den unendlich vielen Linien und Flächen eine Art absondern, die nicht mehr verschiedene Gattungen hat,

nemlich die der *graden Linien* und *Flächen* Alle übrigen gehören in die zweite Abtheilung. Grade und krumme Linien und Flächen unterscheiden sich wie folgt.

I. Man stelle sich in einer beliebigen Fläche eine Linie und in dieser Linie zwei Puncte vor. Man lasse die beiden Puncte an demselben Orte im Raume bleiben, die Fläche aber alle Lagen annehmen, die sie annehmen kann. Bleibt die Linie, in welcher sich die beiden festen Puncte befinden, für jede beliebige Lage der Fläche an demselben Orte im Raume, so ist sie *grade*.

II. Befinden sich alle graden Linien, die durch beliebige Paare von Puncten einer Fläche gehen, ganz in der Fläche, so ist die Fläche *grade* und heifst *Ebene*.

III. Alle Linien, die nicht grade sind, heifsen *krumm*, und zwar, wenn sie zugleich in einer Ebene liegen, *einfach krumm*, wenn sie in keiner Ebene liegen, *doppelt krumm*, oder von *doppelter Krümmung*.

IV. Alle Flächen, die nicht grade oder Ebenen sind, heifsen *krumm*, und zwar wenn noch grade Linien darin möglich sind, von *einfacher Krümmung*, wenn keine graden Linien darin möglich sind, von *doppelter Krümmung*.

9.

Die Geometrie zerfällt nach dieser Unterscheidung der Linien und Flächen in zwei Haupt-Abtheilungen.

Der Gegenstand der ersten Abtheilung sind die graden Linien und die Ebenen, so wie die von denselben begrenzten Figuren und Körper; die andere Abtheilung beschäftigt sich mit den krummen Linien und krummen Flächen und den von denselben begrenzten Figuren und Körpern.

Die erste Abtheilung zerfällt weiter, erstlich in die Untersuchung der graden Linien und der von denselben ganz oder zum Theil begrenzten Figuren in der Ebene, und zweitens in die Untersuchung der graden Linien und Ebenen im Raume, so wie der von Ebenen ganz oder zum Theil begrenzten Körper.

Die zweite Abtheilung zerfällt erstlich in die Untersuchung der krummen Linien und der von denselben ganz oder zum Theil begrenzten Figuren in der Ebene, und zweitens in die Untersuchung der krummen Linien und Flächen im Raume und der von beliebigen Flächen ganz oder zum Theil begrenzten Körper.

Man pflegt nur die erste Abtheilung, und aus der zweiten nur, was den Kreis und Flächen betrifft, die vom Kreise und den graden Linien abhängen, zu den Elementen zu rechnen. Die Kreis-Linie ist diejenige krumme Linie in der Ebene, in welcher beliebige Puncte von einem und demselben Puncte, welcher Mittel-Punct heifst, gleich weit entfernt sind.

10.

Die Elemente, welche dieses Buch enthalten soll, lassen sich weiter, wie folgt, eintheilen:

Erster Theil.

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien oder von der Kreislinie ganz oder zum Theil begrenzt sind.

Erstes Buch. Von den graden Linien und den davon zum Theil begrenzten Figuren.

Zweites Buch. Von den umschlossenen Figuren in der Ebene, und zwar

Erster Abschnitt. Von ihrer Gleichheit und dem was sich darauf bezieht.

Zweiter Abschnitt. Von ihrer Gröfse und dem was sich darauf bezieht.

Dritter Abschnitt. Von ihrer Aehnlichkeit und dem was sich darauf bezieht.

Drittes Buch. Vom Kreise.

An diesen ersten Theil schliefst sich gewöhnlich die Vergleichung und Messung der gegenseitigen Neigung grader Linien mit Hülfe der Kreis-Linie an, unter dem Namen *Goniometrie, Trigonometrie* und *Polygonometrie.*

Zweiter Theil.

Von den graden Linien im Raume und den Ebenen, so wie von den Körpern, die zum Theil oder ganz von Ebenen begrenzt sind und zwar:

Erstes Buch. Von den graden Linien und den Ebenen im Raume und den davon zum Theil begrenzten Körpern.

Zweites Buch. Von den von Ebenen umschlossenen Körpern und zwar

Erster Abschnitt. Von ihrer Gleichheit und dem was sich darauf bezieht.

Zweiter Abschnitt. Von ihrer Gröfse und dem was sich darauf bezieht.

Dritter Abschnitt. Von ihrer Aehnlichkeit und dem was sich darauf bezieht.

Drittes Buch. Von Flächen und Körpern die vom Kreise und graden Linien und Ebenen abhängen.

An diesen zweiten Abschnitt schliefst sich gewöhnlich die Vergleichung und Messung der gegenseitigen Neigung von Ebenen nnd ihrer Durchschnitte mit Hülfe der Kreislinie an, unter dem Namen *sphärische Trigonometrie* und *Polyëdrometrie.*

Wir wollen die Elemente nach dieser Eintheilung abhandeln.

Erster Theil.

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien oder von der Kreislinie begrenzt sind.



Erstes Buch.

Von den graden Linien und zum Theil begrenzten Figuren.

Von den graden Linien.

11.

Lehrsatz. Durch zwei Puncte ist nur eine grade Linie möglich.

Beweis. Denn man setze, es sey aufser der graden Linie *EACBF* (Fig. 1.) noch irgend eine andere Linie *GADBH* durch die beiden Puncte *A* und *B* grade, so müfste diese Linie *GADCH* nach (§. 8. I.) die Eigenschaft haben, dafs sie, wenn die Fläche oder Ebene, in welcher sich die Figur *GEADCBHF* befindet, ihre Lage ändert, während *A* und *B* an demselben Orte im Raume bleiben, ebenfalls denselben Ort im Raume behält, weil sie sonst nicht grade wäre. Dieses aber ist nicht möglich, weil schon die grade Linie *EACBF*, nach der Voraussetzung, an demselben Orte bleibt und folglich *GADBH*, zwischen welcher und *EACBF* ein Raum liegt, je nachdem die Fläche, worin sich *GADBH* befindet, ihre Lage verändert, nothwendig an einen anderen Ort im Raume wie z. B. *G'AD'BH'* kommen mufs. Also ist es unmöglich, dafs irgend eine andere Linie durch zwei Puncte *A* und *B*, als die grade *EACDF*, ebenfalls grade seyn kann.

12.

Zusätze. I. *Zwei grade Linien, wenn sie zwei Puncte gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung in einander.* Denn es ist durch die beiden Puncte nur eine grade Linie möglich. (§. 11.)

II. *Zwei grade Linien können einander nur in einem Puncte schneiden.* Denn schnitten sie sich in zwei Puncten, so fielen sie nach (I.) in ihrer ganzen Ausdehnung in einander und wären folglich nicht mehr zwei verschiedene Linien, sondern nur eine und dieselbe grade Linie.

III. *Wenn eine grade Linie eine andere nur in einem Puncte trifft, so bleibt sie von diesem Durchschnitts-Puncte ab in ihrer ganzen Ausdehnung an derselben Seite der andern Linie.* Denn um auf die entgegengesetzte Seite zu kommen, müfste sie die andere Linie erst in einem zweiten Puncte schneiden, welches, da sie von derelben Anfangs abweichen sollte, nach (II.) nicht möglich ist.

Von den Winkeln.

13.

Erklärung. Die gegenseitige Neigung zweier graden Linien, die sich schneiden, wie AC *und* BC (Fig. 2.) *heifst* Winkel, *und der zum Theil begrenzte Raum* ACB *der Ebene, worin* AC *und* BC *liegen, heifst* Winkel-Raum, *so dafs zu gleichen Winkeln gleiche Winkel-Räume gehören und umgekehrt.*

Der Winkel, wie z. B. zwischen AC *und* BC, *wird gewöhnlich durch* ACB *oder auch durch ein einzelnes Zeichen, wie z. B. γ, oder auch durch den Buchstaben* C, *der an der Spitze steht, bezeichnet. Die graden Linien* AC *und* BC, *welche den Winkel begrenzen, heifsen des Winkels Schenkel, der Durchschnitts-Punct der Schenkel,* C *heifst des Winkels Scheitel,*

14.

Grundsatz. Der Winkel ist, wie jede andere Ausdehnung, eine Gröfse.

Deshalb sind die Summen und die Unterschiede von Winkeln wiederum Winkel und nichts anderes. *Z. B. die Summe der Winkel* ACB, BCD *und* DCE (Fig. 3.) *ist wieder ein Winkel* ACE; *der Unterschied zweier Winkel, wie* ACD *und* ACB *ist ebenfalls ein Winkel* BCD und nichts anderes.

Auch sind eben deshalb Winkel und Winkel-Räume nur dann verschieden, wenn sie um einen Winkel oder Winkel-Raum von einander abweichen, und nur dann gleich, wenn sie um keinem Winkel oder Winkel-Raum verschieden sind.

15.

Erklärung. I. *Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel, deren Schenkel in einer und derselben graden Linie auf verschiedenen Seiten des Durchschnitts-Punctes liegen, wie z. B.* (Fig. 4.) ACB *und* DCE, ACD *und* BCE *etc. heifsen* **Scheitel-Winkel.**

II. *Winkel mit gemeinschaftlichem Scheitel und einem gemeinschaftlichen Schenkel, den andern in einer und derselben graden Linie, wie z. B. die Winkel* ACD *und* DCE, DCE *und* BCE *etc. heifsen* **Nebenwinkel.**

III. *Neben-Winkel, die gleich grofs sind, wie z. B.* ACF *und* FCE, FCE *und* ECG *etc., wenn die Neigung der Linien* AC *und* CF, FC *und* CE *etc. gegen einander gleich grofs ist, heifsen* **rechte Winkel.** *Grade Linien, die mit einander rechte Winkel machen, heifsen* **senkrecht** *oder* **Perpendikel** *auf einander. Rechte Winkel sollen überall durch den Buchstaben* ϱ *bezeichnet werden.*

IV. *Winkel, die kleiner sind als rechte, z. B.* DCE, *heifsen* **spitz**, *sind sie gröfser als rechte, wie z. B.* DCG, **stumpf.** *Stumpfe Winkel können auch gröfser als zwei und selbst gröfser als vier rechte seyn, überhaupt so grofs man will.*

V. *Die Ergänzung eines Winkels zu einem rechten, z. B. die Ergänzung* FCD *des Winkels* DCE *zu dem rechten* FCE *heifst des Winkels* DCE **Complement.** *Die Ergänzung eines Winkels zu der Summe zweier rechten, z. B. die Ergänzung* ACB *des Winkels* BCE *zu der Summe der beiden rechten* ACG *und* GCE *heifst des Winkels* **Supplement.**

16.

Lehrsätze. I. *Die Summe von Neben-Winkeln ist so grofs als die Summe von zwei rechten Winkeln.*

Beweis. Denn z. B. der Winkel *DCE* (Fig. 4.) ist um den Winkel *FCD* oder um sein **Complement** (§. 15. V.) **kleiner** als der rechte Winkel *FCE*, d. h. es ist $DCE = \varrho - FCD$, und der Neben-Winkel *ACD* ist um den nemlichen Winkel *FCD* **gröfser** als der dem rechten Winkel *FCE* **gleiche** rechte Winkel *ACF*, d. h. es ist $ACD = \varrho + FCD$. Also ist $DCE + ACD = \varrho - FCD + \varrho + FCD = 2\varrho$. Also ist die Summe von *DCE* und *ACD* so grofs als die Summe von zwei rechten Winkeln. Das **Suplement** (§. 15. V.) eines Winkels ist also sein **Nebenwinkel.**

II. *Die Summe beliebiger Winkel um einen Punct, die also alle einen und denselben Scheitel und je zwei einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, ist so grofs als die Summe von vier rechten*, z. B. die Summe der Winkel *ACB*, *BCD*, *DCE*, *ECF*, *FCG* und *GCA* (Fig. 5.) ist so grofs als die Summe von vier rechten Winkeln.

Beweis. Es sey *ACP* eine grade Linie, in welche der gemeinschaftliche Schenkel *AC* zweier Winkel *ACB* und *ACG* fällt, so sind *ACE* und *ECP* Neben-Winkel, und folglich ist ihre Summe gleich der Summe zweier rechten (I.), also $ACE + ECP = 2\varrho$. Eben so sind *ACF* und *PCF* Neben-Winkel; folglich ist auch $ACF + PCF = 2\varrho$. Also ist $ACE + ECP + PCF + FCA = 4\varrho$. Aber *ACE* ist gleich der Summe der Winkel *ACB*, *BCD* und *DCE*; *FCA* ist die Summe der Winkel *FCG* und *GCA*, und *ECF* ist gleich der Summe der Winkel *ECP* und *PCF*. Also ist die Summe der sämmtlichen Winkel $ACB + BCD + DCE + ECF + FCG + GCA = 4\varrho$, das heifst gleich der Summe von vier rechten.

III. *Scheitel-Winkel sind gleich grofs.*

Beweis. Denn sie haben einen und denselben Nebenwinkel, und folglich ein und dasselbe Supplement. Z. B. in (Fig. 4.) ist $DCE = 2\varrho - ACD$ und $ACB = 2\varrho - ACD$; also ist $DCE = ACB$, das heifst die Scheitel-Winkel *DCE* und *ACB* sind gleich grofs. Eben so sind die Scheitel-Winkel *ACD* und *BCE* gleich grofs u. s. w.

Von den Parallelen.

17.

Lehrsätze. I. *Wenn zwei Winkel* DAC *und* EBC (Fig. 6.), *welche einen ihrer Schenkel in einer und derselben graden Linie haben, ohne dafs die Scheitel in einander fielen, um keinen Winkel-Raum verschieden sind, so haben die Linien* DA, AC *und* EB, BC *gleiche Neigung gegen einander und die Winkel die sie einschliefsen sind einander gleich.*

Beweis. Denn die Winkel sind nur dann ungleich, wenn sie um einen Winkel verschieden sind (§. 14.), was nach der Voraussetzung nicht seyn soll.

II. *Wenn zwei Winkel* DAC *und* EBC, *die wie die vorigen liegen, einander gleich sind, so sind sie um keinen Winkel-Raum verschieden.*

Beweis. Denn sonst wären sie nach (§. 14.) ungleich.

18.

Zusatz. *Winkel können also nach (§. 17.) um Räume, die nicht Winkel-Räume sind,* verschieden *seyn, ohne dafs sie deshalb* ungleich *wären.* Z. B. die Winkel *EBC* und *DAC*, oder *GBC* und *FAC* in (Fig. 6.) sind um die Räume *DABE* und *FABG*, welche keine Winkel-Räume sind, verschieden, obgleich sie nach der Voraussetzung einander gleich sind.

Dieses ist kein Widerspruch. Denn

Erstlich sind Winkel nur dann ungleich, wenn sie um Winkel verschieden sind, so wie beliebige Dinge überhaupt nur dann ungleich sind, wenn sie um Dinge ihrer Art von einander abweichen (§. 14.).

Zweitens erfüllen Winkel, wie *EBC* und *DAC*, obgleich sie um den Raum *DABE* verschieden sind (Fig. 6.), noch vollkommen die Bedingung der Gleichheit oder Congruenz (§. 5.), nemlich, dafs alle Grenzen in einander fallen; denn man lege den Schenkel *BC* in den Schenkel *AC*, so fällt auch der Schenkel *BE* in den Schenkel *AD*, weil nach der Voraussetzung der Winkel *EBC* dem Winkel *DAC*, oder die Neigung der Linien *EB* und *BC* der Neigung der Linien *DA* und *AC* gleich ist; also fallen alle Grenzen der Winkel *EBC* und *DAC* in einander.

19.

Erklärung. *Grade Linien, wie* FD *und* GE (Fig. 6.), *welche mit einer beliebigen dritten* HC *an einerlei Seite gleiche Winkel machen, heifsen* Parallelen. *Räume zwischen Parallelen, wie zwischen den Linien* FD *und* GE, *oder auch blos die Räume* DABE *oder* FABG, *heifsen* Parallel-Räume.

Grade Linien die eine andere schneiden.

20.

Erklärung. *Wenn zwei beliebige grade Linien eine dritte schneiden, wie* DF *und* EG (Fig. 7.) *die* HC, *so soll die dritte Linie* Grundlinie, *die beiden, welche sie schneiden, sollen* Schenkel *heifsen.*

Die Winkel an gleichen Seiten der Grundlinie und an gleichen Seiten der Schenkel, wie a *und* α, b *und* β, c *und* γ, d *und* δ, *sollen* Neigungs-Winkel, *die Winkel an gleichen Seiten der Schenkel und an verschiedenen Seiten der Grundlinie, wie z. B.* a *und* γ,

b *und* δ, c *und* α, d *und* β *sollen* **Seitenwinkel**, *die Winkel an gleichen Seiten der Grundlinie und an verschiedenen, entweder einander zugekehrten oder von einander abgekehrten Seiten der Schenkel, also wie* b *und* α, *oder* d *und* γ, *oder* a *und* β *und* c *und* δ *sollen* **Gegenwinkel** *und zwar erstere innere, letztere äußere, endlich die Winkel an verschiedenen Seiten der Grundlinie und verschiedenen Seiten der Schenkel,* **Wechselswinkel**, *und zwar, wenn sie einander zugekehrt sind, wie* b *und* γ, d *und* α **innere**, *und wenn sie von einander abgekehrt sind, wie* a *und* δ, c *und* β, **äußere** *Wechselswinkel heißen.*

21.

Zusätze. I. *Wenn also Parallelen eine Grund-Linie schneiden, so sind nach* (§. 17.) *die Neigungs-Winkel gleich, nemlich* (Fig. 7.): $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$.

Die Summen der Seiten-Winkel sind zwei rechte, z. B. $a + \gamma = b + \delta = c + \alpha = d + \beta = 2\varrho$, denn es ist z. B. $a = \alpha$, also $a + \gamma = \alpha + \gamma = 2\varrho$ u. s. w.

Die Summe der innern und äußern Gegenwinkel sind ebenfalls zwei rechte, nemlich $b + \alpha = d + \gamma = a + \beta = c + \delta = 2\varrho$; aus einem ähnlichen Grunde.

Die innern und äußern Wechselwinkel sind gleich; aus gleichem Grunde.

Umgekehrt, wenn obiges Statt findet, sind die sich schneidenden graden Linien parallel.

II. *Zwei Linien, die mit einer dritten parallel sind, sind auch mit einander parallel.*

Denn alle machen mit einer beliebigen Grundlinie **gleiche** Neigungs-Winkel.

22.

Lehrsatz. I. *Wenn zwei grade Linien* IL *und* EG (Fig. 8.) *mit einer dritten* HC, *die sie schneiden, an einerlei Seite ungleiche Winkel machen, z. B. die Winkel* EBC *und* IAC, *so begegnen sie sich nothwendig irgendwo und zwar an derjenigen Seite der Grundlinie, an welcher die inneren Gegenwinkel* IAB *und* EBA *zusammen kleiner als zwei rechte sind.*

Beweis. Es sey *DF* mit *EG* **parallel**, so ist $DAC = EBC$ (§. 21.) und folglich $DAB + EBA = 2\varrho$.

Soll nun $IAB + EBA$ kleiner als zwei Rechte seyn, so ist IAB nothwendig kleiner als DAB und zwar um den Winkel DAI; folglich liegt die Linie AI ganz auf derjenigen Seite von AD, welche BE zugekehrt ist (§. 12. III.). Schnitten sich nun AI und BE nicht, so wäre der Raum $IABE$ nur ein Theil des Parallel-Raums $DABE$. Die Winkel EBC und DAC sind aber noch gleich, wenn sie um den ganzen Parallel-Raum $DABE$ verschieden sind (§. 18.). Also wären auch die Winkel IAC und EBC, gleich, die nur um einen Theil $IABE$ dieses Parallel-Raums verschieden sind. Sie sollen aber ungleich seyn. Also ist es unmöglich, dafs $IABE$ ein Theil des Parallel-Raums $DABE$ ist, das heifst, dafs IA die BE nicht schnitte. Folglich schneidet IA die BE, wenn $IAB + EBA$ kleiner als zwei rechte ist, nothwendig *).

II. *Wenn sich zwei grade Linien* KL *und* EG (Fig. 9.), *z. B. in* P *schneiden und sie begegnen einer dritten* HC, *so machen sie mit derselben an einerlei Seite nothwendig ungleiche Winkel* PAC *und* PBC *und die Summe der innern Gegenwinkel* PAB *und* PBA *ist kleiner als zwei rechte.*

Beweis. Es sey $AQ = QB$, PQI grade und $QI = QP$, so fällt, wegen der gleichen Scheitelwinkel, AQP und BQI (§. 16. III.), wenn man AQ in QB legt, QP in QI mithin A in B und P in I, und folglich AP in IB (§. 11.). Also ist auch $QBI = QAP$. Es ist aber QBI kleiner als QBG oder dessen Scheitel-Winkel PBC, weil die Linie PI und folglich BI ganz an der von C abgekehrten Seite von PG liegt. Also ist der dem Winkel QBI gleiche Winkel QAP oder PAC kleiner als der Winkel PBC, folglich auch weil $PBC + PBA = 2\varrho$ (§. 16. I.) $PAB + PBA$ kleiner als zwei rechte; wie behauptet wurde.

---

*) Dieser Satz ist das berühmte eilfte Euclidische Axiom, worauf die Theorie der Parallelen und ein grofser Theil der gesammten Geometrie beruht. Euclid erklärt den Satz für einen Grundsatz, d. h. für einen Satz der keines Beweises bedarf. Bekanntlich ist die Zahl der Versuche, den Satz zu beweisen, ungemein grofs. Der obige Beweis kommt im wesentlichen mit demjenigen überein, welcher sich in der kleinen Schrift des Verfassers „Ueber Parallelen-Theorieen etc. Berlin, bei Maurer 1816" befindet. Die Ansichten, von welchen der Beweis ausgeht, sind denen von Bertrand und Schulz ähnlich, aber die Ausführung ist von der Bertrandschen und Schulzischen verschieden.

23.

Lehrsätze. I. *Wenn zwei grade Linien* DF *und* EG (Fig. 10.) *mit einer dritten* HC, *die sie schneiden, an einerlei Seite gleiche Winkel* DAC *und* EBC *machen und folglich mit einander parallel sind* (§. 21. I.), *so begegnen sie sich nirgend.*

Beweis. Denn begegneten sie sich, so machten sie mit der Grundlinie nach (§. 22. II.) ungleiche Winkel.

II. *Wenn sich zwei grade Linien* DF *und* EG (Fig. 10.) *nirgend begegnen, so machen sie mit einer dritten* HC, *die sie schneiden, an einerlei Seite nothwendig gleiche Winkel* DAC *und* EBC, *und sind folglich mit einander parallel* (§. 21. I.).

Beweis. Denn machten sie mit der Grundlinie ungleiche Winkel, so müßsten sie sich nach (22. I.) nothwendig irgendwo begegnen.

24.

Lehrsatz. Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel sind, so sind die Winkel, sie mögen liegen wie man will, gleich. Z. B. wenn *AB* (Fig. 11.) mit *DE*, und *BC* mit *EF* parallel ist, so sind die Winkel *ABC* und *DEF* gleich.

Beweis. Es sey *GBE* eine grade Linie, so ist, weil *BC* und *EF* parallel sind, $GBC = GEF$ (§. 23. II.), folglich ist *GED* kleiner als *GEF* und folglich $CBE + BED$ kleiner als 2ϱ. Mithin schneiden sich *BC* und *DE* nothwendig (§. 22. I.); etwa in *H*. Aber *ED* oder die grade *EHI* ist nach der Voraussetzung mit *AB* parallel, also ist $IHK = ABC$ (§. 23. II.). Aus gleichem Grunde ist auch $IHK = DEF$ also ist $ABC = DEF$.

25.

Lehrsatz. Durch einen gegebenen Punct, z. B. C (Fig. 12.), *ist nur eine grade Linie möglich, die mit einer andern gegebenen graden Linie* DE *einen gegebenen Winkel* CAE *macht.*

Beweis. Denn gäbe es eine zweite solche Linie, z. B. *CB*, so müßste $CBE = CAE$ seyn, welches nach (§. 22. II.) nicht möglich ist, weil sich *AC* und *BC* nach der Voraussetzung schneiden.

26.

Zusätze. I. *Also ist zu Folge* (§. 25.) *durch einen gegebenen Punct auch nur ein* **Perpendikel** *auf eine gegebene grade Linie möglich.*

Denn das Perpendikel ist eine grade Linie aus dem gegebenen Punct nach der gegebenen Linie, die mit dieser einen rechten Winkel macht.

II. *Auch ist durch einen gegebenen Punct nur eine grade Linie,* **parallel** *mit einer andern gegebenen Linie möglich.*

Denn sie muſs, wenn sie parallel seyn soll, mit einer beliebigen Grundlinie den nemlichen Winkel machen, wie die gegebene Linie (§. 23. II.).

27.

Lehrsatz. *Wenn zwei grade Linien* BA *und* BD (Fig. 13.) *einer dritten* AD *begegnen, so schneidet jede andere grade Linie durch* B, *wie z. B.* BC, *zwischen* BA *und* BD, *die* AD *nothwendig, und zwar zwischen* A *und* D.

Beweis. Denn da BA und DA sich schneiden sollen, so ist $ABD + ADB < 2\varrho$ (§. 22. II.). Da nun CB zwischen AB und DB liegen soll, und folglich CBD kleiner ist als ABD, so ist um so mehr $CBD + CDB < 2\varrho$. Deshalb schneiden sich umgekehrt BC und DC nothwendig, und zwar an derselben Seite wie BA die DA (§. 22. I.). Auf der andern Seite ist $DBA + DAB < 2\varrho$, weil sich DB und DA schneiden sollen (§. 22. II.). Und da wiederum CB zwischen AB und DB liegt, und folglich ABC kleiner ist als ABD, so ist um so mehr $CBA + CAB < 2\varrho$. Folglich schneiden sich auch BC und AC nothwendig, und zwar an derselben Seite wie BD die AD (§. 22. I.). Die Linie BC schneidet also die Linie AD von D nach A zu, und zugleich von A nach D zu, mithin nothwendig zwischen A und D.

28.

Lehrsatz. *Wenn zwei grade Linien* AB *und* CD (Fig. 14.) *zwei andere* AE *und* EF, *die mit einander einen beliebigen Winkel* AEC *machen, unter* **gleichen** *Winkeln* BAE = DCF *schneiden, so begegnen sie sich nothwendig irgendwo und zwar an derjenigen Seite von* AE *und* EC, *an welcher der Winkel* AEC *kleiner ist als zwei rechte.*

Beweis. Es sey ACG eine grade Linie durch A und C, so ist der Winkel BAC um CAE kleiner als

der Winkel BAE, zwischen den Linien AB und AE, hingegen DCG ist um den Winkel $FCG = ACE$ gröfser als der gleich grofs vorausgesetzte Winkel DCF, zwischen den Linien CD und CF. Also sind die Neigungs-Winkel BAC und DCG der Linien AB und CD mit der Linie ACG ungleich, und zwar ist $BAC + DCA < 2\varrho$; denn es ist, wegen $BAE = DCF$, $BAE + DCE = 2\varrho$ und $BAC + DCA$ ist um $CAE + ACE$ kleiner als $BAE + DCE$. Also schneiden sich AB und CD nothwendig (§. 22. I.), und zwar an derjenigen Seite von AC oder AEC, an welcher der Winkel AEC kleiner ist als zwei rechte.

Zweites Buch.

Von den Figuren in der Ebene, die von graden Linien umschlossen sind.

Von solchen Figuren überhaupt.

29.

Erklärung. *Eine Figur in der Ebene, welche von* **drei** *graden Linien umschlossen ist, heiſst* **Dreieck**; *wird sie von vier graden Linien umschlossen*, **Viereck**, *von fünf graden Linien*, **Fünfeck**, *u. s. w.; überhaupt von einer beliebigen Zahl grader Linien*, **Vieleck**.

Die graden Linien, welche die Figur umschlieſsen, heiſsen **Seiten**, *ihre Durchschnitts-Puncte* **Ecken** *der Figur.*

Die Winkel zwischen je zwei zusammenstoſsenden Seiten, nach dem Innern der Figur zu, heiſsen **innere Winkel**; *auch blos* **Winkel**; *nach auſsen zu, wenn die eine Seite verlängert ist*, **äuſsere Winkel**, *welche also die Neben-Winkel der inneren sind.*

Innere Winkel, die kleiner als zwei rechte sind, sollen **ausspringende** *Winkel, sind sie gröſser als zwei rechte*, **einspringende** *Winkel, und wenn die Seiten einander schneiden*, **überspringende** *Winkel heiſsen.*

Figuren, die keine andere als ausspringende Winkel haben, heiſsen auch convex. Die äuſsere Seite der gebrochenen Linie, welche eine solche Figur umschlieſst, heiſst ebenfalls convex, die Seite nach dem Innern der Figur zu, concav.

Grade Linien durch die Ecken, welche nicht Seiten der Figur sind, heiſsen Diagonalen.

Z. B. die Figur *ABCDEFGHIK* (Fig. 16.) ist ein Zehneck, denn sie wird von 10 graden Linien umschlossen. *AB*, *BC*, *CD* etc. sind ihre Seiten, *A*, *B*, *C*, *D* etc. die Ecken, *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF* etc. sind die inneren, $B_1 BC$, $C_1 CD$, $D_1 DE$ etc. die äufseren Winkel. Winkel wie *ABC*, *CDE*, *EFG* etc. sind ausspringende, Winkel wie *BCD*, *DEF* etc. einspringende, Winkel wie *GHI*, *HIK* überspringende Winkel; die graden Linien *ID*, *BG*, *KB* etc., welche Ecken der Figur verbinden, ohne dafs sie Seiten wären, sind Diagonalen.

Wir wollen uns auf Figuren mit ausspringenden Winkeln, als auf den einfachsten Fall beschränken. Wo es nöthig, lassen sich Figuren mit einspringenden oder überspringenden Winkeln auf jene bringen.

30.

Erklärungen. I. *Ein Punct, welcher gleich weit von allen Ecken einer Figur entfernt ist, soll* Mittel-Punct der Ecken, *oder* Ecken-Mittel-Punct; *die Entfernung der Ecken von dem Mittelpuncte soll* Halbmesser der Ecken *heifsen. Hat eine Figur einen solchen Mittel-Punct der Ecken, so soll sie* centrisch nach den Ecken *heifsen. Ein solcher Ecken-Mittel-Punct kann also auch als Mittel-Punct* von Puncten *betrachtet werden, nemlich von den Puncten, welche die Ecken der Figur sind. Ein beliebiges* System, *d. h. irgend eine Gesammtheit* von Puncten *ist also* centrisch, *wenn es einen Punct giebt, der von allen gleich weit entfernt ist. Figuren, welche einen und denselben Mittel-Punct der Ecken haben, sollen* concentrisch nach den Ecken *heifsen.*

II. *Ein Punct, aus welchem die Perpendikel auf die Seiten einer Figur alle gleich lang sind, soll* Mittel-Punct der Seiten, *oder* Seiten-Mittel-Punct, *das Perpendikel soll* Halbmesser der Seiten *heifsen. Es heifst auch* Apotome. *Hat eine Figur einen solchen Mittel-Punct der Seiten, so soll sie* centrisch nach den Seiten *heifsen. Ein solcher Seiten-Mittel-Punct kann auch als Mittel-Punct* von Linien *betrachtet werden, nemlich von den Linien, welche die Seiten der Figur sind. Ein beliebiges* System, *d. h. irgend eine Gesammtheit von graden Linien, ist also* centrisch, *wenn es einen Punct giebt, aus welchem die Perpendikel auf alle Linien gleich lang sind. Figuren, welche einen und denselben Mittel-*

punct der Seiten haben, sollen **concentrisch nach den Seiten** *heifsen*)*.

31.

Lehrsatz. Die geringste Zahl grader Linien, welche eine Figur umschliefsen, ist drei.

Beweis. Denn zwei grade Linien begrenzen erst einen Winkel, und um zwei Puncte der Schenkel des Winkels zu verbinden, ist mindestens eine dritte grade Linie nöthig.

32.

Lehrsatz. Die Summe der drei innern Winkel jedes Dreiecks ist gleich der Summe von zwei rechten.

Beweis. Denn es sey CD (Fig. 16.) mit der Seite AB des Dreiecks ABC parallel und BCE eine grade Linie, so sind die Neigungs-Winkel β und ε und die Wechsels-Winkel α und δ der Parallelen AB und DC einander gleich (§. 21. I.). Folglich ist $\gamma+\delta+\varepsilon=\gamma+\alpha+\beta$. Aber die Winkel $ACB=\gamma$ und $ACE=\delta+\varepsilon$ sind Neben-Winkel (§. 15. II.). Also ist $\gamma+\delta+\varepsilon=2\varrho$ (§. 16. I.). Nun war $\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma$. Also ist auch $\alpha+\beta+\gamma=2\varrho$.

33.

Zusätze. Aus (§. 32.) folgt:

I. *Die Summe zweier Winkel jedes Dreiecks ist kleiner als die Summe von zwei rechten, und zwar um den dritten Winkel des Dreiecks.*

II. *Jeder Winkel eines Dreiecks ist kleiner als die Summe von zwei rechten, und zwar um die Summe der beiden andern Winkel.*

III. *Kein Dreieck kann mehr als einen rechten und noch weniger mehr als einen stumpfen Winkel haben, weil schon die Summe zwei solcher Winkel so grofs oder gröfser seyn würde als die Summe von zwei rechten Winkeln, und also der dritte Winkel dann nicht Statt finden würde.*

---

*) Gewöhnlich rechnet man die Sätze von der Centricität der Figuren zu den Sätzen vom Kreise; allein der Kreis ist dazu, wie sich zeigen wird, nicht nothwendig und die Sätze hängen also von demselben nicht ab. Sie dürfen also auch bis zum Kreise nicht verschoben werden, weil sonst der Kreis dazu unentbehrlich seyn müfste, und sie, da dieses nicht der Fall ist, mit denjenigen Sätzen, die dem Kreise wirklich eigenthümlich sind, würden vermengt werden.

IV. *In jedem Dreiecke ist ein rechter und noch mehr ein stumpfer Winkel der gröfste von den dreien, weil kein* zweiter *Winkel ein rechter oder stumpfer Winkel seyn kann* (III.)

V. *Sind zwei oder alle drei Winkel eines Dreiecks einander gleich, so sind sie alle kleiner als rechte, weil keine zwei* zugleich *rechte seyn können* (III.)

VI. *Der äufsere Neben-Winkel jedes Dreiecks-Winkels ist so grofs, als die beiden andern Dreiecks-Winkel zusammen, und folglich gröfser als jeder von ihnen.* Z. B. der äufsere Neben-Winkel ACE zu dem Dreiecks-Winkel γ (Fig. 16.) oder $\delta + \varepsilon$, ist gleich $\alpha + \beta$.

34.

Erklärung. *Wenn sämmtliche Winkel einer Figur, in der Ordnung wie sie auf einander folgen, so grofs sind als die Winkel einer andern Figur, in der nemlichen Aufeinanderfolge, so sollen die Figuren* gleichwinklig *heifsen.*

35.

Lehrsatz. *Jede Figur hat so viel Seiten als Winkel und umgekehrt.*

Beweis. Zu jedem Winkel gehören zwei Seiten als Schenkel, und jede Seite ist der Schenkel zweier Winkel, also sind der Seiten so viele als Winkel.

Oder auch: jede Seite ist der Schenkel zweier Winkel und zu jedem Winkel gehören zwei Schenkel, also sind der Winkel so viele als Seiten.

36.

Lehrsatz. *Jede Figur läfst sich durch Diagonalen in an einander liegende Dreiecke theilen, aber in* nicht weniger *als die Figur Seiten hat, weniger zwei, oder wenn die Zahl der Seiten n ist, wo n eine* beliebige *ganze Zahl seyn kann, in nicht weniger als* $n - 2$.

Beweis. Denn ein Viereck kann sich in nicht weniger als $2 = 4 - 2$ Dreiecke theilen lassen, weil das Viereck sonst nur ein Dreieck wäre; ein Fünfeck in nicht weniger als in ein Viereck neben einem Dreieck, weil es sonst nur ein Viereck wäre, folglich in nicht weniger als $3 = 5 - 2$ Dreiecke; ein Sechseck in nicht weniger als in ein Fünfeck neben einem Dreiecke, weil es sonst nur ein Fünfeck wäre,

folglich in nicht weniger als $4 = 6 - 2$ Dreiecke u. s. w. also ein n Eck in nicht weniger als $n - 2$ Dreiecke.

37.

Lehrsatz. *Die Summe der innern Winkel eines Vielecks ist gleich der Summe von so viel mal zwei rechten Winkeln, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwei, oder wenn das Vieleck n Seiten hat, gleich* $(n - 2)\varrho$. *Die Summe der äufsern Winkel eines Vielecks aber ist immer gleich der Summe von vier rechten.*

Beweis. I. Es sey M (Fig. 17.) ein beliebiger Punct im Innern des Vielecks $ABCDEFG$, AM, BM, CM, etc. mögen grade Linien von M nach den Ecken seyn, so liegen um den Punct M so viel Dreiecke AMB, BMC, CMD etc., als das Vieleck Seiten oder Winkel hat, folglich im n Ecke, n Dreiecke. Die Summe der Winkel dieser n Dreiecke ist $n . 2\varrho$, weil die Summe der Winkel jedes Dreiecks 2ϱ ist (§. 32). Diese Winkel zusammen, wenn man davon den Winkel um den Punct M abzieht, sind aber die n Winkel der Figur. Nun sind die Winkel um den Punct M gleich 4ϱ (§. 16. II.) $= 2 . 2\varrho$. Also ist die Summe der innern Winkel der Figur gleich $n . 2\varrho - 2 . 2\varrho = (n - 2) 2\varrho$, wie behauptet wurde.

Das Nemliche folgt, wenn man sich die Figur, wie (Fig. 18.) nach (§. 36.) in $n - 2$ Dreiecke getheilt vorstellt. Die Summe der Winkel dieser Dreiecke, welche zugleich die Summe der Winkel der Figur ist, ist $(n - 2) 2\varrho$.

II. Die äufsern Winkel sind die Neben-Winkel der innern (§. 29.). Jeder also, mit dem zugehörigen innern Winkel zusammen, macht zwei rechte. Folglich ist die Summe der äufsern und innern Winkel zusammen gleich so viel mal zwei rechten, als die Figur Winkel oder Seiten hat, mithin im n Eck gleich $n . 2\varrho$. Die Summe der innern Winkel aber war gleich $(n - 2) 2\varrho$, also ist die Summe der äufsern Winkel gleich $n . 2\varrho - (n - 2) 2\varrho = 2 . 2\varrho = 4\varrho$.

Erster Abschnitt.

Von der Gleichheit umschlossener Figuren und dem, was sich darauf bezieht.

A. Von der Gleichheit der Dreiecke und dem was davon unmittelbar abhängt.

38.

Erklärung. Ein Dreieck heiſst ungleichseitig, *wenn keine seiner Seiten der andern gleich ist;* gleichschenklig, *wenn zwei Seiten einander gleich sind;* gleichseitig, *wenn alle drei Seiten einander gleich sind;* gleichwinklig, *wenn alle drei Winkel einander gleich sind;* rechtwinklig, *wenn ein Winkel ein rechter ist;* stumpfwinklig, *wenn ein Winkel stumpf, oder gröſser als ein rechter ist, und* spitzwinklig, *wenn alle drei Winkel spitz, oder kleiner als rechte sind. Im rechtwinkligen Dreiecke heiſsen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschlieſsen,* Catheten, *die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite heiſst* Hypothenuse.

39.

Lehrsätze. I. *Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel so groſs sind als in einem andern, so ist es auch der dritte.*

Beweis. Denn die Summe aller drei Winkel ist in beiden Dreiecken gleich, nemlich gleich der Summe von zwei rechten (§. 32.).

II. *Ist in einem Dreieck ein Winkel so groſs als in einem andern, ein zweiter Winkel aber kleiner, so ist der dritte gröſser.*

Beweis. Denn sonst könnten nicht in beiden Dreiecken die Summen der drei Winkel gleich seyn.

40.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreiecke so groſs sind, als in dem andern.

Beweis. Es sey z. B. in (Fig. 19.) $AB = ED$, $AC = DF$ und $BAC = EDF$. Die gleichen Seiten sind in der Figur durch Striche, die gleichen Winkel durch

Bogen bezeichnet, (welches leichterer Uebersicht wegen hinfort, wo es dienlich ist, immer geschehen soll). Man lege den Punct A in den Punct D und die Linie AC in die Linie DF, so fällt nothwendig C in F, weil $AC = DF$ seyn soll. Ferner fällt nothwendig AB in DE, weil die Winkel A und D gleich seyn sollen, und B in E, weil $AB = DE$ seyn soll. Also fällt C in F und B in E, mithin auch BC in EF (§. 12. I.). Folglich fallen alle Grenzen der beiden Dreiecke in einander, und folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 5.).

41.

Lehrsatz. *Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Winkel und die zwischen ihnen liegende Seite in dem einen so groſs sind als in dem andern.*

Beweis. Es sey z. B. in (Fig. 20.) $AC = DF$ und $BAC = EDF$, $BCA = EFD$. Man lege den Punct A in den Punct D und die Linie AC in die Linie DF, so fällt C in F, weil $AC = DF$ seyn soll. Desgleichen fällt AB in DE und CB in FE, weil die Winkel A und C den Winkeln D und F gleich sein sollen. Nun können sich zwei grade Linien nur in einem Puncte schneiden (§. 12. II.). Also fällt auch nothwendig der Durchschnitts-Punct B in den Durchschnitts-Punct E. Folglich fallen alle Grenzen der beiden Dreiecke zusammen, und folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 5.).

42.

Lehrsatz. *Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Winkel und eine anliegende Seite in dem einen Dreiecke so groſs sind als in dem andern.*

Beweis. Denn, wenn zwei Winkel in dem einen Dreiecke so groſs sind als in dem andern, so ist es auch der dritte Winkel (§. 39. I.). Da auf diese Weise alle drei Winkel in dem einen Dreiecke so groſs sind, als in dem andern, so liegt die gleiche Seite, welche sie auch seyn mag, immer zwischen zwei Winkeln, die in dem einen Dreiecke so groſs sind, als in dem andern, und folglich sind die Dreiecke, zu Folge (§. 41.), gleich.

43.

Lehrsatz. *Parallelen schneiden von einander gleich lange Stücke ab.*

Beweis. Denn, wenn EF, GH und AB, CD (Fig. 21.) Parallelen sind, so sind die Wechselwinkel ILK und

LKM, so wie *IKL* und *KLM* gleich (§. 21. I.). Also sind in dem Dreiecke *ILK* zwei Winkel *ILK* und *IKL* nebst der Seite *LK* so grofs als in dem Dreiecke *KLM* die beiden Winkel *LKM* und *KLM* und die Seite *LK*; folglich sind die Dreiecke einander gleich (§. 41.), und folglich ist *IK* = *LM* und *IL* = *KM*; das heifst: die Parallelen schneiden gleich lange Stücke von einander ab.

44.

Lehrsätze. I. *Wenn zwei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel.*

Erster Beweis. Es sey in dem Dreiecke *ABC* (Fig. 22.) *AB* = *AC*. Man nehme willkührlich *BF* = *CG*. Alsdann ist auch *AF* = *AG*, weil *AB* = *AC* seyn soll. Also sind in dem Dreiecke *AFC* die beiden Seiten *AF* und *AC* so grofs, als in dem Dreiecke *ABG* die beiden Seiten *AG* und *AB*. Desgleichen ist der eingeschlossene Winkel *A* in beiden der nemliche. Folglich sind die Dreiecke *AFC* und *AGB* einander gleich (§. 40.). Also sind auch die Winkel *AFC* und *AGB* und ihre Supplemente *BFC* und *CGB*, nebst den Seiten *FC* und *BG* gleich. Folglich sind in dem Dreiecke *BFC* zwei Seiten *BF* und *CF*, nebst dem eingeschlossenen Winkel *BFC*, so grofs, als in dem Dreiecke *CGB* die beiden Seiten *CG* und *BG*, mit dem eingeschlossenen Winkel *BGC*. Also sind auch die Dreiecke selbst gleich. Mithin sind in denselben die Winkel *FBC* und *GCB*, das heifst, die den gleichen Seiten *AB* und *AC* des Dreiecks *ABC* gegenüber liegenden Winkel *ABC* und *ACB* gleich.

Zweiter Beweis. Es sey *AK* (Fig. 22.) eine grade Linie durch *A*, welche den Winkel *BAC* halbirt, so dafs *BAK* = *CAK* ist. Dieselbe schneidet, weil sie zwischen *AB* und *AC* liegt, die *BC* nothwendig und zwar zwischen *B* und *C*, etwa in *H* (§. 27.). Nun sind in dem Dreiecke *BAH* die Seiten *BA* und *HA* so grofs als in dem Dreiecke *CAH* die Seiten *CA* und *HA*. Desgleichen sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich; denn nach der Voraussetzung ist *BAH* gleich *CAH*. Also sind die Dreiecke *BAH* und *CAH* einander gleich (§. 40.). Folglich sind auch in denselben die Winkel *ABH* und *ACH*, die den gleichen Seiten *AB*

und AC des gegebenen Dreiecks gegenüber liegen, einander gleich.

II. *Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so sind es auch die diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.*

Erster Beweis. Gesetzt es sey möglich, daſs in dem Dreiecke ABC (Fig. 23.) nicht $AB = BC$ ist, während die Winkel ABC und ACB gleich sind, so setze man AC sey gröſser als AB, also etwa $DC = AB$, so wären in dem Dreiecke ABC zwei Seiten AB und BC und der eingeschlossene Winkel ABC so groſs, als in dem Dreiecke DCB die beiden Seiten DC und BC und der eingeschlossene Winkel DCB, weil nach der Voraussetzung $AB = DC$ und $ABC = DCB$ seyn soll und BC sich selbst gleich ist. Die Dreiecke ABC und DCB wären also gleich. Sie sind es aber nicht, weil BD nicht in AB fällt. Also kann AC nicht gröſser seyn als AB. Eben so wird bewiesen, daſs AB nicht gröſser seyn kann als AC, oder umgekehrt AC nicht kleiner als AB. Folglich kann AC weder gröſser noch kleiner als AB seyn, und folglich sind in dem Dreiecke ABC die den gleichen Winkeln ABC und ACB gegenüber liegenden Seiten AB und AC nothwendig gleich.

Auch könnte man, wenn man z. B. annimmt AB sey nicht gleich AC, wenn $ABC = ACB$ ist, setzen: AC sey z. B. gleich AF. Daſs diese Voraussetzung mit derjenigen $ABC = ACB$ zugleich nicht statt findet, folgt daraus, daſs der Winkel AFC als äuſserer Winkel des Dreiecks BFC gröſser ist als der Winkel ABC (§. 33. VI.), hingegen ACF kleiner als der gleiche Winkel ACB, so daſs die Winkel AFC und ACF ungleich wären, wenn AC und AF gleich sind. Sie sind aber alsdann zu Folge (I) nothwendig gleich. Also kann AC nicht gleich AF, das heiſst nicht kleiner als AB sein. Eben so folgt, daſs AB nicht kleiner als AC, also umgekehrt AC nicht gröſser als AB sein kann. Also ist nothwendig AB gleich AC.

Zweiter Beweis. Es sey wie in (I.) AK eine grade Linie durch A, welche den Winkel BAC halbirt, und folglich die BC zwischen B und C, etwa in H schneidet (§. 27.). Nun sind in dem Dreiecke BAH zwei Winkel ABH und BAH und die eine anliegende Seite AH so groſs als in dem Dreiecke CAH die beiden Winkel ACH und CAH und die anliegende Seite AH; denn nach der Voraussetzung ist $ABH = ACH$ und $BAH = CAH$, AH aber ist sich selbst gleich. Also sind die

Dreiecke BAH und CAH einander gleich (§. 42.) und folglich ist $AB = AC$.

45.

Zusätze. I. *In jedem Dreiecke mit zwei gleichen Seiten, d. h. in jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die zu Folge* (§. 44.) *gleichen Winkel allemal kleiner als rechte* (§. 33. V.).

II. *In jedem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich.* Denn sie liegen alle drei gleichen Seiten gegenüber.

III. *In jedem gleichwinkligen Dreiecke* (§. 38.) *sind alle drei Seiten einander gleich.* Denn sie liegen alle drei gleichen Winkeln gegenüber.

46.

Lehrsätze. I. *In jedem Dreiecke liegt der größere Winkel der größeren Seite gegenüber.*

Z. B. wenn $BC > AB$ ist (Fig. 24.), so ist der Winkel BAC größer als der Winkel ACB.

Beweis. Es sey $BD = AB$, so fällt D zwischen B und C, weil BC größer seyn soll als AB oder BD; also ist $BAC > BAD$. Nun ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABD, den gleichen Seiten BD und AB gegenüber, $BAD = BDA$ (§. 44. I.). Ferner haben die Dreiecke BAD und BAC den Winkel B gemein, der also in beiden gleich groß ist, der Winkel BAD hingegen ist in dem ersten kleiner als BAC in dem andern. Also ist der dritte Winkel ADB in dem ersten Dreieck größer als der dritte Winkel ACB in dem andern (§. 39. II.). Folglich ist auch der dem Winkel ADB gleiche Winkel BAD größer als ACB, und da BAD noch kleiner ist als BAC, so ist BAC um so mehr größer als ACB.

II. *In jedem Dreiecke liegt dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.*

Z. B. wenn $BAC > ACB$ ist (Fig. 24.), so ist $BC > AB$.

Beweis. Man setze, es sey BC nicht größer als AB, so ist BC entweder gleich AB oder kleiner als AB. Wäre $BC = AB$, so wäre nach (§. 44. I.) $BAC = ACB$, gegen die Voraussetzung; also kann BC nicht gleich AB seyn. Wäre $BC < AB$, so wäre nach (§. 46. I.) BAC kleiner ACB, ebenfalls gegen die Voraussetzung.

Also kann auch *BC* nicht kleiner als *AB* seyn. Es kann also *BC*, dem gröfsern Winkel *BAC* gegenüber, nur gröfser seyn, als die Seite *AB*, dem kleinern Winkel *ACB* gegenüber.

47.

Zusätze. Aus (§. 46.) folgt:

I. *Der gröfsten Seite eines Dreiecks liegt der gröfste Winkel und dem gröfsten Winkel die gröfste Seite gegenüber.*

II. *In jedem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem rechten oder stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite die gröfste von allen dreien*, denn der rechte oder stumpfe Winkel ist der gröfste von allen drei Winkeln (§. 33. IV.).

III. *Nur die gröfste Seite eines Dreiecks kann einem rechten oder stumpfen Winkel gegenüber liegen*, denn sonst würde die noch gröfsere Seite einem noch gröfseren Winkel gegenüber liegen, und kein Dreieck kann mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel haben (§. 33. III.).

IV. *Jeder Winkel eines Dreiecks, welcher nicht der gröfsten Seite gegenüber liegt, ist kleiner als ein rechter.* Denn wäre ein solcher Winkel auch nur ein rechter, so würde jeder gröfseren Seite, mehr als ein zweiter rechter Winkel, der schon selbst nicht Statt findet, gegenüber liegen.

V. *Wenn zwei Winkel eines Dreiecks ungleich sind, so liegt an dem gröfseren Winkel die kleinere, und an dem kleinern die gröfsere Seite.* Z. B. in (Fig. 24.) sind die Winkel *BAC* und *ACB* an *AC* ungleich, und wie bewiesen, ist die an dem gröfsern Winkel *BAC* liegende Seite *BA*, die kleinere, die an dem kleinern Winkel *ACB* liegende Seite *BC* die gröfsere.

48.

Lehrsätze. I. *Wenn in einem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke die längste Seite nebst dem ihr gegenüber liegenden Winkel eben so grofs, eine der beiden übrigen Seiten aber gröfser ist, als in einem andern Dreiecke, so ist die dritte Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel kleiner.*

Z. B. wenn in den Dreiecken *ABC* und *DEF* (Fig. 25.) *B* und *E* rechte, oder gleich grofse stumpfe

Winkel sind und es ist $DF=AC$, EF aber größer als BC, so ist nothwendig DE kleiner als AB und der Winkel DFE ist kleiner als der Winkel ACB.

Beweis. Man lege E in B und EF in BC, so fällt ED in BI, weil $E=B$ seyn soll. F falle in G, so wird C zwischen B und G liegen, weil $EF>BC$ seyn soll. Nun kann D nicht in A fallen. Denn, wäre $AB=ED$, nächst $BG=EF$ und $E=B$, so wären die Dreiecke DEF und ABG gleich (§. 40.), und folglich $AG=DF=AC$, welches nicht der Fall ist. Denn in dem Dreiecke ACG ist der Winkel ACG, als äußerer Winkel des Dreiecks ABC, größer als der Winkel ABC (§. 33. VI.) und folglich stumpf, mithin größer als AGC (§. 33. IV.); folglich ist die gegenüber liegende Seite AG größer als AC. DE kann aber auch nicht größer seyn als AB, z. B. nicht gleich IB. Denn die grade Linie IG ist, aus gleichem Grunde wie vorhin, länger als AG und folglich um so mehr länger als $AC=DF$; also kann DE weder gleich AB, noch größer als AB, folglich nur kleiner als AB, etwa gleich HB, seyn, welches das Erste war.

Der Winkel $HGB=DFE$ ist aber alsdann kleiner als ACB, denn HGB ist kleiner als AGB und AGB ist kleiner als der äußere Winkel ACB des Dreiecks AGC, welches das Zweite war.

II. *Wenn in einem recht- oder stumpfwinkligen Dreiecke die längste Seite nebst dem ihr gegenüber liegenden Winkel eben so groß, einer der übrigen Winkel aber kleiner ist als in einem andern Dreiecke, so ist die dem dritten Winkel gegenüber liegende Seite in dem ersten Dreiecke größer, und die dritte Seite kleiner als in dem andern.*

Z. B. wenn wie in (I.) $B=E$ und $DF=AC$ ist (Fig. 25.) und es ist $F<C$, so ist $EF>BC$ und $DE<AB$.

Beweis. Man lege E in B und EF in BC, so fällt ED in BI, weil $E=B$ seyn soll. Nun kann EF nicht gleich BC seyn; denn fiele F in C, so fiele DF zwischen BC und AC, etwa in KC, weil $F<C$ seyn soll; $KC=DF$ aber kann, aus gleichen Gründen wie in (I.), nicht gleich AC seyn. EF kann aber auch nicht kleiner als BC seyn, denn fiele F z. B. in L, so fiele DF wiederum zwischen BC und AC, weil $F<C$ seyn soll, etwa in LK und $LK=DF$ kann, wie in (I.), nicht gleich KC, und also um so weniger gleich AC sein.

Also kann EF weder gleich BC noch kleiner als BC, folglich nur größer als BC seyn, z. B. gleich BG, welches das Erste war. Wenn aber $EF > BC$ ist, so ist (nach I.) $DE < AB$, welches das Zweite war.

49.

Lehrsatz. *Jede zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen länger als die dritte.*

Z. B. in (Fig. 26.) ist $AB + AC > BC$.

Beweis. Es sey CAD eine grade Linie und $AD = AB$, so sind in dem gleichschenkligen Dreiecke DAB die den gleichen Seiten AD und AB gegenüberliegenden Winkel ABD und ADB gleich groſs (§. 44. I.). Nun liegt AB zwischen DB und CB, also ist $DBC > ABD$, folglich auch, weil ADB und ABD gleich sind, $DBC > CDB$. Dem gröſsern Winkel DBC liegt aber in dem Dreiecke DBC eine gröſsere Seite gegenüber (§. 46. II.). Also ist $DC > BC$. Es war aber $AD = AB$, also ist $DC = AB + AC$ und folglich $AB + AC > BC$.

50.

Lehrsatz. *Wenn eine Seite eines Dreiecks so groſs ist als eine Seite eines anderen, die anliegenden Winkel aber im ersten Dreiecke beide gröſser sind als in dem andern, so ist die Summe der beiden übrigen Seiten im ersten Dreieck gröſser als im zweiten.*

Z. B. wenn in (Fig. 27.) $BC = EF$ und $E > B$, $F > C$ ist, so ist $ED + DF > AB + AC$.

Beweis. Man lege B in E und BC in EF, so fällt C in F weil $BC = EF$ seyn soll, desgleichen fällt BA zwischen ED und EF, etwa in EG, weil $B < E$ seyn soll, und CA zwischen FE und FD, etwa in FG, weil C kleiner als F seyn soll. Eine grade Linie durch E und G schneidet aber die DF zwischen D und F, etwa in H (§. 27.). Nun ist in dem Dreiecke GHF, $GH + HF > GF$ (§. 49.), also ist, wenn man noch EG hinzuthut, $EG + GH + HF$, oder $EH + HF > EG + GF$. In dem Dreiecke EDH ist ferner $ED + DH > EH$ (§. 49.), also, wenn man HF hinzuthut, $ED + DH + HF$ oder $ED + DF > EH + HF$. Vorhin war aber $EH + HF > EG + GF$. Also ist um so mehr $ED + DF > EG + GF$, oder weil $\Delta EGI = \Delta BAC$, $ED + DF > AB + AC$.

51.

Lehrsätze. I. *Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so grofs sind als in einem anderen, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke gröfser als in dem zweiten, so ist die dritte Seite in dem ersten Dreiecke ebenfalls gröfser als im zweiten, der der gröfseren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegende Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke kleiner als in dem zweiten.*

Z. B. wenn in (Fig. 28.) $BC = EF$, $AC = DF$, ACB aber gröfser als DFE ist, so ist $AB > DE$ und wenn $AC > BC$ ist, so ist zugleich $ABC < DEF$.

Erster Beweis. Erster Theil. Man lege den Punct C in den Punct F und die kleinere von den beiden Seiten AC und BC, also BC, in EF, so fällt B in E, weil $BC = EF$ seyn soll, AC aber wird aufserhalb DFE, etwa in GF fallen, weil $ACB > DFE$ seyn soll, so dafs DF zwischen EF und GF liegt. Fällt nun A etwa in G, also AB in GE, so ist das Dreieck GEF dem Dreiecke ABC gleich (§. 40.). Nun soll nach der Voraussetzung $AC = DF$ seyn, also ist $DF = GF$ und folglich in dem gleichschenkligen Dreiecke DFG $\lambda < \varrho$ (§. 45. I.). Ferner ist, weil $BC < AC$ oder $EF < DF$ seyn soll, $\varkappa < \varrho$ (§. 47. IV.). Also ist $\varkappa + \lambda$ oder $\psi < 2\varrho$. Mithin ist $\nu > 0$ und folglich GEF oder ABC kleiner als DEF, welches der zweite Theil des Satzes war.

Zweiter Theil. Es ist aber wegen $\psi < 2\varrho$ auch $\mu > 0$. Also liegt GE zwischen GD und GE, und folglich ist $\mu < \varphi$, oder weil in dem gleichschenkligen Dreieck GFD, den gleichen Seiten GF und DF gegenüber, $\varphi = \lambda$ ist (§. 44. I.) $\mu < \lambda$ und folglich um so mehr $\mu < \psi$. Also ist in dem Dreieck GDE der Winkel DGE kleiner als der Winkel GDE, und folglich ist die dem Winkel GDE gegenüber liegende Seite GE gröfser als die dem Winkel DGE gegenüber liegende Seite DE (§. 46. II.), also auch, weil $GE = AB$ ist, $AB > DE$; welches der erste Theil des Satzes war.

Zweiter Beweis. Erster Theil wie oben.

Zweiter Theil. In dem Dreiecke DHE ist $DH + HE > DE$ und in dem Dreiecke GHF, $HF + GH > GF$ (§. 49.), also ist zusammengenommen, um so mehr,

$$DH + HE + HF + GH > DE + GF.$$

Es

Es ist aber $DH+HF=DF=GF$ und $HE+GH=GE=AB$, also ist

$$GF+AB>DE+GF,$$

und wenn man GF auf beiden Seiten abzieht

$$AB>DE;$$

wie oben.

II. *Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so groſs sind als in einem anderen und die dritte Seite in dem ersten Dreiecke ist gröſser als in dem zweiten, so ist der der dritten Seite gegenüber liegende Winkel in dem ersten Dreiecke gleichfalls gröſser als in dem zweiten, der der gröſseren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegende Winkel aber ist in dem ersten Dreiecke kleiner als in dem zweiten.*

Z. B. wenn in (Fig. 28.) $BC=EF$, $AC=DF$, AB aber gröſser ist als DE, so ist auch $ACB>DFE$ und wenn $AC>BC$ ist, so ist zugleich $ABC<DEF$.

Beweis. Wäre nicht $ACB>DFE$, so wäre entweder $ACB=DFE$ oder $ACB<DFE$. Im ersten Falle wären in dem Dreieck ABC die beiden Seiten AC und BC und der eingeschlossene Winkel ACB so groſs als in dem Dreiecke DFE, die beiden Seiten DF und EF und der eingeschlossene Winkel DFE, also wären die beiden Dreiecke, zu Folge (§. 40.), gleich, und folglich wäre $AB=DE$; gegen die Voraussetzung. Also kann ACB nicht gleich DFE seyn. Wäre $ACB<DFE$, so wäre, nach (I.), $AB<DE$; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann auch nicht ACB kleiner als DFE seyn. Folglich kann nur ACB gröſser seyn als DFE; welches das Erste war.

Da aber $ACB>DFE$ ist, so ist auch, nach (I.), nothwendig $ABC<DEF$; welches das Zweite war.

III. *Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten so groſs sind als in einem anderen, der der gröſsern Seite gegenüber liegende Winkel aber in dem ersten Dreiecke kleiner ist als in dem andern, so sind die dritte Seite und der ihr gegenüber liegende Winkel in dem ersten Dreiecke gröſser als in dem zweiten.*

Z. B. wenn in (Fig. 28.) $BC=EF$ und $AC=DF$, ABC aber, vorausgesetzt daſs $AC>BC$ ist, kleiner ist als DEF, so ist $AB>DE$ und $ACB>DFE$.

Beweis. Wäre nicht $ACB>DFE$, so wäre entweder $ACB=DFE$, oder $ACB<DFE$. Im ersten Falle wären in dem Dreieck ABC die beiden Seiten AC und BC und der eingeschlossene Winkel ACB so groſs, als in dem Dreieck DFE die beiden Seiten DF und EF

und der eingeschlossene Winkel DFE, also wären die beiden Dreiecke, nach (§. 40.), gleich und folglich wäre $ABC = DEF$; gegen die Voraussetzung. Also kann nicht ACB gleich DFE seyn. Wäre $ACB < DFE$, so wäre nach (I.) $ABC > DEF$, ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann auch nicht ACB kleiner als DFE seyn. Folglich kann ACB nur grö*fs*er seyn als DFE; welches der zweite Theil des Satzes war.

Da aber $ACB > DFE$ ist, so ist auch nach (I.) nothwendig $AB > DE$; welches der erste Theil des Satzes war.

52.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn die drei Seiten des einen so grofs sind, als die drei Seiten des andern.

Erster Beweis. Wären die Dreiecke nicht gleich, so wäre irgend ein Winkel in dem einen gröfser oder kleiner als in dem andern. Gleiche Seiten schlöfsen also in dem einen Dreieck einen gröfsern oder kleinern Winkel ein als in dem andern. In solchem Fall aber wäre nach (§. 51. I.) die dritte Seite nicht in beiden Dreiecken gleich, sondern ebenfalls gröfser oder kleiner. Also kann kein Winkel in dem einen Dreiecke gröfser oder kleiner seyn als in dem andern, zwischen gleichen Seiten; mithin schliefsen die nemlichen Seiten überall gleiche Winkel ein, und folglich sind die beiden Dreiecke gleich.

Zweiter Beweis. Die beiden Dreiecke mögen ABC und DEF seyn, (Fig. 29. I und II.), so dafs nach der Voraussetzung $AB = DE$, $BC = EF$ und $CA = FD$ ist. Man lege z. B. A in D und AC in DF, so fällt C in F, weil $AC = DF$ ist. Gesetzt nun, die beiden Dreiecke wären nicht gleich, so giebt es fünf Fälle:

1) Entweder wäre z. B. $A < D$ und $C = F$
2) oder $A > D$ und $C = F$
3) oder $A > D$ und $C > F$
4) oder $A < D$ und $C < F$
5) oder $A > D$ und $C < F$.

Im *ersten* Falle fiele AB zwischen DE und EF (Fig. 29. II.), also da $C = F$ vorausgesetzt wird, B etwa in G. Da alsdann $FG = BC$ nicht gleich EF sein kann, wie es seyn soll, so ist der Fall nicht möglich.

Im *zweiten* Falle fiele AB aufserhalb DE und DF, also da $C = F$ vorausgesetzt wird, B etwa in H, wenn

FEH eine grade Linie ist. Da alsdann $FH = BC$ nicht gleich EF seyn kann, wie es seyn soll, so ist auch der zweite Fall nicht möglich.

Im *dritten* Falle fielen AB und CB beide ausserhalb DEF, also etwa in DI und FI. Dann aber wären $DI + FI > DE + FE$ (§. 50.). Also könnte nicht DI, oder AB, gleich DE und FI oder BC gleich FE seyn, wie es seyn soll. Also ist auch der dritte Fall nicht möglich.

Im *vierten* Falle fielen AB und CB beide innerhalb DEF, also etwa in DK und FK. Dann aber wären $DK + FK < DE + FE$ (§. 50.) Also könnte nicht DK, oder AB, gleich DE und FK oder BC gleich FE seyn, wie es seyn soll. Also ist auch der vierte Fall nicht möglich.

Im *fünften* Falle fiele AB ausserhalb DEF etwa in DG (Fig. 29. III.) und CB zwischen FD und FE, also etwa in GF. Da $AB = GD$ und $BC = GF$ und zugleich $AB = DE$ und $BC = EF$ seyn soll, so wäre $DG = DE$ und $FG = FE$, also wären GDE und GFE *gleichschenklige* Dreiecke und folglich, den gleichen Seiten gegenüber, die Winkel DGE, DEG und FGE, FEG einander gleich (§. 44. I.). Es ist aber DGE um den Winkel DGF grösser als FGE, also müsste, weil $FGE = FEG$ seyn soll, $DGE > FEG$ oder auch weil $DGE = DEG$ seyn soll, $DEG > FEG$ seyn. Es ist aber im Gegentheil $DEG < FEG$; also ist auch der fünfte Fall nicht möglich.

Folglich können die Winkel A und C nicht von den Winkeln D und F verschieden seyn und mithin müssen die beiden Dreiecke gleich seyn.

Anmerkung. Man pflegt auch den Satz wie folgt zu beweisen.

Man stellt sich vor, das Dreieck ABC werde wie (Fig. 29. IV.) *unter* das Dreieck DEF gelegt, so dass AC in DF fällt und $AB = DG$, $BC = GF$ ist. Dann sind, wenn GE eine grade Linie ist, GDE und GFE gleichschenklige Dreiecke, weil AB oder $DG = DE$, und BC oder $FG = EF$ seyn soll. Also sind die Winkel DEG und DGE, und FGE und FEG, also auch DEF und DGF gleich, und folglich ist, weil die Winkel DEF und DGF von den nemlichen Seiten eingeschlossen werden, das Dreieck DGF dem Dreiecke DEF gleich, woraus man schliesst, dass auch die Dreiecke ABC und DEF gleich sind.

Dieser Beweis ist aber nicht strenge. Denn gesetzt, es wäre möglich, dafs das Dreieck *DEF* zwar die nemlichen Seiten habe wie *ABC*, nicht aber die nemlichen Winkel, so würde ebenfalls noch folgen, dafs die Dreiecke *ABC* und *DEF* gleich sind, welches doch unrichtig ist. Der Fehler liegt darin, dafs der Beweis der Gleichheit der beiden Dreiecke *ABC* und *DGF* fehlt.

53.

Lehrsatz. *Zwei Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der der gröfseren von beiden gegenüber liegende Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn in (Fig. 29. I. und II.) $AC = DF$, $BC = EF$ und, vorausgesetzt dafs $AC > BC$ ist, $B = E$ ist, so sind die Dreiecke *ABC* und *DEF* einander gleich.

Beweis. Wären die Dreiecke nicht gleich, so wäre z. B. die dritte Seite *AB* in dem einen gröfser oder kleiner, als *DE* in dem andern. Im ersten Falle wären die den gröfsern von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegenden Winkel *B* und *E* in den beiden Dreiecken nicht gleich, sondern der Winkel in dem ersten Dreiecke wäre, nach (§. 51. II.), kleiner, im andern Fall gröfser als in dem zweiten; gegen die Voraussetzung. Also können die Dreiecke nicht ungleich seyn.

54.

Zusätze. Aus (§. 53.) folgt:

I. *Zwei Dreiecke sind gleich, wenn in dem einen der gröfste von allen drei Winkeln und beliebige zwei Seiten, auch wenn sie den gröfsten Winkel nicht einschliefsen, so grofs sind als in dem andern;* denn da es alsdann keinen gröfsern als den gleichen Winkel giebt und die gröfsere Seite dem gröfseren Winkel gegenüber liegt (§. 46. II.), so ist der gleiche Winkel gewifs derjenige, welcher der gröfseren von den beiden gleichen Seiten gegenüber liegt.

II. *Also sind recht- und stumpfwinklige Dreiecke gleich, wenn aufser dem rechten oder stumpfen Winkel zwei beliebige Seiten, auch wenn sie den rechten oder stumpfen Winkel nicht einschliefsen, in dem einen so grofs sind als in dem andern.* Denn der rechte und stumpfe Winkel ist immer der gröfste von allen dreien (§. 33. IV.).

55.

Anmerkung. I. Die Fälle gleicher Dreiecke sind zusammengenommen, in der obigen Ordnung folgende.

Erstlich, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 40.).

Zweitens, wenn zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 41.).

Drittens, wenn zwei Winkel und eine anliegende Seite in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 42.).

Viertens, wenn alle drei Seiten in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 52.).

Fünftens, wenn zwei Seiten und der der gröſsern gegenüberliegende Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 53.).

Der zweite und dritte Fall lassen sich in einen zusammenfassen; und wenn man die Fälle nach der Zahl der Seiten ordnet, so sind sie folgende:

1. Wenn alle drei Seiten in dem einen Dreieck so groſs sind, als in dem andern (§. 52.).
2. Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 40.).
3. Wenn zwei Seiten und der der gröſsern gegenüberliegende Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 53.).
4. Wenn eine Seite und zwei beliebige Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 41. 42.).

Für recht- und stumpfwinklige Dreiecke lassen sich die Fälle auf drei zusammenziehen, nemlich:

Recht- und stumpfwinklige Dreiecke sind gleich:

1. Wenn alle drei Seiten in dem einen so groſs sind, wie in dem andern (§. 52.).
2. Wenn zwei beliebige Seiten und der rechte oder stumpfe Winkel in dem einen so groſs sind, wie in dem andern (§. 54. II.).
3. Wenn eine Seite und zwei beliebige Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 55. 2.).

II. Wie man sieht, ist zur Gleichheit der Dreiecke immer nur die Gleichheit von drei Stücken (Winkel und Seite sollen gemeinschaftlich durch das Wort Stück bezeichnet werden) nöthig, den Fall dreier Winkel ausgenommen, aus deren Gleichheit nicht die Gleichheit von Dreiecken folgt. Also dürfen, mit andern Wor-

ten, an der Gleichheit der 6 Stücke eines Dreiecks; theils unbedingt, theils bedingt, drei Stücke, **nur nicht drei Seiten** fehlen, nemlich:

Drei Winkel können unbedingt fehlen (I. 1.).

Zwei Winkel und eine Seite können fehlen, wenn die fehlende Seite zwischen ihnen liegt (I. 2.) oder wenn der eine fehlende Winkel der fehlenden Seite gegenüber liegt, der andere fehlende Winkel aber der kleinere von den an der fehlenden Seite liegenden ist (I. 3.).

Ein Winkel und zwei Seiten können unbedingt fehlen (4.).

56.

Erklärung. Die Stücke, welche mindestens gleich seyn müssen, wenn zwei Dreiecke gleich seyn sollen, sollen bestimmende Stücke heifsen, weil sie das Dreieck bestimmen und kein anderes Dreieck mit den nemlichen bestimmenden Stücken möglich ist. Die bestimmenden Stücke von Dreiecken sind also:

1) *drei Seiten;*
2) *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;*
3) *zwei Seiten und der der gröfsern gegenüberliegende Winkel;*
4) *eine Seite und zwei Winkel.*

Die bestimmenden Stücke sind diejenigen, welche nicht von einander abhängen, sondern willkührlich sind, welche aber die übrigen bestimmen und von welchen diese abhängen.

57.

Lehrsatz. Wenn die Seiten eines Dreiecks mit den Seiten eines andern, in einerlei Richtung gleiche Winkel machen, so sind die Winkel des einen Dreiecks so grofs, als die Winkel des andern.

Beweis. Die Winkel, welche die Seiten des Dreiecks abc (Fig. 30.) mit den Seiten des Dreiecks ABC machen, sollen gleich seyn, also wird vorausgesetzt

$$BDG = AEH = CFI.$$

Nun ist z. B. der Nebenwinkel $ADa = 2\varrho - D$, also in dem Viereke $ADaE$, weil die Summe der vier Winkel eines Vierecks gleich der Summe von vier rechten ist (§. 37.), $DaE = 4\varrho - A - (2\varrho - D) - E = 4\varrho - A - 2\varrho + D - E = 2\varrho - A + D - E$. Es wird aber $D = E$ vorausgesetzt; also ist $DaE = 2\varrho - A$, und folglich, weil $a = 2\varrho - DaE$ ist,

$$a = A.$$

Eben so ist $BFb = 2\varrho - F$, also ist in dem Viereck $BDbF$ der Winkel $DbF = 4\varrho - B - (2\varrho - F) - D = 4\varrho - B - 2\varrho + F - D = 2\varrho - B + F - D$. Es wird aber $F = D$ vorausgesetzt, also ist $DbF = 2\varrho - B$, und folglich

$$b = B.$$

Also ist auch $c = C$.

Folglich sind die Winkel des Dreiecks abc so grofs als die Winkel des Dreiecks ABC.

Von den schrägen Linien.

58.

Lehrsatz. Wenn eine grade Linie durch die Ecke eines Dreiecks und durch die gegenüberliegende Seite geht, wie AD (Fig. 31.) *in dem Dreieck* ABC, *so können folgende fünf Stücke gleich seyn:*

1) *die Schenkel des getheilten Winkels* AB *und* AC;
2) *die Theile dieses Winkels* ε *und* τ;
3) *die Abschnitte der dritten Seite* BD *und* DC;
4) *die Winkel zwischen der Mittel-Linie und der Grund-Linie* $\varkappa$ *und* λ;
5) *die Winkel an der Grund-Linie* β *und* γ.

Von je zwei dieser Gleichheiten, mit Ausnahme der Verbindung der ersten und fünften, hängen die drei übrigen ab; welches neun Sätze giebt, die zu beweisen sind.

Beweis: I. Es sey $AB = AC$ und $\varepsilon = \tau$.

Da AD sich selbst gleich ist, so sind in dem Dreiecke BAD zwei Seiten BA und AD, nebst dem eingeschlossenen Winkel ε, so grofs als in dem Dreiecke CAD die beiden Seiten CA und AD mit dem eingeschlossenen Winkel τ. Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist auch

$$BD = DC,\ \varkappa = \lambda = \varrho \text{ und } \beta = \gamma.$$

II. Es sey $AB = AC$ und $BD = DC$.

Da AD sich selbst gleich ist, so sind in dem Dreiecke BAD alle drei Seiten so grofs als in dem Dreiecke CAD; folglich sind die Dreiecke gleich und folglich ist auch

$$\varkappa = \lambda = \varrho,\ \beta = \gamma \text{ und } \varepsilon = \tau.$$

III. Es sey $AB = AC$ und $\varkappa = \lambda$.

Da alsdann $\varkappa = \lambda = \varrho$, so sind die Dreiecke ADB und ADC rechtwinklig und die beiden Seiten AB und AD sind in dem einen so grofs, als die Seiten AC und AD in dem andern. Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 54. II.) und folglich ist auch

$$\varepsilon = \tau,\ BD = CD \text{ und } \beta = \gamma.$$

IV. Es sey $\varepsilon = \tau$ und $BD = DC$.

Es sey ADE eine grade Linie und $DE = DA$, so sind die Dreiecke BDA und CDE gleich; denn es ist nach der Voraussetzung $BD = DC$ und $AD = DE$, und die eingeschlossenen Winkel $\varkappa$ und ν sind, als Scheitel-Winkel, gleich. Also ist auch $\psi = \varepsilon$, und da $\varepsilon = \tau$ vorausgesetzt wird, $\psi = \tau$. Folglich ist das Dreieck ACE über AE gleichschenklig (§. 44. II.), d. h. es ist $AC = CE$. Da aber, wegen der Gleichheit der Dreiecke BDA und CDE, $CE = AB$ ist, so ist auch $AC = AB$, und folglich sind nunmehr alle drei Seiten der beiden Dreiecke ABD und ACD gleich; folglich sind die Dreiecke selbst gleich (§. 62.) und es ist

$$AB = AC,\ \varkappa = \lambda = \varrho \text{ und } \beta = \gamma.$$

V. Es sey $\varepsilon = \tau$ und $\varkappa = \lambda$.

Alsdann sind in dem Dreieck ABD eine Seite AD und die beiden daran liegenden Winkel $\varkappa$ und ε so groſs, als in dem Dreiecke ACD die Seite AD und die beiden daran liegenden Winkel λ und τ. Also sind die Dreiecke gleich (§. 41.), und es ist folglich

$$AB = AC,\ BD = DC \text{ und } \beta = \gamma.$$

VI. Es sey $\varepsilon = \tau$ und $\beta = \gamma$.

Alsdann sind in dem Dreieck ABD die beiden Winkel ε und β und die anliegende Seite AD so groſs, als in dem Dreiecke ACD die Winkel τ und γ und die anliegende Seite AD; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 42.) und es ist folglich

$$AB = AC,\ BD = DC \text{ und } \varkappa = \lambda = \varrho.$$

VII. Es sey $BD = DC$ und $\varkappa = \lambda$.

Alsdann sind in dem Dreiecke ABD die beiden Seiten AD und BD, nebst dem eingeschlossenen Winkel $\varkappa$, so groſs, als in dem Dreieck ACD die beiden Seiten AD DC, nebst dem eingeschlossenen Winkel λ. Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.) und es ist

$$AB = AC,\ \varepsilon = \tau \text{ und } \beta = \gamma.$$

VIII. Es sey $BD = DC$ und $\beta = \gamma$.

Alsdann ist das Dreieck ABC über AC gleichschenklig (§. 44. II.) und folglich ist $AB = AC$. Also sind nunmehr in dem Dreieck ABD alle drei Seiten so groſs, als in dem Dreiecke ACD, nemlich $AB = AC$, $BD = DC$, nach der Voraussetzung, und $AD = AD$. Folglich sind die Dreiecke gleich (§. 62.) und folglich ist:

$$AB = AC,\ \varepsilon = \tau \text{ und } \varkappa = \lambda = \varrho.$$

IX. Es sey $\varkappa = \lambda$ und $\beta = \gamma$..

Alsdann sind in dem Dreiecke ABD die beiden Winkel $\varkappa$ und β und die anliegende Seite AD so grofs, als in dem Dreiecke ACD die Winkel λ und γ und die anliegende Seite AD; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 42.) und es ist

$$AB = AC,\ BD = DC \text{ und } \varepsilon = \tau.$$

Dafs der zehnte Fall nicht Statt findet, nemlich dafs nicht nothwendig

$$BD = DC,\ \varkappa = \lambda = \varrho \text{ und } \varepsilon = \tau$$

ist, wenn $AB = AC$ und $\beta = \gamma$,

vorausgesetzt wird, folgt daraus, dafs $AB = AC$ und $\beta = \gamma$ nicht zwei von einander unabhängige Voraussetzungen sind, sondern nur eine: denn wenn $AB = AC$ ist, so ist in dem Dreiecke ABC nothwendig $\beta = \gamma$, und umgekehrt (§. 44. I. und II.).

59.

Anmerkung. Wenn man die beiden äufsern von drei graden Linien AB, AD und AC (Fig 31.), welche durch einen und denselben Punct A gehen und eine vierte BC schneiden, schräge Linien, die mittlere Mittel-Linie und die vierte Grund-Linie nennt, so lassen sich die Sätze (§. 58.) auch wie folgt ausdrücken.

I. *Wenn zwei gleich lange schräge Linien* AB *und* AC *mit der Mittel-Linie gleiche Winkel machen, so ist die Mittel-Linie ein Perpendikel auf die Grund-Linie und die schrägen Linien entfernen sich von dem Perpendikel, an verschiedenen Seiten in der Grund-Linie, gleich weit und machen mit ihr gleiche Winkel.* Denn wenn $AB = AC$ und $\varepsilon = \tau$ ist, so ist $\varkappa = \lambda = \varrho$, $BD = DC$ und $\beta = \gamma$ (§. 58. I.).

II. *Wenn sich zwei gleich lange schräge Linien* AB *und* AC *von der Mittel-Linie, in der Grund-Linie gleich weit entfernen, so machen sie mit der Mittel-Linie, so wie mit der Grund-Linie, gleiche Winkel, und die Mittel-Linie ist ein Perpendikel auf die Grundlinie.* Denn wenn $AB = AC$ und $BD = DC$ ist, so ist $\varepsilon = \tau$, $\beta = \gamma$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$ (§. 58. II.).

III. *Wenn zwei gleich lange schräge Linien ein Perpendikel auf die Grund-Linie zur Mittel-Linie haben, so machen sie mit demselben, so wie mit der Grund-Linie, gleiche Winkel, und entfernen sich in der Grund-Linie, von der Mittel-Linie gleich weit.* Denn wenn $AB = AC$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$, so ist $\varepsilon = \tau$, $\beta = \gamma$ und $BD = CD$ (§. 58. III.).

IV. *Wenn zwei schräge Linien mit einer Mittel-Linie gleiche Winkel machen und sich von derselben in der Grund-Linie gleich weit entfernen, so sind sie gleich lang, machen mit der Grund-Linie gleiche Winkel und die Mittel-Linie ist ein Perpendikel auf die Grund-Linie.* Denn wenn $\varepsilon = \tau$ und $BD = DC$ ist, so ist $AB = AC$, $\beta = \gamma$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$ (§. 58. IV).

V. *Wenn zwei schräge Linien mit einem Perpendikel auf die Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, entfernen sich vom Perpendikel, in der Grund-Linie gleich weit, und*

machen mit der Grund-Linie gleiche Winkel. Denn wenn $\iota = \iota$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$ ist, so ist $AB = AC$, $BD = CD$ und $\beta = \gamma$ (§. 58. V.).

VI. *Wenn zwei schräge Linien mit ihrer Mittel-Linie, so wie mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, entfernen sich in der Grund-Linie, von der Mittel-Linie gleich weit und die Mittel-Linie steht auf der Grund-Linie senkrecht.* Denn wenn $\iota = \tau$ und $\beta = \gamma$ ist, so ist $AB = AC$, $BD = DC$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$ (§. 58. VI.).

VII. *Wenn sich zwei schräge Linien in der Grund-Linie von einem Perpendikel gleich weit entfernen, so sind sie gleich lang und machen mit dem Perpendikel, so wie mit der Grund-Linie gleiche Winkel.* Denn wenn $BD = DC$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$, so ist $AB = AC$, $\iota = \tau$ und $\beta = \gamma$ (§. 58. VII.).

VIII. *Wenn sich zwei schräge Linien in der Grund-Linie von der Mittel-Linie gleich weit entfernen und mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen, so sind sie gleich lang, machen mit der Mittel-Linie gleiche Winkel und die Mittel-Linie steht auf der Grund-Linie senkrecht.* Denn wenn $BD = DC$ und $\beta = \gamma$, so ist $AB = AC$, $\iota = \tau$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$ (§. 58. VIII.).

IX. *Wenn zwei schräge Linien mit der Grund-Linie gleiche Winkel machen und die Mittel-Linie steht auf der Gruud-Linie senkrecht, so sind die schrägen Linien gleich lang, entfernen sich in der Grund-Linie vom Perpendikel gleich weit und machen mit ihm gleiche Winkel.* Denn wenn $\beta = \gamma$ und $\varkappa = \lambda = \varrho$, so ist $AB = AC$, $BD = DC$ und $\iota = \tau$ (§. 58. IX.).

X. *Jeder Punct eines Perpendikels ist also von zwei beliebigen, von seinem Fuſse, in der Grundlinie, gleich weit abstehenden Puncten, gleich weit entfernt* (VII.).

60.

Lehrsatz. *Das Perpendikel aus der Ecke eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite fällt auſserhalb des Dreiecks, wenn das Dreieck daselbst stumpfwinklig ist, und innerhalb, wenn es spitzwinklig ist.*

Beweis. Fiele in einem stumpfwinkligen Dreiecke wie ACB (Fig. 32.) das Perpendikel aus A auf BC innerhalb des Dreiecks, wie AG, so wäre in dem rechtwinkligen Dreiecke AGC nothwendig der Winkel ACG kleiner als ein rechter, weil ein Dreieck nur einen rechten Winkel haben kann (§. 33. III.), gegen die Voraussetzung, da vielmehr ACG gröſser als ein rechter Winkel seyn soll.

Fiele in einem spitzwinkligen Dreieck, wie ABC (Fig. 33.) das Perpendikel aus A auf BC auſserhalb des Dreiecks, wie AF, so wäre in dem rechtwinkligen Dreiecke ACF nothwendig der Winkel ACF kleiner als ein rechter, weil ein Dreieck nur einen rechten Winkel haben kann (§. 33. III.). Gegentheils ist ACF, als Supplement zu dem spitzen Winkel ACB, gröſser als ein rechter.

Also kann in einem stumpfwinkligen Dreiecke das Perpendikel nicht innerhalb und in einem spitzwinkligen Dreiecke nicht aufserhalb fallen. Es kann aber auch nicht in die Seiten selbst fallen, weil das Dreieck nicht rechtwinklich seyn soll. Also fällt es in einem stumpfwinkligen Dreieck nothwendig aufserhalb und in einem spitzwinkligen innerhalb.

61.

Lehrsatz. Wenn eine grade Linie durch die Ecke eines Dreiecks geht und auf der gegenüber liegenden Seite senkrecht ist, so können:

1) *die beiden Seiten des Dreiecks neben dem Perpendikel,*
2) *die Winkel zwischen den Seiten und dem Perpendikel,*
3) *die Abstände der Seiten vom Perpendikel in der Grundlinie,*

ungleich seyn. Ist eines von diesen Stücken grösser als das andere gleicher Art, so sind es auch die beiden übrigen, welches drei Sätze giebt, die zu beweisen sind.

I. *Es sey* (Fig. 32. und 33.) AD *auf* BC *senkrecht und* $\mu > \nu$, *so ist* BD > CD *und* AB > AC.

Beweis. α) Fallen μ und ν auf einerlei Seite des Perpendikels, wie (Fig. 32.), so schneiden *AB* und *AC* die *BD*, in so fern $\mu + \varrho < 2\varrho$, also $\mu < \varrho$ ist, an einer und derselben Seite von *AD* (§. 22. I.); also ist nothwendig *BD* > *CD*, welches das Erste war.

Nun ist der äufsere Neben-Winkel *BCA* des rechtwinkligen Dreiecks *ACD* grösser als ϱ (§. 33. VI.), hingegen der Winkel *ABC* in dem rechtwinkligen Dreieck *ABD* ist kleiner als ϱ (§. 33. III.). Also ist in dem Dreieck *ABC* der Winkel *ACB* gröfser als der Winkel *ABC*, und folglich ist die dem ersten gegenüber liegende Seite *AB* gröfser als die dem andern gegenüber liegende Seite *AC* (§. 46. II.), welches das Zweite war.

β) Fallen μ und ν auf verschiedene Seiten des Perpendikels wie (Fig. 33.), so sey *EAD* oder λ gleich ν, so dafs $\lambda < \mu$ ist. Alsdann wird wie in (α) bewiesen, dafs nothwendig *BD* > *ED* und *AB* > *AE* ist. Es ist aber, wenn $\nu = \lambda$ ist, *AE* = *AC* und *ED* = *DC* (§. 59. V.). Also ist auch in diesem Falle *BD* > *CD* und *AB* > *AC*.

Es ist also in allen Fällen *BD* > *CD* und *AB* > *AC*, wenn $\mu > \nu$ ist.

II. *Es sey* AD *auf* BC *senkrecht und* AB > AC, *so ist* $\mu > \nu$ *und* BD > CD.

α) Es mögen zuerst wieder AB und AC auf einerlei Seite des Perpendikels liegen, wie (Fig. 32.). Wäre nicht $\mu > \nu$, so wäre $\mu = \nu$ oder $\mu < \nu$. Im ersten Falle aber fielen AB und AC in einander und es wäre nicht $AB > AC$, sondern $AB = AC$, gegen die Voraussetzung. Im andern Falle, $\mu < \nu$, wäre nach (I. α.) $AB < AC$; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder $\mu = \nu$ noch $\mu < \nu$, folglich nur $\mu > \nu$ seyn. Wenn aber $\mu > \nu$ ist, so ist auch nach (I. α.) $BD > BC$.

β) Es mögen AB und AC auf verschiedene Seiten des Perpendikels fallen, wie (Fig. 33.). Wäre nicht $\mu > \nu$, so wäre $\mu = \nu$ oder $\mu < \nu$. Im ersten Falle aber wäre nicht $AB > AC$, sondern, nach (§. 69. V.), $AB = AC$; gegen die Voraussetzung. Im andern Falle, $\mu < \nu$, wäre nach (I. β.) $AB < AC$; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder $\mu = \nu$ noch $\mu < \nu$, sondern nur $\mu > \nu$ seyn. Wenn aber $\mu > \nu$ ist, so ist auch nach (I. β.) $BD > DC$.

Es ist also in allen Fällen $\mu > \nu$ und $BD > DC$, wenn $AB > AC$ ist.

III. *Es sey* AD *auf* BC *senkrecht und* BD > CD, *so ist* AB > AC *und* $\mu > \nu$.

α) Fallen BD und CD auf einerlei Seite des Perpendikels, wie (Fig. 32.), so ist offenbar $\mu > \nu$, wenn $BD > CD$ ist, und folglich ist alsdann auch, nach (I. α), $AB > AC$.

β) Fallen BD und CD auf verschiedene Seiten des Perpendikels, wie (Fig. 33.), und es wäre nicht $\mu > \nu$, so wäre $\mu = \nu$, oder $\mu < \nu$. Im ersten Falle aber wäre nicht $BD > CD$, sondern, nach (§. 69. V.), $BD = CD$; gegen die Voraussetzung. Im andern Falle, $\mu < \nu$, wäre nach (I. β.) $BD < CD$; ebenfalls gegen die Voraussetzung. Also kann weder $\mu = \nu$, noch $\mu < \nu$, folglich nur $\mu > \nu$ seyn. Wenn aber $\mu > \nu$ ist, so ist, nach (I. β.), $AB > AC$.

Es ist also in allen Fällen $AB > AC$ und $\mu > \nu$, wenn $BD > CD$ ist.

62.

Anmerkung. Wenn man, wie in (§. 59.) von drei Linien AB, AD und AC (Fig. 32.), welche eine vierte BD schneiden, die äufseren schräge, und die vierte, auf welcher die Mittel-Linie senkrecht steht, Grund-

Linie nennt, so lassen sich auch die Sätze (§. 61.) wie folgt ausdrücken.

I. *Von zwei schrägen Linien ist diejenige die längere und entfernt sich in der Grundlinie am weitesten vom Perpendikel, welche mit ihm den gröfsesten Winkel macht* (§. 61. I.).

II. *Die längste von zwei schrägen Linien macht mit dem Perpendikel den gröfsten Winkel und entfernt sich von ihm in der Grundlinie am meisten* (§. 61. II.).

III. *Von zwei schrägen Linien ist diejenige die längere, und macht mit dem Perpendikel den gröfsten Winkel, welche sich von ihm in der Grundlinie am meisten entfernt* (§. 61. III.).

63.

Zusätze. I. *Jeder Punct aufserhalb eines Perpendikels ist von zwei Puncten in der Grundlinie, die gleich weit vom Perpendikel abstehen, ungleich weit, und zwar von demjenigen Puncte am weitesten entfernt, welcher auf der andern Seite des Perpendikels liegt.*

Wenn z. B. EF (Fig. 34.) perpendicular auf BC, und $BE = EC$ ist, so ist ein beliebiger Punct A aufserhalb EF von B und C ungleich weit entfernt, und zwar ist $AB > AC$. Denn, wenn AD durch A auf BC senkrecht ist, so ist $BD > DC$, weil AD mit FE parallel ist. Also ist nach (§. 62. III.) $AB > AC$.

II. *Es giebt nur zwei gleich lange schräge Linien aus einem Punct nach einer graden Linie, die allemal auf verschiedenen Seiten des Perpendikels liegen.*

Denn alle schräge Linien auf der nemlichen Seite des Perpendikels sind von einander verschieden.

III. *Es sind zwei verschiedene Dreiecke möglich, aber nur zwei, in deren einem zwei Seiten und der der kleinern gegenüber liegende Winkel so grofs sind, als in dem andern.*

Wenn z. B. in dem an der unbestimmten Seite BC stumpfwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 32.) AC die kleinere der beiden bestimmten Seiten AB und AC ist, so ist mit dem nemlichen, der Seite gegenüber liegenden Winkel B, und gleich langen Seiten, ein zweites Dreieck ABE möglich; denn das Perpendikel AD, welches in diesem Falle innerhalb des Dreiecks liegt (§. 60.), fällt dann näher an die kürzere schräge Linie AC als an die längere AB (§. 62. II.), und folglich eine

zweite gleich lange schräge Linie *AE*, die in gleicher Entfernung vom Perpendikel liegt (§. 59. III.) nicht zwischen *B* und *D*; mithin entsteht ein zweites Dreieck *ABE*, welches die nemlichen zwei Seiten *AB* = *AB*, *AE* = *AC* und, der kleinern gegenüber, den nemlichen Winkel *ABE* hat. Aber auch nur ein solches zweites Dreieck ist möglich, weil nur zwei gleich lange schräge Linien *AC* und *AE* möglich sind (II.).

Ist in dem, an der unbestimmten Seite *BC*, in *C* spitzwinkligen Dreieck *ABC* (Fig. 33.) *AC* die kleinere der beiden bestimmten Seiten *AB* und *AC*, so verhält es sich eben so. Das Perpendikel *AD*, welches in diesem Falle innerhalb des Dreiecks liegt (§. 60.), fällt näher an die kürzere schräge Linie *AC* als an die längere *AD* (§. 62. II.), und folglich eine zweite gleich lange schräge Linie *AE*, die in gleicher Entfernung vom Perpendikel liegt (§. 59. III.), auf die nemliche Seite von *BA*. Mithin entsteht ein zweites Dreieck *ABE*, welches die nemlichen zwei Seiten *AB* = *AB*, *AE* = *AC* und, der kleinern gegenüber, den nemlichen Winkel *ABE* hat. Aber auch nur ein solches zweites Dreieck ist möglich, weil nur zwei gleich lange schräge Linien *AC* und *AE* möglich sind (II.).

Mit den nemlichen zwei Seiten und dem nemlichen, der größern gegenüber liegenden Winkel ist kein zweites Dreieck möglich. Denn, wenn z. B. die beiden Seiten *AB* und *AC* (Fig. 32. und 33.) und der der größern *AB* gegenüber liegende Winkel *ACB* bleiben sollen, so fällt eine zweite, der Seite *AB* gleiche schräge Linie *AF* aufserhalb des Dreiecks und das zweite Dreieck mit den nemlichen Seiten *AC* = *AC*, und *AF* = *AB* hat nicht mehr den bestimmten Winkel *ACB*, sondern den davon verschiedenen Winkel *ACF*.

IV. *Jede schräge Linie ist länger als das zugehörige Perpendikel.*

Denn eine schräge Linie ist um so kürzer, je näher sie dem Perpendikel liegt (§. 62. III.).

V. *Das Perpendikel, dergleichen es aus einem Puncte nur eines giebt* (§. 26. I.), *ist die kürzeste grade Linie aus einem Punct nach einer graden Linie.*

Denn jede schräge Linie ist länger (IV.).

Deshalb nennt man die Länge des Perpendikels aus einem Puncte nach einer Linie, *Entfernung* oder *Abstand* des Puncts von der Linie.

Erklärung von Coordinaten.

64.

Erklärung. Die Parallelen MB *und* MC (Fig. 35.) *mit graden Linien* SAQ *und* RAP, *die sich unter beliebigem Winkel schneiden, von dem Puncte* M *bis an diese Linien, heifsen* Coordinaten *des Puncts* M. *Die eine Parallele, z. B.* AB = CM, *heifst* Abcisse, *die andere,* AC = BM, Ordinate. *Bleiben die Linien* PR *und* SQ *für beliebige Puncte, wie* M, *dieselben, so heifsen sie* Coordinaten-Axen; *die mit der Abcisse parallele Axe* SQ *heifst* Abcissen-Axe, *die mit der Ordinate parallele Axe* PR, Ordinaten-Axe. *Der Durchschnitts-Punct der Axen* A *heifst* Anfangs-Punct der Coordinaten. *Ist der Winkel* PAQ, *unter welchem sich die Axen schneiden, ein* rechter, *so heifsen die Coordinaten* rechtwinklig. *Abcissen und Ordinaten sind alsdann die Abstände oder Entfernungen der Puncte, welchen sie angehören, von den senkrechten Axen.*

Eine grade Linie, wie AM, *von einem beliebigen Puncte* M *nach dem Anfangs-Puncte der Coordinaten, heifst* Ordinate aus einem Puncte *von M; auch* Radius-vector. *Der Winkel* MAB *heifst* Ordinaten-Winkel.

65.

Lehrsatz. Die Lage beliebiger Puncte, z. B. der Ecken einer Figur, also die Figur selbst, ist vollständig gegeben, wenn entweder für einen gegebenen Axen-Winkel, Abcissen und Ordinaten, oder Ordinaten aus einem Puncte, nebst dem Ordinaten-Winkel für jede Ecke gegeben sind, und es sind mit den nemlichen Coordinaten der Ecken nicht verschiedene Figuren möglich.

Beweis. Mit den nemlichen zwei Seiten AB und BM (Fig. 35.) und dem nemlichen eingeschlossenen Axen-Winkel $PAS = MBA$, oder mit den nemlichen beiden Winkeln MAB und MBA und der Seite AM ist nur ein einziges Dreieck ABM möglich (§. 56. 2. u. 4.), folglich ist durch diese Seiten und Winkel der Punct M fest bestimmt. Eben so der Punct N durch AD, DN und den Winkel ADN oder durch AN, und die beiden Winkel ADN und NAD, also auch die Linie MN, weil nur eine grade Linie zwischen zwei Puncten möglich ist; und so jede Seite einer beliebigen Figur.

Von der Centricität der Dreiecke.

66.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke giebt es einen Punct, der von den drei Ecken gleich weit entfernt ist, aber nur einen. *Dafs heifst: Jedes Dreieck ist* centrisch *nach den* Ecken *oder hat einen Eck-Mittel-Punct* (§. 30. I.), *aber* nur einen; *oder auch: beliebige drei Puncte in der Ebene sind* centrisch, *haben aber nur einen* Mittel-Punct.

Beweis. Wenn ED und GF (Fig. 36.) Perpendikel auf die Seiten BC und AC des Dreiecks ABC sind,

welche diese Seiten halbiren, so ist jeder Punct des Perpendikels ED gleich weit von B und C, und jeder Punct des Perpendikels GF gleich weit von A und C entfernt (§. 59. VII.) Die Perpendikel machen aber mit den beiden, nicht in grader Linie liegenden Linien BC und AC, gleiche Winkel, also begegnen sie sich nothwendig irgendwo (§. 28.), etwa in M. Daher ist der Punct M, weil er in beiden Perpendikeln zugleich liegt, sowohl von B und C als von C und A, folglich von B und C und A zugleich, gleich weit entfernt. Es giebt also nothwendig einen Punct M, der von den drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Aber auch nur einen. Denn ein zweiter solcher Punct könnte immer nur in den Perpendikeln ED und GF liegen, weil alle Puncte ausserhalb eines Perpendikels von zwei Puncten, die gleich weit von seinem Fusse abstehen, ungleich weit entfernt sind (§. 63. I.). Er könnte also nur in dem Durchschnitte der Perpendikel ED und GF liegen, und es giebt nur einen Durchschnitt (§. 12. II.).

67.

Zusatz. *Aus (66.) folgt, dafs sich die Perpendikel DE, FG und HI (Fig. 36.) auf die drei Seiten eines Dreiecks, wenn sie die Seiten halbiren, alle drei in einem und demselben Puncte und zwar in dem Puncte schneiden, der gleich weit von den drei Ecken des Dreiecks entfernt ist, so dafs also $AM = BM = CM$ ist.*

68.

Lehrsatz. I. *Jeder Winkel eines Dreiecks, einer beliebigen Seite gegenüber, ist halb so grofs als der Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, am Eck-Mittel-Puncte des Dreiecks.*

Z. B. wenn in (Fig. 37. I. II. III.) $AM = BM = CM$ ist, so ist $AMC = 2B$.

Beweis. Es sind drei Fälle möglich. Entweder kann der Mittel-Punct in eine Seite des Dreiecks fallen, wie (Fig. 37. I.) oder innerhalb des Dreiecks, wie (Fig. 37. II.) oder ausserhalb des Dreiecks, wie (Fig. 37. III.).

In allen drei Fällen sind die Dreiecke AMB, AMC und BMC gleichschenklig; denn die Seiten AM, BM und CM sind, als Halbmesser, nach der Voraussetzung gleich.

gleich. Also sind auch die den gleichen Schenkeln gegenüber liegenden Winkel gleich, nemlich $BAM = ABM$, $BCM = CBM$ (§. 44. I.).

Nun ist in Figur I. AMC der äufsere Winkel des Dreiecks ABM, welcher gleich $ABM + BAM$ ist, (§. 33. VI.). Also ist $AMC = 2B$. In Figur II. III. sind, wenn BMD eine grade Linie ist, AMD und CMD die äufsern Winkel der Dreiecke AMB und CMB, welche gleich $MBA + MAB$ und $MBC + MCB$ sind; also ist $AMD = 2ABM$ und $CMD = 2CBM$; folglich ist in Fig. II. AMC, oder $CMD + AMD = 2CBM + 2ABM$ und in Fig. III. AMC, oder $CMD - AMD = 2CBM - 2ABM$, und folglich in beiden $AMC = 2B$.

In allen drei Fällen ist also der den Dreiecks-Seite AC gegenüberliegende Winkel B halb so grofs, als der der nemlichen Seite gegenüber liegende Winkel AMC am Eck-Mittel-Puncte M. Und eben so verhält es sich für jede andere Seite.

II. *Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die Seite zwischen den gleichen Schenkeln mit einem beliebigen andern Dreieck gemein hat, und der Winkel des gleichschenkligen Dreiecks, der gemeinschaftlichen Seite gegenüber, ist doppelt so grofs, als der Winkel des andern Dreiecks der nemlichen Seite gegenüber, so ist der Scheitel des Winkels im gleichschenkligen Dreieck, der Mittel-Punct der Ecken des andern Dreiecks.*

Z. B. wenn in (Fig. 37. I. II. III.) $BM = CM$ und $BMC = 2BAC$ ist, so ist $AM = BM = CM$.

Beweis. Man setze BMC sey gleich $2BA_1C$, und wenn es angeht A_1M, nicht gleich $BM = CM$, sondern z. B. gröfser als $BM = CM$. Alsdann sey A_1AM eine grade Linie und $AM = BM = CM$, so ist zu Folge (I.) $BMC = 2BAC$.

Nun ist A_1M nach der Voraussetzung eine längere schräge Linie als AM aus M nach der graden Linie A_1AB. Also fällt A zwischen B und A_1 und folglich AC zwischen A_1C und BC. Dieserhalb aber ist der Winkel BAC, als äufserer Winkel des Dreiecks AA_1C, gröfser als der Winkel BA_1C, und folglich kann BMC nicht gleich $2BA_1C$ seyn; denn es war BMC gleich $2BAC$. Also kann A_1M nicht gröfser seyn, als $BM = CM$, wenn $BMC = 2BA_1C$ seyn soll.

Eben so wird bewiesen, dafs $A_{11}M$ nicht kleiner als $BM = CM$ seyn kann, wenn $BMC = 2BA_{11}C$ seyn

soll. Daher ist, für $BMC = 2BAC$, nothwendig $AM = BM = CM$.

69.

Lehrsätze. I. *Der Eck-Mittel-Punct eines rechtwinkligen Dreiecks liegt in der Mitte seiner Hypothenuse; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct in der Mitte einer seiner Seiten liegt, ist rechtwinklig.*

Beweis. Wenn einer Seite, z. B. BC des Dreiecks BAC (Fig. 37. I.) gegenüber, der Winkel ein rechter ist, so ist, der nemlichen Seite gegenüber, der Winkel BMC am Eck-Mittel-Puncte M des Dreiecks gleich zwei rechten (§. 68. I.); folglich liegt M in der Hypothenuse BC, und zwar, weil die Halbmesser BM und CM gleich sind, in der Mitte der Hypothenuse; welches das Erste war.

Wenn der Eck-Mittel-Punct eines Dreiecks in der Mitte einer Seite liegt, so ist der Winkel am Mittel-Punct für diese Seite zwei rechte, also der Dreiecks-Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, ein rechter (§. 68. I.); welches das Zweite war.

II. *Der Eck-Mittel-Punct eines spitzwinkligen Dreiecks liegt im Innern des Dreiecks; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct im Innern liegt, ist spitzwinklig.*

Beweis. Sind alle Winkel des Dreiecks kleiner als rechte, so sind die Winkel am Eck-Mittel-Punct, den Seiten gegenüber, kleiner als zwei rechte (§. 68. I.), das heifst: in (Fig. 37. II.), sind die Winkel AMB, BMC und CMA sämmtlich kleiner als zwei rechte. Folglich liegt M im Innern des Dreiecks; welches das Erste war.

Liegt der Eck-Mittelpunct eines Dreiecks im Innern, so sind alle Winkel an demselben, den Seiten gegenüber, nemlich die Winkel AMB, BMC und CMA kleiner als zwei rechte, folglich die Winkel des Dreiecks C, A, B, den nemlichen Seiten gegenüber, kleiner als rechte, oder sämmtlich spitz; welches das Zweite war.

III. *Der Eck-Mittel-Punct eines stumpfwinkligen Dreiecks liegt aufserhalb des Dreiecks; und umgekehrt: ein Dreieck, dessen Eck-Mittel-Punct aufserhalb liegt, hat nothwendig einen stumpfen Winkel.*

Beweis. Ist ein Winkel des Dreiecks, z. B. ACB, der Seite AB gegenüber (Fig. 37. III.), stumpf oder gröfser als ein rechter, so ist der Winkel AMB am Mittel-Punct, der nemlichen Seite gegenüber, gröfser

als zwei rechte (§. 68. I.), folglich liegt alsdann der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks aufserhalb desselben; welches das Erste war.

Liegt der Eck-Mittel-Punct eines Dreiecks aufserhalb desselben, so ist der Winkel an ihm, einer Seite gegenüber, gröfser als zwei rechte, also der Winkel des Dreiecks, der nemlichen Seite gegenüber, gröfser als ein rechter, oder stumpf (§. 68. I.); welches das Zweite war.

70.

Lehrsätze. I. *Alle Dreiecke, deren eine Seite und der gegenüber liegende Winkel in dem einen so grofs sind als in dem andern, haben die nemlichen Mittel-Puncte und gleiche Halbmesser der Ecken.*

Beweis. Es sey z. B. in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 38.), $BC = EF$, und der Winkel A gleich dem Winkel D. M sey der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks ABC, so ist der Winkel BMC doppelt so grofs, als der Winkel BAC (§. 68. I). Nun lege man EF in BC; D falle in G; so ist nach der Voraussetzung der Winkel BGC oder $EDF = BAC$. Der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks BGC kann aber nur in dem Perpendikel MQ auf BC durch die Mitte von BC liegen, eben wie der Eck-Mittel-Punct des Dreiecks ABC, und der Winkel BMC kann nur gleich $2\,BGC = 2\,BAC$ seyn; also kann der Eck-Mittel-Punct nur in M fallen, denn jeder Winkel an einem andern Punct des Perpendikels, wie BPC, ist gröfser oder kleiner als BMC, also haben die Dreiecke GBC oder DEF und ABC gleiche Halbmesser und ihre Mittel-Puncte fallen in einander, wenn man die gleichen Seiten in einander legt.

II. *In allen Dreiecken, welche eine Seite gemein und gleiche Mittel-Puncte der Ecken haben, ist der der gemeinschaftlichen Seite gegenüber liegende Winkel gleich grofs.*

Beweis. Denn derselbe ist die Hälfte eines und desselben Winkels am Mittel-Punct.

71.

Lehrsatz. Die Perpendikel aus den Winkel-Spitzen eines Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten schneiden sich in einem und demselben Puncte.

Z. B. in dem Dreieck ABC (Fig. 39. I. und II.) schneiden sich die Perpendikel AP, BQ, CR aus A, B und C auf die Seiten BC, CA und AB in einem und demselben Punct M.

Beweis. Es sey DEF ein Dreieck, dessen Seiten mit den Seiten des gegebenen Dreiecks ABC parallel sind, und durch die Win-

recht, denn es ist z. B. $MAB = \frac{1}{2} BAC$ und $QAD = \frac{1}{2} DAC$, also $MAQ = 2\varrho - \frac{1}{2} BAC - \frac{1}{2} DAC = 2\varrho - \frac{1}{2}(BAC + DAC)$. Aber $BAC + DAC$ ist $= 2\varrho$; also ist $MAQ = 2\varrho - \frac{1}{2} . 2\varrho = \varrho$. Eben so wird bewiesen, dafs $MBN = \varrho$ und $MCP = \varrho$ ist.

III. *Aus* (II.) *folgt auch noch, dafs der Durchschnitts-Punct* M (Fig. 42.) *der Perpendikel* PA, QB, NC *aus den Scheiteln eines beliebigen Dreiecks* PQN *auf die gegenüber liegenden Seiten, zugleich der Mittelpunct der Seiten eines Dreiecks* ABC *ist, dessen Ecken die Puncte* A, B, C *sind, in welchen die Perpendikel* PA, QB, NC *die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks* PQN *schneiden.*

B. Von der Gleichheit der *Vierecke* und *Vielecke*, und dem, was davon abhängt.

a) *Von den Vierecken.*

Gleichheit der Vierecke.

76.

Lehrsatz. I. *Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn alle vier Seiten und ein Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. In (Fig. 43.) sind in dem Dreieck ABC die beiden Seiten AB und AC und der eingeschlossene Winkel A so grofs, als in dem Dreieck EFG die beiden Seiten EF und EG und der eingeschlossene Winkel E; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist $CB = FG$. Nun sind in dem Dreieck BCD alle drei Seiten so grofs, als in dem Dreieck FGH; also sind auch diese Dreiecke einander gleich (§. 62.), und folglich sind die Winkel DBC, HFG und DCB, HGF gleich. Legt man daher A in E und AB in EF, so fällt AC in EG, BC in FG, BD in FH, CD in GH und D in H. Folglich fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander, und folglich sind die Vierecke gleich.

II. *Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn drei Seiten und die beiden von denselben eingeschlossenen Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. Wie im vorigen Satze sind die Dreiecke ABC und EFG (Fig. 44.) gleich. Also ist $BC = FG$ und der Winkel ABC gleich dem Winkel EFG. Da nun $ABD = EFH$ seyn soll, so ist auch $CBD = GFH$. Folglich sind in dem Dreieck CBD die beiden Seiten CB und BD und der eingeschlossene Winkel CBD so grofs, als in dem Dreiecke GFH die beiden Seiten GF

und *FH* und der eingeschlossene Winkel *GFH*; folglich sind auch diese Dreiecke gleich. Legt man also *A* in *E* und *AB* in *EF*, so fällt *AC* in *EG*, *BC* in *FG*, *BD* in *FH*, *D* in *H* und folglich *CD* in *GH*. Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander, und folglich sind sie gleich.

III. *Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn, wie* (Fig. 45.), *drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern, und wenn zugleich die Diagonal durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Ist die Diagonal gröſser, so können zwei verschiedene Vierecke die nemlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.*

Beweis. Wie in den vorigen Sätzen sind die Dreiecke *ABC* und *EFG* gleich; also ist *BC* = *FG* und der Winkel *ABC* gleich dem Winkel *EFG*. Da nun *ABD* = *EFH* seyn soll, so ist auch *CBD* = *GFH*. Also sind in dem Dreieck *CBD* die beiden Seiten *CB* und *CD* und der eine anliegende Winkel *CBD* so groſs, als in dem Dreieck *GFH* die beiden Seiten *GF*, *GH* und der anliegende Winkel *GFH*, folglich sind die Dreiecke unter der Bedingung gleich, daſs die dem gleichen Winkel gegenüber liegende Seite *CD* die gröſsere, also *CD* > *CB* ist (§. 63.). Legt man also *A* in *E* und *AB* in *EF*, so fällt *AC* in *EG*, *BC* in *FG*, *BD* in *FH* und *CD* in *GH*. Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und sie sind gleich. Ist dagegen *CD* < *CB*, so sind mit den nemlichen Seiten *BC* und *DC* und dem nemlichen Winkel *CBD*, zwei verschiedene Dreiecke möglich, nemlich *CBD* und *CBK*, wenn *CK* = *CD* ist (§. 63. III.), aber auch nur zwei; also auch zwei verschiedene Vierecke *ABCD* und *ABCK*, aber nur zwei mit den nemlichen gegebenen Stücken *AB* = *AB*, *AC* = *AC*, *CD* = *CK*, *CAB* = *CAB* und *ABD* = *ABK*.

IV. *Zwei Vierecke sind einander gleich, wenn drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel in dem einen so groſs sind als in dem andern.*

Beweis. Es sey in dem einen Viereck (Fig. 46. I. II. III.) *AP* und *BQ* auf *CD* und in dem andern *EX* und *FY* auf *GH* senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *ACP* und *EGX*, und *BDQ* und *FHY* einander gleich, weil zwei Winkel und eine Seite in dem einen so groſs sind, als in dem andern (§. 41. 42.). Also ist *AP* = *EX* und *BQ* = *FY*. Nun sind *AP* und *BQ*, so wie *EX* und

FY, weil sie mit *CD* und *GH* gleiche Winkel machen, parallel. Es sey *AR* mit *PQ* und *EZ* mit *XY* parallel, so ist $AP = RQ$ und $EX = ZY$ (§. 43.), und folglich, weil $AP = EX$ war, $RQ = ZY$, folglich auch, weil $BQ = FY$ war, $BR = FZ$. Desgleichen sind die Winkel *ARB*, *PQB* und *EZF*, *XYF* gleich, und folglich rechte. Also sind in dem rechtwinkligen Dreieck *ARB* zwei Seiten *AB* und *RB* so grofs, als in dem rechtwinkligen Dreieck *EZF* die beiden Seiten *EZ* und *ZF*; folglich sind diese Dreiecke gleich. Mithin ist der Winkel *BAR* dem Winkel *FEZ*, und folglich auch der Winkel *BAC* dem Winkel *FEG* und der vierte Winkel *ABD* des Vierecks dem Winkel *EFH* gleich. Folglich sind nach (II.) die Vierecke gleich.

V. *Zwei Vierecke sind gleich, wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberliegende, eingeschlossene Winkel in dem einen so grofs sind als in dem andern, und wenn zugleich die Diagonal durch die beiden übrigen Winkel gröfser ist als die Seite an dem anliegenden Winkel. Ist die Diagonal kleiner, so können zwei verschiedene Vierecke die nemlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.*

Beweis. Es sey z. B. in (Fig. 45.) $AB = EF$, $CA = GE$, $DC = HG$ und $CAB = GEF$, $CDB = GHF$, so sind, wie in (I. II. und III.), die Dreiecke *ABC* und *EFG* gleich. Also ist $BC = FG$. Folglich sind in dem Dreieck *CBD* die beiden Seiten *CB* und *CD* und der eine anliegende Winkel *CDB* so grofs als in dem Dreieck *GFH* die beiden Seiten *GF* und *GH* und der anliegende Winkel *GHF*; folglich sind die Dreiecke unter der Bedingung gleich, dafs die dem gleichen Winkel gegenüberliegende Seite *CB* die gröfsere, also $CB > CD$ ist (§. 53.). Legt man also *A* in *E* und *AB* in *EF*, so fällt *AC* in *EG*, *BC* in *FG*, *BD* in *FH* und *CD* in *GH*. Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und sie sind gleich. Ist dagegen $CB < CD$, so sind mit den nemlichen Seiten *BC* und *DC* und dem nemlichen Winkel *CDB* zwei verschiedene Dreiecke möglich, nemlich *CBD* und *CKD*, wenn $CB = CK$ ist (§. 63. III.), aber auch nur zwei, also auch zwei verschiedene Vierecke *ABCD* und *PKDC*, aber nur zwei mit den nemlichen gegebenen Stücken $AB = PK$, $AC = PC$, $CD = CD$, $CAB = CPK$ und $CDB = CDK$.

VI. *Zwei Vierecke sind eiander gleich, wenn zwei zusammenstofsende Seiten und alle vier Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. In dem Dreieck *ABC* (Fig. 47.) sind die beiden Seiten *AB* und *AC* und der eingeschlossene Winkel *CAB* so grofs, als in dem Dreieck *EFG* die beiden Seiten *EF* und *EG* und der eingeschlossene Winkel *GEF*; also sind diese Dreiecke gleich (§. 40.), und folglich ist *BC*=*FG*. Desgleichen sind die Winkel *ABC*, *EFG* und *ACB*, *EGF*, folglich auch die Winkel *CBD*, *GFH* und *BCD*, *FGH* gleich. Also sind in dem Dreieck *BCD* die Seite *BC* und die beiden daran liegenden Winkel *CBD* und *BCD* so grofs, als in dem Dreieck *FGH* die Seite *FG* und die beiden daran liegenden Winkel *GFH* und *FGH*; folglich sind auch diese beiden Dreiecke gleich (§. 41.).

Legt man daher *A* in *E* und *AB* in *EF*, so fällt *B* in *F*, *AC* in *EG*, *C* in *G*, *BC* in *FG*, *BD* in *FH*, *CD* in *GH* und *D* in *H*. Also fallen alle Grenzen der beiden Vierecke in einander und die Vierecke sind gleich.

VII. *Zwei Vierecke sind gleich, wenn zwei gegenüber liegende Seiten und alle vier Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern, die beiden übrigen Seiten aber nicht parallel sind. Sind die nicht gegebenen Seiten parallel, so sind mit den nemlichen gegebenen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vierecke möglich.*

Beweis. Es sey in (Fig. 48. I. II. III.) *AB* nicht mit *CD* parallel, so wird erst, wie in (IV.), bewiesen, dafs die rechtwinkligen Dreiecke *ACP*, *EGX* und *BDQ*, *FHY* einander gleich, desgleichen, dafs, wenn *AR* mit *PQ* und *EZ* mit *XY* parallel ist, *BR*=*FZ* ist. Nun sind, wegen der Gleichheit der Dreiecke *BDQ* und *FHY*, die Winkel *QBD* und *YFH*, also weil *B*=*F* seyn soll, auch die Winkel *ABR* und *EFZ* gleich. Also sind in dem rechtwinkligen Dreieck *ABR* die Winkel und die eine Seite *BR* so grofs, als in dem Dreieck *EFZ* die Winkel und die Seite *FZ*; also sind die Dreiecke gleich (§. 41. 42.), und folglich ist *AB*=*EF*. Also sind nunmehr in dem Viereck *ABCD* die drei Seiten *CA*, *AB*, *BD* und die beiden eingeschlossenen Winkel so grofs, als in dem Viereck *EFGH* die drei Seiten *GE*, *EF*, *FH* mit den eingeschlossenen Winkeln. Also sind nach (II.) die beiden Vierecke gleich.

Der Beweis findet nicht Statt, wenn *AB* mit *CD* parallel ist; denn alsdann ist *AP*=*RQ*, also *BR*=o. Das rechtwinklige Dreieck *ABR* findet also alsdann nicht Statt, sondern ist eine blofse Linie *AR*, aus welcher sich von der Länge der Seiten *AB* und *EF* nicht urtheilen läfst. Die Länge der Seiten *AB* und *CD* ist also alsdann willkührlich, und es sind mit den nem-

lichen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vierecke möglich.

77.

Anmerkung. Zusammengenommen also sind zwei Vierecke gleich, wenn folgende Stücke in dem einen so grofs sind, als in dem andern:

1) *alle vier Seiten und ein Winkel* (§. 76. I.),
2) *drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel* (§. 76. II.),
3) *drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel; bedingungsweise* (§. 76. III.),
4) *drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel* (§. 76. IV.),
5) *drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberliegende, eingeschlossene Winkel* (§. 76. V.),
6) *zwei zusammenstofsende Seiten und alle Winkel* (§. 76. VI.)
7) *zwei gegenüberliegende Seiten und alle Winkel; bedingungsweise* (§. 76. VII.),

Mehr Fälle mit wenigstens zwei Seiten sind, wie leicht zu sehen, nicht möglich.

Wenn aber blofs eine Seite nebst allen Winkeln in einem Viereck so grofs ist, als in einem andern, so sind die Vierecke nicht nothwendig gleich, sondern es sind unzählige Vierecke mit der nemlichen einen Seite und den nemlichen vier Winkeln möglich. Wenn z. B. *EF*, *GH* etc. (Fig. 49.) beliebige Parallelen mit *BD* sind, so haben alle die verschiedenen Vierecke *ABCD*, *AECF* *AGCH* etc. die nemliche eine Seite *AC* und die nemlichen vier Winkel, und dergleichen Vierecke sind so viele als Parallelen mit *BD*, also unzählige möglich.

Es sind also überhaupt nicht mehr als die obigen sieben Fälle gleicher Vierecke möglich, und die gleichen Stücke sind die bestimmenden Stücke für das Viereck. Sie sind diejenigen Stücke, die nicht von einander abhängen, sondern willkührlich sind: wohl aber hängen von ihnen die übrigen Stücke ab.

Es ist zu bemerken, dafs alle sieben Sätze auch gelten, wenn die Vierecke einspringende und überspringende Winkel haben: blofs in dem vierten Falle giebt es noch ein Viereck mit überspringenden Winkeln, welches, mit den nemlichen Bestimmungs Stücken, einem Vierecke mit nicht überspringenden Win-

keln gleich seyn kann, und umgekehrt. Wir übergehen hier, um den Raum zu schonen, die Ausdehnung der Sätze auf andere als convexe Vierecke.

78.

Erklärung. *Wenn zwei gegenüber liegende Seiten eines Vierecks parallel sind, so heifst das Viereck* **Trapez**; *sind auch die andern beiden gegenüberliegenden Seiten parallel*, **Parallelogramm** *oder* **Rhombus**; *sind die zusammenstofsenden Seiten eines Parallelogramms gleich*, **Rhomboïd** *oder* **Raute**; *sind die vier Winkel eines Parallelogramms gleich, also* **rechte**, *(weil die Summe der vier innern Winkel eines Vierecks gleich* $(4-2).2\varrho = 4\varrho$ *ist (§. 37.))* **Rechteck,** *und sind die zusammenstofsenden Seiten eines Rechtecks gleich*, **Quadrat**.

79.

Lehrsatz. *In einem Trapez sind die Summen je zweier Winkel an nicht parallelen Seiten gleich der Summe zweier rechten.*

Beweis. Diese Winkel BAC und ACD (Fig. 50. I. und II.) oder ABD und CDB sind die innern Gegen-Winkel an den Parallelen AB und CD. Also ist ihre Summe gleich zwei rechten (§. 21.).

80.

Lehrsatz. I. *Zwei Trapeze sind gleich, wenn alle vier Seiten in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. Wenn AC, BD und EG, FH (Fig. 50. I. II.) die nicht parallelen Seiten zweier Trapeze $ABCD$ und $EFGH$ sind, welche die nemlichen vier Seiten haben, so fallen AP und EQ, wenn AP mit BD und EQ mit FH parallel sind, nicht in AC und EG, weil BD nicht mit AC, und FH nicht mit EG parallel seyn sollen. Die graden Linien AP und EQ schneiden aber die Seiten CD und GH nothwendig, weil die Summen der Winkel BAC, DCA und FEG, HGE gleich der Summe zweier rechten (§. 79.), also die Summen der Winkel CAP, PCA und GEQ, QGE kleiner als die Summe zweier rechten sind (§. 22.). Also sind ACP und EGQ Dreiecke. Die drei Seiten dieser Dreiecke sind gleich; denn es ist nach der Voraussetzung $AC = EG$, ferner, weil Parallelen von einander gleich lange Stücke abschneiden (§. 43.), $AP = BD$, $EQ = FH$, also, weil nach der Voraussetzung

$BD = FH$ ist, $AP = EQ$, desgleichen $AB = PD$, $EF = QH$, also, weil nach der Voraussetzung $AB = EF$ ist, $PD = QH$, folglich auch, weil nach der Voraussetzung $CD = GH$ ist, $CP = GQ$ Dieserhalb sind die Dreiecke ACP und EGQ gleich (§. 52.). Legt man also C in G, und CD in GH, so fällt D in H, weil $CD = GH$, und P in Q, weil $CP = GQ$, desgleichen AC in EG und A in E, weil die Dreiecke ACP und EGQ gleich sind; also auch die Parallele AB in die Parallele EF, und B in F, weil $AB = EF$ seyn soll. Also auch BD in FH. Folglich fallen alle Grenzen der beiden Trapeze in einander, und die Trapeze sind gleich.

II. *Zwei Trapeze sind gleich, wenn die beiden parallelen und eine nicht parallele Seite, nebst einem der vier Winkel, in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. Es sey in (Fig. 50. I. und II.) $AB = EF$, $CD = GH$ und $AC = EG$.

Ist nun der eine gleiche Winkel einer der eingeschlossenen, z. B. $A = E$ oder $C = G$, so ist auch der andere eingeschlossene Winkel in dem einen Trapeze so grofs, als in dem andern, weil die Summe der beiden eingeschlossenen Winkel gleich der Summe zweierrechten ist (§. 79.). Also sind die Vierecke nach (§. 76. II.) gleich.

Ist der eine gleiche Winkel einer der anliegenden, z. B. $B = F$ oder $D = H$, so ist wiederum der andere anliegende Winkel in dem einen Trapez so grofs als in dem andern, weil die Summe der beiden anliegenden Winkel gleich der Summe zweier rechten ist (§. 79.). Also sind die Vierecke, nach (§. 76. IV.), ebenfalls gleich.

III. *Zwei Trapeze sind gleich, wenn die beiden nichtparallelen und eine parallele Seite, nebst einem der vier Winkel, in dem einen so grofs sind, als in dem andern, und zugleich, die Diagonal an zwei gegebenen Seiten gröfser ist, als die dritte gegebene Seite. Ist die Diagonal kleiner, so können zwei verschiedene Trapeze die nemlichen Seiten und Winkel haben, aber nur zwei.*

Beweis. Es sey in (Fig. 50. I und II.) $AB = EF$, $AC = EG$ und $BD = FH$. Es ist gleich, welcher von den vier Winkeln in der einen Figur so grofs ist, als in der andern, weil mit jedem zugleich der Winkel an der andern Parallele ebenfalls gleich ist, indem je zwei an den Parallelen liegende Winkel zusammen zwei rechte sind (§. 79). Gesetzt, es sey $A = E$, so ist zugleich $C = G$, und umgekehrt. Ist $B = F$, so ist zugleich $D = H$ und umgekehrt. Immer sind, nächst den drei Sei-

ten, ein eingeschlossener und ein anliegender Winkel in dem einen Trapez so grofs, als in dem andern. Also folgt der Satz aus (§. 76. III.).

IV. *Zwei Trapeze sind gleich, wenn zwei Seiten, die nicht-parallelen ausgenommen, und zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechte ist, in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. Wenn nemlich zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechte ist, in dem einen Trapez so grofs sind, als in dem andern, so sind es auch die beiden übrigen Winkel; denn sie sind die Supplemente der ersten (§. 79.). Z. B. wenn in (Fig. 50. I u. II.) $A = E$, $D = H$ ist, so ist auch $B = F$, $C = G$, weil $A + C = E + G = 2\varrho$ und $B + D = F + H = 2\varrho$ ist (§. 79.). Also sind immer, nächst den beiden Seiten, alle vier Winkel in dem einen Trapez so grofs, als in dem andern, folglich sind die Vierecke, nach (§. 76. V und VI.) gleich.

81.

Anmerkung. Zusammengenommen also sind zwei Trapeze einander gleich, wenn folgende Stücke in dem einen so grofs sind, als in dem andern:

1) Alle vier Seiten (§. 80. I.).

2) Zwei parallele und eine nicht-parallele Seite, nebst einem Winkel (§. 80. II.).

3) Zwei nicht-parallele und eine parallele Seite, nebst einem Winkel; bedingungsweise (§. 80. III.).

4) Zwei Seiten, die nicht-parallelen ausgenommen, und zwei Winkel, deren Summe nicht zwei rechten gleich ist (§. 80. IV.).

Mehr Fälle mit wenigstens zwei Seiten sind, wie leicht zu sehen, nicht möglich. Wenn blofs eine Seite, nebst allen Winkeln, in einem Trapez so grofs ist, als in einem andern, so sind die Trapeze nicht nothwendig gleich, eben so wenig, wie andere Vierecke; aus dem Grunde (§. 77.).

Es sind also überhaupt nicht mehr, als die obigen vier Fälle der Gleichheit von Trapezen möglich, und die gleichen Stücke sind die Bestimmungsstücke von Trapezen. Man kann also die obigen Sätze auch wie folgt ausdrücken.

1) Mit den nemlichen vier Seiten ist nur ein Trapez möglich.

2) Mit den nemlichen zwei parallelen und einer nicht-parallelen Seite, nebst einem Winkel, ist nur ein Trapez möglich.

3) Mit den nemlichen zwei nicht-parallelen und einer parallelen Seite ist nur ein Trapez möglich, wenn die Diagonal an zwei gegebenen Seiten größer ist, als die dritte gegebene Seite. Ist die Diagonal kleiner, so sind nur zwei Trapeze möglich.

4) Mit den nemlichen zwei Seiten, die nicht-parallelen ausgenommen, und zwei Winkeln, deren Summe nicht zwei rechten gleich ist, ist nur ein Trapez möglich.

82.

Lehrsatz. I. *In einem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten gleich, und Vierecke, deren gegenüber liegende Seiten gleich sind, sind Parallelogramme.*

Beweis. Die gegenüber liegenden Seiten von Parallelogrammen sind parallel (§. 78.), und Parallelen schneiden von einander gleich lange Stücke ab (§. 45.), die abgeschnittenen Stücke aber sind die Seiten des Parallelogramms; also sind die gegenüber liegenden Seiten von Parallelogrammen gleich lang; welches das Erste war.

Sodann sind, wenn (Fig. 51.), umgekehrt, $AB = CD$ und $AC = BD$ vorausgesetzt wird, in dem Dreiecke ABC alle drei Seiten so groſs, als in dem Dreiecke DBC, und folglich sind die Dreiecke gleich (§. 52.); mithin sind auch die Winkel A und D des Vierecks gleich. Eben so sind die Dreiecke ABD und ACD, und folglich die Winkel des Vierecks B und C gleich; also ist $A + B = C + D$ und $A + C = B + D$, folglich, weil $A + B + C + D = 4\varrho$ ist, $A + B = C + D = 2\varrho$ und $A + C = B + D = 2\varrho$. Folglich sind AB, CD und AC, BD parallel und das Viereck ist ein Parallelogramm; welches das Zweite war.

II. *In einem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Winkel gleich, und ein Viereck, in welchem die gegenüber liegenden Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm.*

Beweis. Z. B. die Summe der innern Gegenwinkel ACD und BDC zwischen den Parallelen AC und BD (Fig. 51.) und der Grundlinie CD ist der Summe von zwei rechten gleich (Fig. 21. I.). Eben so die Summe der innern Gegenwinkel DCA und CAB; also ist $ACD + BDC = ACD + CAB$, folglich $BDC = CAB$. Aus gleichem Grunde sind die gegenüber liegenden Winkel ACD und ABD gleich; welches das Erste war.

Wenn umgekehrt $A=D$ und $B=C$ vorausgesetzt wird, so ist $A+B=C+D$ und $A+C=B+D$, woraus wie in (I.) folgt, dafs AB mit CD und AC mit BD parallel, also das Viereck ein Parallelogramm ist; welches das Zweite war.

III. *In einem Parallelogramme halbiren einander die Diagonalen, und Vierecke, deren Diagonalen sich halbiren, sind Parallelogramme.*

Beweis. Da in einem Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten gleich sind (I.), so sind in den Dreiecken AEB und CED, die Seiten AB und CD, desgleichen die anliegenden Winkel, nemlich an den Parallelen AB und CD die Wechselswinkel BAE, EDC und ABE, ECD gleich. Also sind die Dreiecke AEB und CED gleich (§. 41.). Also ist $AE=ED$ und $CE=EB$. Folglich halbiren sich die Diagonalen; welches das Erste war.

Wird $AE=ED$ und $CE=EB$ vorausgesetzt, so sind z. B. in dem Dreiecke AEB die beiden Seiten AE und EB, nebst dem Winkel AEB, so grofs, als in dem Dreiecke CED die beiden Seiten ED und CE, nebst dem Scheitelwinkel CED; also sind die Dreiecke gleich (§. 40.), und es ist $AB=CD$. Eben so wird aus den Dreiecken AEC und BED bewiesen, dafs $AC=BD$ ist; also ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm (I.); welches das Zweite war.

IV. *Hat ein Parallelogramm vier gleiche Seiten, und ist folglich ein Rhomboïd, so halbiren sich nicht allein die Diagonalen, sondern schneiden sich unter rechten Winkeln; und umgekehrt: Vierecke, deren Diagonalen sich halbiren, und zugleich unter rechten Winkeln schneiden, sind Rhomboïden.*

Beweis. Denn wenn noch $CD=DB$ ist (Fig. 51.), so sind in dem Dreieck CED alle drei Seiten so grofs, als in dem Dreieck BED, weil zu Folge (III.) für jedes Parallelogramm $CE=EB$, ED aber sich selbst gleich ist. Also sind die Dreiecke CED und BED gleich (§. 52.) und folglich sind die Neben-Winkel CED und BED rechte: eben so die Winkel CEA und BEA; welches das Erste war.

Wenn $CE=EB$, $AE=DE$, und dafs um E rechte Winkel liegen sollen, vorausgesetzt wird, so sind in dem Dreieck CED die beiden Seiten CE und DE, nebst dem eingeschlossenen Winkel CED, so grofs, als in dem Dreiecke BED die beiden Seiten BE und ED, nebst dem

eingeschlossenen Winkel BED; folglich sind die Dreiecke gleich (§. 40.) und folglich ist $CD = BD$. Eben so wird an den Dreiecken CED und AEC bewiesen, daſs $DC = AC$ und an den Dreiecken CEA und BEA, daſs $AC = BA$ ist. Also ist $AB = BD = DC = CA$, und das Viereck hat vier gleiche Seiten und ist folglich ein Parallelogramm mit gleichen Seiten, oder ein **Rhomboïd**; welches das **Zweite** war.

83.

Lehrsatz. Parallelogramme sind gleich, wenn zwei zusammenstoſsende Seiten und irgend ein Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern.

Beweis. Die gegenüber liegenden Seiten eines Parallelogramms sind einander gleich (§. 82. I.), folglich sind alle vier Seiten in dem einem Parallelogramme so groſs, als in dem andern, nebst einem Winkel. Also sind die Parallelogramme gleich (§. 76. I.).

84.

Zusätze. I. **Rechtecke** *sind gleich, wenn zwei zusammenstoſsende Seiten in dem einen so groſs sind, als in dem andern.*

Denn Rechtecke sind Parallelogramme und von den Winkeln wird vorausgesetzt, daſs sie rechte sind.

II. *Quadrate sind gleich, wenn eine Seite in dem einen so groſs ist, als in dem andern.*

Denn Quadrate sind Rechtecke, von deren Seiten vorausgesetzt wird, daſs sie gleich, und von den Winkeln, daſs sie rechte sind.

85.

Anmerkung. Alles, was von **Parallelogrammen** gilt, gilt auch von **Rhomboïden**, **Rechtecken** und **Quadraten**, und was von **Rhomboïden** gilt, gilt auch von **Quadraten**, aber **nicht umgekehrt**; denn alle Rhomboïden, Rechtecke und Quadrate, sind Parallelogramme, und alle Quadrate Rhomboïden, aber nicht umgekehrt.

Von der Centricität der Vierecke.

86.

Lehrsatz. I. *In Vierecken, deren* **Ecken centrisch** *sind, ist die Summe gegenüberliegender* **Winkel**, *gleich der Summe von zwei rechten.*

Z.

Z. B. wenn in dem Viereck $ABCD$ (Fig. 52.) $AM = BM = CM = DM$ ist, so ist $A + C = 2\varrho$ und $B + D = 2\varrho$.

Erster Beweis. Die vier Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA sind um M gleichschenklig, folglich sind die den gleichen Schenkeln gegenüber liegenden Winkel gleich (§. 44. I.). Also ist

$$a = b,\ \alpha = \delta,\ \gamma = d,\ c = \beta$$

und folglich auch

$$\alpha + a + \gamma + c = \beta + b + \delta + d$$

und weil $\alpha + a = A$, $\beta + b = B$, $\gamma + c = C$, $\delta + d = D$ ist,

$$A + C = B + D.$$

Nun ist $A + C + B + D = 4\varrho$, also ist $A + C + A + C = 4\varrho$, oder $2(A + C) = 4\varrho$, oder $A + C = 2\varrho$. Eben so $B + D = 2\varrho$.

Zweiter Beweis. Da die Ecken A, B, C und D einen und denselben Mittel-Punct M haben sollen, so ist M auch der Mittel-Punct je dreier Ecken, also der gemeinschaftliche Mittel-Punct der Ecken der vier Dreiecke ABC, ADC, DAB, DCB. Nun ist aber der Winkel eines Dreiecks, einer beliebigen Seite gegenüber, halb so grofs, als der Winkel, der nemlichen Seite gegenüber, am Eck-Mittel-Puncte (§. 68. I.); also ist der der Seite AC des Dreiecks ADC gegenüber liegende Winkel ADC halb so grofs, als der Winkel AMC nach D zu, desgleichen der Winkel ABC, im Dreiecke ABC, halb so grofs, als der Winkel AMC nach B zu. Die in dem Viereck gegenüber liegenden Winkel ADC und ABC sind also zusammen halb so grofs, als die Winkel um M, folglich halb so grofs als vier rechte, also gleich zwei rechten. Eben so wird bewiesen, dafs die Winkel DAB und BCD zusammen gleich zwei rechten sind; wie oben.

II. *Wenn die Summe zweier gegenüber liegender Winkel eines Vierecks gleich der Summe von zwei rechten ist, so ist das Viereck centrisch nach den Ecken.*

Z. B. wenn in (Fig. 52.) $A + C = 2\varrho$, oder $B + D = 2\varrho$, so ist $AM = BM = CM = DM$.

Erster Beweis. Es sey M der Mittel-Punct der Ecken des Dreiecks ADC, so ist $AM = DM = CM$, folglich ist in den gleichschenkligen Dreiecken AMD und CMD,

$$a = \delta \text{ und } d = \gamma \text{ (§. 44. I.)}.$$

Nun wird vorausgesetzt $A + C = 2\varrho$, oder weil $A + C + B + D = 4\varrho$ ist, $A + C = B + D$, das heifst,

$$a + \alpha + c + \gamma = b + \beta + d + \delta,$$

also mufs, weil $a = \delta$, $d' = \gamma$ war,

$$\delta + \alpha + c + d = b + \beta + d + \delta, \text{ oder}$$
$$\alpha + c = b + \beta$$

seyn. Gesetzt nun BM wäre kleiner als AM, also auch kleiner als CM, weil $CM = AM$ ist, so wäre $b > \alpha$ und $\beta > c$ (§. 46. I.), also wäre nicht $b + \beta = \alpha + c$, sondern $b + \beta > \alpha + c$. Es kann also BM nicht kleiner als AM oder CM seyn. Gesetzt, BM wäre gröfser als AM, so wäre $b < \alpha$ und $\beta < c$ (§. 46. I.), also wäre ebenfalls nicht $b + \beta = \alpha + c$, sondern $b + \beta < \alpha + c$. Es kann also BM auch nicht gröfser als AM oder CM seyn; folglich ist BM nothwendig gleich AM und CM, und folglich ist

$$AM = BM = CM = DM.$$

Zweiter Beweis. Der Mittel-Punct des Dreiecks ADC sey wie vorhin M, so ist der der Seite AC gegenüber liegende Winkel ADC halb so grofs, als der Winkel AMC am Mittel-Puncte, nach D zu, der nemlichen Seite gegenüber (§. 68. I.), oder $AMC = 2D$. Nun ist der Winkel AMC nach B zu gleich dem, was den vorigen zu vier rechten ergänzt, also ist AMC, nach B zu, gleich $4\varrho - 2D$. Aber nach der Voraussetzung ist $B + D = 2\varrho$, also $B = 2\varrho - D$, folglich ist B halb so grofs, als der Winkel AMC zwischen den gleichen Schenkeln AM und CM, der nemlichen Seite AC gegenüber, welcher B gegenüber liegt. Also ist B auch der Mittel-Punct des Dreiecks ABC (§. 68. II.); und folglich ist $AM = BM = CM = DM$.

87.

Lehrsatz. In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Winkel zwischen der einen Diagonal und den anliegenden Seiten den Winkeln zwischen der andern Diagonal und den den vorigen gegenüber liegenden Seiten gleich.

Z. B. wenn das Viereck $ABCD$ (Fig. 55.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$\alpha = a, \ \beta = b, \ \gamma = c, \ \delta = d.$$

Beweis. Die Dreiecke ABC und ABD z. B. haben einerlei Mittel-Punct, weil alle vier Puncte A, B, C, D einerlei Mittel-Punct haben sollen. Also ist in dem Dreieck ABC der Winkel C, oder α dem Winkel D, oder a über der nemlichen Seite AB gleich (§. 70. II.). Eben so wird die Gleichheit der übrigen Winkel bewiesen.

88.

Lehrsatz. I. *Wenn die Seiten eines Vierecks gleich weit von einem und demselben Puncte entfernt sind, also das Viereck centrisch nach den Seiten ist, so*

sind die Summen gegenüber liegender Seiten einander gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 54.) die Perpendikel *ME*, *MF*, *MG*, *MH* auf die Seiten des Vierecks *ABCD* einander gleich sind, so ist $AB + CD = BC + DA$.

Beweis. Da bei *E*, *F*, *G* und *H* rechte Winkel sind, so sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke *BME* und *BMF*, mit den zwei gleichen Seiten $BM = BM$, $EM = FM$ gleich (§. 54. II.), folglich ist $BE = BF$. Eben so ist $CF = CG$, $DG = DH$ und $AH = AE$.

Also ist zusammen genommen

$$BE + AE + CG + DG = BF + CF + AH + DH,$$

oder, weil $BE + AE = AB$, $CG + DG = DC$, $BF + CF = BC$ und $AH + DH = DA$ ist,

$$AB + DC = BC + DA.$$

II. *Wenn die Summen der gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks einander gleich sind, so ist das Viereck centrisch nach den Seiten.*

Z. B. wenn in (Fig. 54.) $AB + DC = BC + DA$ ist, so sind die Perpendikel *ME*, *MF*, *MG*, *MH* auf die Seiten des Vierecks, einander gleich.

Beweis. Die grade Linie *BM* halbire den Winkel *B* und die grade Linie *CM* den Winkel *C*, so schneiden sich *BM* und *CM* nothwendig, an derjenigen Seite von *BC*, an welcher *AB* und *DC* liegen, z. B. in *M*, weil $ABC + DCB$ kleiner, als vier rechte ist, und folglich die Hälften *MBC* und *MCB* kleiner sind, als zwei rechte; (§. 22. I.). Wenn nun *ME*, *MF* und *MG* Perpendikel aus *M* auf *AB*, *BC* und *CD* sind, so ist $ME = MF = MG$, weil jeder Punct einer graden Linie, die einen Winkel halbirt, von den Schenkeln des Winkels gleich weit entfernt ist (§. 73.); desgleichen ist $BE = BF$ und $CF = CG$, weil die rechtwinkligen Dreiecke *EMB*, *FMB* und *FMC*, *GMC*, mit zwei gleichen Seiten, gleich sind, (§. 54. II.). Also ist $BF + CF$ oder $BC = EB + GC$.

Es sey ferner *MH* auf die vierte Seite *AD* senkrecht, und, wenn es möglich, *MH* nicht gleich $ME = MF = MG$, sondern gröfser oder kleiner. Wäre *MH* gröfser, als *ME*, so wäre in dem rechtwinkligen Dreieck *AMH* die Hypothenuse eben so grofs, als in dem rechtwinkligen Dreieck *AME*, die eine Cathete *MH* aber wäre gröfser, als die Cathete *ME*: dann aber wäre die andere Cathete *HA* nothwendig kleiner als *AE* (§. 48. I.). Aus demselben Grunde wäre in den beiden rechtwinkligen

Dreiecken DMH und DMG, HD kleiner als DG; also wäre $HA+HD$ oder AD kleiner als $AE+DG$, und folglich, weil vorhin $BC=EB+GC$ war, $AD+BC$ kleiner als $AE+DG+EB+GC$, oder kleiner als $AB+DC$, welches der Voraussetzung entgegen ist. Also kann nicht MH größer seyn als $ME=MF=MG$. Eben so wird bewiesen, daſs MH nicht kleiner seyn kann, weil sonst $AD+BC$, der Voraussetzung entgegen, gröſser als $AB+DC$ seyn müſste. Also kann nur $MH=ME=MF=MG$ seyn.

89.

Lehrsatz. Die vier Puncte innerhalb und die vier Puncte auſserhalb eines beliebigen Vierecks, welche von je drei Seiten desselben, verlängert wenn es nöthig ist, gleich weit entfernt sind, liegen, jede vier, von einem und demselben Puncte gleich weit entfernt, oder sind centrisch. Wenn man also dieselben als Ecken zweier neuen Vierecke betrachtet, so sind diese neuen Vierecke centrisch nach den Ecken. Ihre Seiten stehen auf einander senkrecht.

Beweis. Es halbire die grade Linie EA (Fig. 55.) den Winkel A, und EB den Winkel B, desgleichen E_1A das Supplement A_1AB des Winkels A, und E_1B das Supplement B_2BA des Winkels B, so schneiden sich diese Linien EA, EB und E_1A, E_1B nothwendig, und die Durchschnitts-Puncte E und E_1 sind gleich weit von den drei Seiten AB, B_2BC und A_1AD entfernt (§. 74.). Eben so sind, wenn die graden Linien GD und GC die Winkel D und C und G_1D, G_1C ihre Supplemente halbiren, die Durchschnitts-Puncte G und G_1 gleich weit von den drei Seiten DC, AD und BC entfernt. Desgleichen sind die Durchschnitts-Puncte H und H_1 der Linien EA, GD und H_1A, H_1D, welche die Winkel A und D und ihre Supplemente halbiren, gleich weit von den drei Seiten AD, AB und DC, und die Durchschnitts-Puncte F und F_1 der Linien EB, GC und F_1B, F_1C, welche die Winkel B und C und ihre Supplemente halbiren, gleich weit von den drei Seiten BC, AB und DC entfernt. Es sind also die Puncte

E und E_1 von den drei Seiten DA, AB und BC
F und F_1 von den drei Seiten AB, BC und CD
G und G_1 von den drei Seiten BC, CD und DA
H und H_1 von den drei Seiten CD, DA und AB

gleich weit entfernt.

Nun sind z. B. in dem Dreiecke AEB die Winkel $EAB=\frac{1}{2}A$, $EBA=\frac{1}{2}B$, weil EA und EB die Winkel A und B halbiren; also ist AEB, oder HEF, $=2\varrho-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B$. Eben so ist $HGF=2\varrho-\frac{1}{2}D-\frac{1}{2}C$, DHA, und sein Scheitelwinkel GHE, $=2\varrho-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}D$ und BFC, oder sein Scheitelwinkel GFE, $=2\varrho-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$. Also sind die Winkel

$$HEF=2\varrho-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B$$
$$HGF=2\varrho-\tfrac{1}{2}D-\tfrac{1}{2}C$$
$$GHE=2\varrho-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}D$$
$$GFE=2\varrho-\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}C$$

folglich ist

$$HEF + HGF = 4\varrho - \tfrac{1}{2}(A+B+C+D) \text{ und}$$
$$GHE + GFE = 4\varrho - \tfrac{1}{2}(A+B+C+D),$$

oder, weil $A + B + C + D = 4\varrho$ ist,

$$HEF + HGF = GHE + GFE = 2\varrho,$$

das heifst: die Summen gegenüber liegender Winkel des Vierecks $EFGH$ sind gleich zwei rechten, und folglich ist dieses Viereck, in dessen Ecken die Puncte E, F, G, H liegen, die gleich weit von je drei Seiten des Vierecks $ABCD$ entfernt sind, zu Folge (§. 86. II.) centrisch nach den Ecken.

In dem Dreieck E_1AB ist der Winkel $E_1AB = \frac{1}{2}A_1AB = \frac{1}{2}(2\varrho - A) = \varrho - \frac{1}{2}A$ und der Winkel $E_1BA = \frac{1}{2}B_2BA = \frac{1}{2}(2\varrho - B) = \varrho - \frac{1}{2}B$. Also ist der dritte Winkel $AE_1B = 2\varrho - (\varrho - \frac{1}{2}A) - (\varrho - \frac{1}{2}B)$, oder

$$AE_1B = \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Eben so ist

$$DG_1C = \tfrac{1}{2}(D+C)$$
$$DH_1A = \tfrac{1}{2}(A+D) \text{ und}$$
$$BF_1C = \tfrac{1}{2}(B+C).$$

Nun sind H_1AE_1, E_1BF_1, F_1CG_1 und G_1DH_1 grade Linien, weil z. B. die Winkel A_1AB und A_2AD, welche von AE_1 und AH_1 halbirt werden, als Scheitel-Winkel, einander gleich sind; und so an den andern Ecken. Also ist $E_1F_1G_1H_1$ ein Viereck. In diesem Viereck sind AE_1B, DG_1C und DH_1A und BF_1C die gegenüber liegenden Winkel. Die Summen dieser gegenüber liegenden Winkel sind also, dem Obigen zu Folge,

$$AE_1B + DG_1C = \tfrac{1}{2}(A+B+C+D) = \tfrac{1}{2}.4\varrho = 2\varrho \text{ und}$$
$$DH_1A + BF_1C = \tfrac{1}{2}(A+B+C+D) = \tfrac{1}{2}.4\varrho = 2\varrho.$$

Also ist auch das Viereck $E_1F_1G_1H_1$ centrisch nach den Ecken.

Die Seiten des Vierecks $E_1F_1G_1H_1$ stehen auf den Seiten des Vierecks $EFGH$ senkrecht, denn es ist z. B.: $EAB = \frac{1}{2}A$ und $E_1AB = \frac{1}{2}(2\varrho - A) = \varrho - \frac{1}{2}A$; also $EAB + E_1AB$ und $E_1AE = \frac{1}{2}A + \varrho - \frac{1}{2}A = \varrho$. Eben so $F_1BF = \varrho$, $G_1CG = \varrho$ und $H_1DH = \varrho$.

90.

Lehrsatz. Wenn ein nach den Ecken, und ein nach den Seiten centrisches Viereck einen und denselben Mittel-Punct haben, oder centrisch sind, und die Ecken des ersten Vierecks liegen in den Seiten des andern, so sind die Winkel zwischen den Seiten der beiden Vierecke den den Seiten des erstern gegenüber liegenden Winkeln an den Diagonalen gleich.

Z. B. wenn die beiden Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ (Fig. 56.) von der beschriebenen Art sind, so sind folgende Winkel gleich

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,\ d = \delta.$$

Beweis. Der gemeinschaftliche Mittel-Punct der beiden Vierecke sey M. Der Punct M ist auch der Mittel-Punct der Ecken, z. B. des Dreiecks ADB; also ist der Winkel am Mittel-Punct AMB gleich 2α, folglich ist in dem gleichschenkligen Dreiecke AMB die Summe der beiden Winkel MAB und MBA gleich $2\varrho - 2\alpha$, also jeder derselben, da sie gleich sind (§. 44. I.), gleich $\varrho - \alpha$. Aber MAE und MBE sind rechte Winkel. Also sind die Winkel BAE und ABE, oder a, gleich $\varrho - (\varrho - \alpha) = \alpha$.

Eben so wird bewiesen, dafs $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$ ist.

Noch von der Gleichheit der Vierecke.

91.

Anmerkung. Es wurden oben nur die Seiten und Winkel eines Vierecks zu bestimmenden Stücken genommen. Aber auch die Diagonalen und die Winkel, welche sie mit den Seiten, und mit einander machen, können es seyn. Dieses giebt eine Menge von Fällen, welche alle durchzugehen der Raum nicht gestattet. Wir wollen von den vielen Fällen nur folgender zwei erwähnen, die öfter vorkommen.

92.

Lehrsatz. Zwei Vierecke sind gleich, wenn alle Seiten und eine Diagonal in dem einem so groſs sind, als in dem andern.

Beweis. Wenn z. B in (Fig. 57.) $AB = EF$, $AD = EH$ und $BD = FH$, so ist das Dreieck ABC dem Dreieck EFH gleich (§. 52.). Eben so ist das Dreieck BDC dem Dreieck FHG gleich, weil $BC = FG$, $DC = HG$ und $BD = FH$. Legt man nun das Dreieck ABD in das Dreieck EFH, so fällt auch nothwendig BD in FG, DC in HG, BC in FG und C in G. Also fallen alle Grenzen der beiden Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ in einander, und die Vierecke sind gleich.

93.

Lehrsatz. Zwei Vierecke sind gleich, wenn zwei Seiten, nebst der daran liegenden Diagonal, und die beiden Winkel an der andern Diagonal, jenen Seiten gegenüber, in dem einen Viereck so groſs sind als in dem andern, jedoch nur nothwendig dann, wenn die Vierecke nicht centrisch nach den Ecken sind.

Z. B. wenn (Fig. 58.) $AB = EF$, $AD = EH$, $BD = FH$ ist, und die Winkel ACD, EGH und ACB, EGF gleich sind, so sind die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$, in so fern sie nicht centrisch nach den Ecken sind, gleich.

Beweis. Da die drei Seiten des Dreiecks ABD den drei Seiten des Dreiecks EFH gleich seyn sollen, so sind die Dreicke gleich (§. 52.). Nun hat jedes Dreieck nur einen Mittel-Punct und nur einen Halbmesser der Ecken (§. 66.), desgleichen haben alle Dreiecke, in welchen eine Seite und der gegenüber liegende Winkel gleich groſs sind, die nemlichen Mittel-Puncte und gleiche Halbmesser der Ecken (§. 70. I.). In den Drei-

ecken ACB, EGF und ACD, EGH sind aber eine Seite, und der gegenüber liegende Winkel, nach der Voraussetzung, gleich grofs, nemlich $AB = EF$ und $ACB = EGF$, $AD = EH$ und $ACD = EGH$. Also haben die Dreiecke ACB, EGF und ACD, EGH einerlei Mittel-Puncte und gleiche Halbmesser der Ecken, wo auch ihre Scheitel liegen mögen. Sind also M und P die Eck-Mittel-Puncte der Dreiecke ACB und EGF, und N und Q die Eck-Mittel-Puncte der Dreiecke ACD und EGH, so fällt nothwendig M in P und N in Q, wenn man AB in EF und AD in EH legt; desgleichen ist $AM = BM = CM = EP = FP = GP$ und $AN = DN = CN = EQ = GQ = HQ$, wo auch die Scheitel der Dreiecke EGF und EGH liegen mögen. Nun wird vorausgesetzt, dafs die beiden Dreiecke EGF und EGH einen gemeinschaftlichen Scheitel G haben: denn die Figur $EFGH$ soll ein Viereck seyn, und sie würde, wenn die Scheitel der Dreiecke EGF und EGH nicht zusammenfielen, ein Sechseck, wie z. B. $EFG_I EG_{II} HE$ seyn. Also sind in dem Dreieck MNC die Seiten alle drei eben so grofs als in dem Dreieck PQG, denn es ist $MN = PQ$, weil M in P und N in Q fällt, und die Halbmesser MC und PG, so wie NC und QG ebenfalls gleich sind. Folglich sind die Dreiecke MNC und PQG gleich (§. 52.), und weil M in P, N in Q fällt, fällt nothwendig C in G, also BC in FG, DC in HG. Mithin fallen alle Grenzen der beiden Vierecke zusammen, und die Vierecke sind gleich.

Ist jedoch das Viereck $ABCD$ centrisch nach den Ecken, so fallen die Eck-Mittel-Puncte M und N der Dreiecke ABC und ADC, folglich auch P und Q in einander, und zwischen M, N und C, so wie zwischen P, Q und G liegt nicht mehr ein Dreieck, sondern nur eine grade Linie, welche die Lage von G nicht weiter bestimmt, so dafs also alsdann auch C aufserhalb G fallen kann. Folglich findet die Gleichheit der Vierecke nur dann Statt, wenn die Vierecke nicht centrisch sind.

94.

Anmerkung. Die Untersuchung der übrigen Fälle der Gleichheit von Vierecken, wenn die Diagonalen und die Winkel zwischen denselben und den Seiten zu bestimmenden Stücken genommen werden, gestattet der Raum nicht. *Zu bemerken ist, dafs in Allem immer fünf*

*Stücke, **mindestens aber zwei Linien**, zu Bestimmungs-Stücken genommen werden müssen, und daſs die Gleichheit der Vierecke entweder unbedingt oder bedingt, und zwar so Statt findet, daſs entweder **nur ein** oder höchstens **nur zwei** Vierecke mit den nämlichen bestimmenden Stücken möglich sind.*

β) Von den Vielecken.

Gleichheit der Vielecke.

95.

Lehrsatz. I. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf die zwei, die an jener einen Seite liegen, in dem einen so groſs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn mit Ausnahme der Seite AI (Fig. 69.) und der beiden Winkel A und I alle übrigen mit ähnlichen Buchstaben bezeichneten Seiten und Winkel in dem einen Vieleck so groſs vorausgesetzt werden, als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

Beweis. Die Dreiecke ABC und abc sind nach (§. 40.) gleich, denn es ist $AB = ab$, $BC = bc$ und $B = b$. Also sind AC und ac und die Winkel BCA und bca, und weil $C = c$ ist, auch die Winkel ACD und acd gleich. Daher sind nun ferner die Dreiecke ACD und acd gleich, und auf dieselbe Weise, weil $D = d$, die Dreiecke ADE und ade, und weil $E = e$, die Dreiecke AEF und aef, und weil $F = f$, die Dreiecke AFG und afg, und weil $G = g$, die Dreiecke AGH und agh, und weil $H = h$, die Dreiecke AHI und ahi. Also sind auch die Seiten AI und ai und die Winkel I und i, A und a gleich; folglich sind die beiden Vielecke vollständig einander gleich.

II. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und Winkel, bis auf drei Winkel, die an einander liegen, in dem einen so groſs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel A, I, H und a, i, h (Fig. 69.) alles Uebrige in dem einen Vieleck so groſs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

Beweis. Die beiden Vielecke $ABCDEFGHA$ und $abcdefgha$ sind in dem Falle (I.), denn es sind in denselben **alle Winkel, bis auf die beiden** BAH und AHG, und bis auf die dazwischen liegende Seite AH in dem einen so groſs, als in dem andern. Also

sind diese beiden Vielecke gleich, und folglich ist auch *AH* = *ah*. Mithin sind in dem Dreiecke *AHI* alle drei Seiten so grofs als in dem Dreiecke *ahi*, weil aufserdem *AI* = *ai* und *IH* = *ih* vorausgesetzt wird. Folglich sind auch die Dreiecke *AHI* und *ahi* und ihre Winkel gleich. Also sind alle Seiten und Winkel der beiden Vielecke, und folglich die Vielecke selbst gleich.

III. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und alle Winkel, bis auf drei Winkel, von welchen zwei an einander liegen, der dritte von den beiden getrennt ist, in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel *A*, *I*, *E* und *a*, *i*, *e* (Fig. 69.) alles übrige in dem einen Vieleck so grofs vorausgesetzt wird als in dem andern, so sind die Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *ABCDE*, *abcde* und *EFGHI*, *efghi* sind in dem Falle (I.), denn es sind in denselben alle Seiten bis auf eine, und alle Winkel, bis auf die beiden, die an dieser Seite liegen, in dem einen so grofs, als in dem andern, nemlich: *AB* = *ab*, *BC* = *bc*, *CD* = *cd*, *DE* = *de* und *B* = *b*, *C* = *c*, *D* = *d*, und *EF* = *ef*, *FG* = *fg*, *GH* = *gh*, *HI* = *hi* und *F* = *f*, *G* = *g*, *H* = *h*. Also sind die Vielecke gleich. Folglich ist auch *AE* = *ae* und *EI* = *ei*, desgleichen sind die Winkel *BAE* und *bae*, *DEA* und *dea*, *HIE* und *hie*, *FEI* und *fei* gleich. Da nun auf diese Weise in dem Dreieck *AEI* alle drei Seiten so grofs sind, als in dem Dreieck *aei*, so sind die Dreiecke gleich (§. 62.), und folglich sind auch die Winkel *EAI* und *eai*, *AEI* und *aei* und *EIA* und *eia*, mithin auch die Winkel des Vielecks *A*, *E* und *I* gleich. Folglich sind alle Seiten und alle Winkel des Vielecks gleich, und folglich sind die beiden Vielecke selbst gleich.

IV. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten und Winkel, bis auf drei Winkel die von einander getrennt liegen, in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die drei Winkel *C*, *E*, *I* und *c*, *e*, *i* (Fig. 59.) alles übrige in dem einem Vieleck so grofs vorausgesetzt wird als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *ABCI* und *abci*, *CDE* und *cde*, *EFGHI* und *efghi* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.). Denn ihre Seiten, bis auf eine, und ihre Winkel, bis auf zwei, an dieser einen Seite, sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Also sind die Vielecke

gleich, und folglich ist $CE = ce$, $EI = ei$ und $IC = ic$; desgleichen sind die Winkel an C, E und I gleich. Mithin sind auch die Dreiecke CEI und cei mit ihren Winkeln, folglich auch die Winkel der Vielecke C, E, I und c, e, i, mithin alle Seiten und Winkel der beiden Vielecke, und folglich die Vielecke selbst gleich.

V. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei aneinander liegende, von welchen einer an der ausgenommenen Seite liegt, in dem einen so grofs sind, als in dem andern, zugleich aber die Diagonal durch den zweiten ausgenommenen Winkel kleiner ist als die anliegende gegebene Seite. Ist die Diagonal gröfser, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln noch ein zweites verschiedenes Vieleck möglich, aber nur noch eins.*

Z. B. wenn bis auf die eine Seite DE und de (Fig. 59.) und die beiden Winkel C, D und c, d alles Uebrige in dem einen Vieleck so grofs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich, in so fern die Diagonal CE kleiner ist als CD. Ist CE gröfser als CD, so giebt es ein zweites Vieleck mit den nemlichen Seiten und Winkeln, aber nur noch eins.

Beweis. Die Vielecke $ABCEFGHIA$ und $abcefghia$ sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine CE, und alle von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Also sind diese Vielecke gleich. Folglich ist $CE = ce$, und auch der Winkel CEF ist gleich dem Winkel cef, mithin auch, weil die Vielecks-Winkel E und e gleich sind, der Winkel DEC gleich dem Winkel dec. Folglich sind in dem Dreieck CDE zwei Seiten, CE und CD, nebst dem Winkel DEC, so grofs, als in dem Dreieck cde die beiden Seiten ce und cd, nebst dem Winkel dec. Ist nun die dem Winkel DEC gegenüber liegende Seite CD von CD und CE die gröfsere, also die Diagonal CE kleiner als die Seite CD, so sind die beiden Dreiecke CDE und cde gleich (§. 63.), und folglich sind die gesammten Vielecke gleich. Ist dagegen die Diagonal CE gröfser als CD, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln ein zweites Dreieck cd_1e, wenn $cd_1 = cd$, aber n u r n o c h e i n s (§. 63. III.), also auch ein zweites Vieleck $abcd_1efghia$, aber n u r n o c h e i n s möglich, welches die nemlichen Seiten und Winkel hat, wie das Vieleck $ABCDEFGHIA$.

VI. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die an einander, aber von der ausgenommenen Seite getrennt liegen, in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die eine Seite *EF* (Fig. 59.), und die beiden Winkel *A* und *B* alles übrige in dem einen Vielecke so grofs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *BCDE*, *bcde* und *FGHIA*, *fghia* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine, *BE* beim ersten und *AF* beim zweiten, nebst den von denselben eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Folglich sind die Vielecke gleich, und folglich ist $BE = be$ und $AF = af$, desgleichen sind die Winkel *DEB*, *deb* und *GFA*, *gfa*, und folglich auch, weil die Vielecks-Winkel *E* und *F* den Winkeln *e* und *f* gleich seyn sollen, die Winkel *BEF*, *bef* und *EFA*, *efa* gleich. Also sind in dem Viereck *ABEF* die drei Seiten *FA*, *AB* und *BE*, nebst den beiden Winkeln *BEF* und *EFA* so grofs, als in dem Viereck *abef*, die drei Seiten *fa*, *ab* und *be*, nebst den beiden Winkeln *bef* und *efa*. Folglich sind die Vierecke gleich (§. 76. IV.) und folglich ist auch $EF = ef$, desgleichen $B = b$, $A = a$ mithin sind die beiden Vielecke *ABC.....I* und *abc.....i* vollständig gleich.

VII. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die von einander getrennt sind, und von welchen der eine an der ausgenommenen Seite liegt, in dem einen so grofs sind, als in dem andern, zugleich aber von den beiden Diagonalen, an der ausgenommenen Seite und durch den getrennten, ausgenommenen Winkel, diejenige durch die beiden ausgenommenen Winkel die gröfsere ist. Ist diese Diagonal die kleinere, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln noch ein zweites verschiedenes Vieleck möglich, aber* nur noch eins.

Z. B. wenn bis auf die eine Seite *AB* (Fig. 59), und die beiden Winkel *B* und *E* alles übrige in dem einem Vieleck so grofs vorausgesetzt wird, als in dem andern, zugleich aber die Diagonal *BE* gröfser ist, als die Diagonal *AE*, so sind die beiden Vielecke gleich. Ist *BE* kleiner als *AE*, so giebt es noch ein zweites Vieleck mit den nemlichen Seiten und Winkeln, aber nur noch eins.

Beweis. Die Vielecke *BCDE*, *bcde* und *EFGHIA*, *efghia* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn

alle ihre Seiten, bis auf die eine *BE* im ersten und *AE* im zweiten, sind in dem einem so groſs, als in dem andern. Also sind die Vielecke gleich. Folglich sind auch die Seiten *BE*, *be* und *AE*, *ae*, desgleichen die Winkel *EAI* und *eai*, und folglich auch, weil $A = a$, die Winkel *BAE* und *bae* gleich. Mithin sind in dem Dreiecke *ABE* zwei Seiten *BE* und *AE*, nebst dem Winkel *BAE*, so groſs, als in dem Dreieck *bae* die beiden Seiten *be* und *ae*, nebst dem Winkel *bae*. Folglich sind die Dreiecke *BAE* und *bae* gleich, in so fern *BE* gröſser ist, als *AE* (§. 53.), und folglich sind alsdann die gesammten Vielecke gleich. Ist dagegen die Diagonal *BE* kleiner, als die *AE*, so ist mit den nemlichen Seiten und Winkeln ein zweites Dreieck $b_{\prime\prime}ae$, wenn $b_{\prime\prime}e = be$, aber nur noch eins (§. 63. III.), also auch ein zweites Vieleck $ab_{\prime\prime}c_{\prime\prime}d_{\prime\prime}efghia$, aber nur noch eins möglich, welches die nemlichen Seiten und Winkel hat, wie das Vieleck *ABCDEFGHIA*.

VIII. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf eine, und alle Winkel, bis auf zwei, die von einander und von der Seite getrennt liegen, in dem einen so groſs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die eine Seite *AI* (Fig. 59.) und die beiden Winkel *D* und *G* alles übrige in dem einem Vieleck so groſs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *ABCD* und *abcd*, *DEFG* und *defg*, *GHI* und *ghi* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle ihre Seiten, bis auf die eine *AD* in dem ersten, *DG* in dem zweiten und *GI* in dem dritten, nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so groſs, als in dem andern. Also sind die Vielecke gleich. Daher ist auch $AD = ad$, $DG = dg$ und $IG = ig$, desgleichen sind die Winkel *BAD* und *bad*, *HIG* und *hig*, folglich auch, weil $A = a$ und $I = i$ seyn soll, die Winkel *DAI* und *dai*, *GIA* und *gia* gleich. Folglich sind in dem Viereck *ADGI* die drei Seiten *AD*, *DG*, *GI*, nebst den beiden anliegenden Winkeln *DAI* und *GIA*, so groſs als in dem Viereck *adgi* die drei Seiten *ad*, *dg*, *gi* und die beiden anliegenden Winkel *dai* und *gia*. Folglich sind die Vierecke *ADGI* und *adgi* gleich (§. 76. IV.), und mithin auch die gesammten Vielecke *ABC.....I* und *abc.....i*.

IX. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf zwei, die an einander liegen, und alle Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Z. B. wenn bis auf die beiden Seiten *AI* und *IH* (Fig. 59.) alles übrige in dem einen Vieleck so grofs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *ABCDEFGH* und *abcdefgh* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle Seiten, bis auf die eine *AH* und *ah*, nebst den eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Also sind diese Vielecke gleich. Folglich ist *AH* = *ah*, desgleichen sind die Winkel *BAH* und *bah*, *GHA* und *gha*, und also, weil die Vielecks-Winkel *A* = *a* und *H* = *h* seyn sollen, auch die Winkel *IAH* und *iah*, *IHA* und *iha* gleich. Folglich sind in dem Dreiecke *AHI* die eine Seite *AH*, nebst den drei Winkeln, so grofs als in dem Dreieck *ahi* die eine Seite *ah*, nebst den drei Winkeln, und folglich sind diese Dreiecke gleich (§. 41.), mithin auch die gesammten Vielecke *ABC.....I* und *abc.....i*.

X. *Zwei Vielecke sind einander gleich, wenn alle Seiten, bis auf zwei, die von einander getrennt, aber nicht parallel sind, und alle Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern. Sind die beiden ausgenommenen Seiten parallel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.*

Z. B. wenn bis auf die beiden Seiten *AI* und *DE* (Fig. 69.) alles übrige in dem einen Vieleck so grofs vorausgesetzt wird, als in dem andern, so sind die beiden Vielecke gleich.

Beweis. Die Vielecke *ABCD* und *abcde*, *EFGHI* und *efghi* sind, wie leicht zu sehen, in dem Falle (I.), denn alle Seiten, bis auf die eine, *AD* in dem ersten und *EI* in dem zweiten, nebst den davon eingeschlossenen Winkeln, sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Folglich sind diese Vielecke gleich, und folglich ist *AD* = *ad* und *EI* = *ei*. Aber auch die Winkel *BAD* und *bad*, *CDA* und *cda*, *HIE* und *hie*, *FEI* und *fei* sind gleich, folglich sind auch, weil die Vielecks-Winkel *A* und *a*, *I* und *i*, *D* und *d*, *E* und *e* gleich seyn sollen, die Winkel *DAI* und *dai*, *AIE* und *aie*, *ADE* und *ade*, *DEI* und *dei* gleich. Folglich sind in dem Viereck *ADEI* die beiden Seiten *AD* und *EI*, nebst allen vier Winkeln, so grofs, als in dem Viereck *adei* die

beiden Seiten *ad* und *ei* und alle vier Winkel. Also sind diese Vierecke gleich, in so fern die Seiten *AI* und *DE* nicht parallel sind (§. 76. VI.). Mithin auch vollständig die Vielecke *ABC.....I* und *abc.....i*. Sind die Seiten *AI* und *DE* parallel, so sind unzählige verschiedene Vierecke *ADEI* (§. 76. VI.), und folglich mit den nemlichen Seiten und den nemlichen Winkeln, unzählige verschiedene Vielecke möglich.

96.

Anmerkung. I. *Zusammengenommen also sind zwei beliebige Vielecke einander gleich, wenn bis auf*

1) *drei an einander liegende Winkel* (§. 95. II.),
2) *zwei an einander liegende und einen abgesonderten Winkel* (§. 95. III.),
3) *drei getrennte Winkel* (§. 95. IV.),
4) *zwei an einander liegende Winkel und eine Seite dazwischen* (§. 95. I.),
5) *zwei an einander liegende Winkel und eine Seite an dem einen Winkel* (§. 95. V.) (*bedingt*),
6) *zwei an einander liegende Winkel und eine davon getrennte Seite* (§. 95. VI.),
7) *zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen Winkel* (§. 95. VII.) (*bedingt*),
8) *zwei getrennte Winkel und eine davon getrennte Seite* (§. 95. VIII.),
9) *zwei an einander liegende Seiten* (§. 95. IX.),
10) *zwei getrennte Seiten* (*bedingt*) (§. 95. X.),

die Seiten und die Winkel in dem einen so grofs sind als in dem andern.

Mehr als diese zehn Fälle sind nicht möglich, weil nicht mehr als drei Winkel und nicht mehr als zwei Seiten fehlen können. Fehlen mehr Seiten oder mehr Winkel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.

II. Die gleich grofs vorausgesetzten Stücke sind wiederum die *bestimmenden Stücke* von Vielecken, welche nicht von einander abhängen, sondern willkührlich sind, von welchen aber die übrigen Stücke abhängen. Man kann also die obigen 10 Sätze auch wie folgt ausdrücken.

1. *Mit den nemlichen* n *Seiten und* n — 3 *Winkeln, wenn die fehlenden* 3 *Winkel an einander liegen, ist nur ein* n *Eck möglich.*

2. *Mit den nemlichen* n *Seiten und* n — 3 *Winkeln, wenn von den fehlenden Winkeln zwei an einander liegen, der dritte davon getrennt ist, ist* nur ein n *Eck möglich.*

3. *Mit den nemlichen* n *Seiten und* n — 3 *Winkeln, wenn die fehlenden drei Winkel von einander getrennt sind, ist* nur ein n *Eck möglich.*

4. *Mit den nemlichen* n — 1 *Seiten und den dazwischen liegenden* n — 2 *Winkeln ist* nur ein n *Eck möglich.*

5. *Mit den nemlichen* n — 1 *Seiten und* n — 2 *Winkeln, wenn die fehlenden zwei Winkel an einander liegen und einer davon an der fehlenden Seite liegt, ist* nur ein n *Eck möglich, in so fern die Diagonal durch den zweiten fehlenden Winkel kleiner ist, als die anliegende gegebene Seite. Ist die Diagonal gröſser, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln* zwei *verschiedene* n *Ecke möglich; aber* nur zwei.

6. *Mit den nemlichen* n — 1 *Seiten und* n — 2 *Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel zwar an einander, aber von der fehlenden Seite getrennt liegen, ist* nur ein n *Eck möglich.*

7. *Mit den nemlichen* n — 1 *Seiten und* n — 2 *Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel zwar von einander getrennt sind, der eine aber an der einen fehlenden Seite liegt, ist nur ein* n *Eck möglich, in so fern von den beiden Diagonalen, an der ausgenommenen Seite, und durch die getrennten ausgenommenen Winkel, diejenige durch die beiden ausgenommenen Winkel die gröſsere ist. Ist diese Diagonal die kleinere, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln* zwei *verschiedene* n *Ecke möglich; aber* nur zwei.

8. *Mit den nemlichen* n — 1 *Seiten und* n — 2 *Winkeln, wenn die beiden fehlenden Winkel von einander und von der fehlenden Seite getrennt sind, ist* nur ein n *Eck möglich.*

9. *Mit den nemlichen* n — 2 *Seiten und* n *Winkeln, wenn die beiden fehlenden Seiten an einander liegen, ist* nur ein n *Eck möglich.*

10. *Mit den nemlichen* n — 2 *Seiten und* n *Winkeln, wenn die beiden fehlenden Seiten von einander getrennt und nicht parallel sind, ist* nur ein n *Eck möglich. Sind die beiden fehlenden Seiten parallel, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.*

Die Gleichheit der Vielecke ist, wie man sieht, nur in den drei Fällen (5, 7 und 10) noch einer Bedingung unterworfen: in allen andern Fällen findet sie unbedingt Statt.

III. Man kann auch die Sätze von der Gleichheit der Vielecke, wie folgt, zusammenfassen.

A. *Mit den nemlichen* n *Seiten und* n — 3 *Winkeln, wie auch die drei fehlenden Winkel liegen mögen, an einander, oder zum Theil, oder alle getrennt, ist nur ein* n *Eck möglich.*

B. *Mit den nemlichen* n — 1 Seiten *und* n — 2 *Winkeln, wie auch die fehlende eine Seite und die fehlenden zwei Winkel liegen mögen, an einander, oder zum Theil, oder alle getrennt, ist nur ein* n *Eck möglich, ausgenommen*

α) wenn die fehlenden zwei Winkel an einander und einer davon an der fehlenden Seite liegt. Ist in diesem Falle die Diagonal durch den zweiten fehlenden Winkel grösser, als die anliegende gegebene Seite, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene n *Ecke möglich; aber nur zwei.*

β) Wenn die beiden fehlenden Winkel von einander getrennt sind, der eine davon aber an der fehlenden Seite liegt. Ist in diesem Falle von den beiden Diagonalen an der fehlenden Seite und durch die getrennten, ausgenommenen Winkel diejenige durch die beiden fehlenden Winkel die kleinere, so sind mit den nemlichen Seiten und Winkeln zwei verschiedene n *Ecke möglich; aber nur zwei.*

C. *Mit den nemlichen* n — 2 *Seiten und* n *Winkeln, wie auch die fehlenden zwei Seiten liegen mögen, an einander, ader getrennt, im letzten Falle jedoch nur dann, wenn die beiden fehlenden Seiten nicht parallel sind, ist nur ein* n *Eck möglich. Sind im zweiten Falle die beiden fehlenden Seiten parallel, so sind mit dem nemlichen übrigen Seiten und den nemlichen Winkeln unzählige verschiedene Vielecke möglich.*

Fehlen mehr als zwei Seiten, oder mehr als drei Stücke: Seiten und Winkel, oder Winkel allein, so sind mit den nemlichen übrigen Seiten und Winkeln unzählige verschiedene n *Ecke möglich.*

Die Untersuchung der Gleichheit von Vielecken mit einspringenden und überspringenden Winkeln gestattet wieder der Raum nicht.

97.

Anmerkung. So wie bei Vierecken, können auch bei Vielecken nicht blos die Seiten und die Winkel, welche sie mit einander einschliefsen, sondern auch die Sei-

Seiten und Diagonalen, oder Diagonalen allein, nebst den Winkeln, die sie mit einander machen, bestimmende Stücke seyn, welches unzählige verschiedene Fälle giebt, die sich aber, wo sie vorkommen, mit Hülfe der obigen Lehrsätze behandeln lassen.

98.

Erklärung. **Gleichliegende Seiten und Winkel** *in gleichen Figuren sollen diejenigen heifsen, welche in der einen Figur so grofs sind, als in der andern, und zwischen gleichen Seiten und gleichen Winkeln liegen.*

Gleichliegende Diagonalen *in gleichen Figuren sollen diejenigen heifsen, welche mit den Seiten, oder mit andern Diagonalen der beiden gleichen Figuren, mit welchen sie zusammenstofsen, gleiche Figuren einschliefsen, z. B. in* (Fig. 59.) *würden* IE *und* ie *gleichliegende Diagonalen seyn, wenn die Figuren gleich und* IH *und* ih, HG *und* hg, GF *und* gf, FE *und* fe *gleiche Seiten sind.*

Gleichliegende Linien überhaupt *in gleichen Figuren sollen diejenigen heifsen, welche mit den Seiten, oder Diagonalen, oder andern gleichliegenden Linien, mit welchen sie zusammenstofsen, gleiche Figuren einschliefsen, z. B. in* (Fig. 69.) *sind* PQ *und* pq *gleichliegende Linien, wenn die Figuren* ABCDQP *und* abcdqp *gleich sind.*

99.

Lehrsatz. In gleichen Vielecken sind nicht allein die gleichliegenden Seiten und Winkel, sondern auch alle gleichliegenden Diagonalen und sonst gleichliegende Linien, nebst den Winkeln, die sie mit einander und mit den Seiten der Figuren einschliefsen, gleich.

Beweis. Da alle diese Linien, nach der Voraussetzung, solche sind, die mit andern gleichliegenden Seiten, Diagonalen oder beliebigen, gleichliegenden Linien gleiche Figuren einschliefsen, so sind sie *Seiten* **gleicher Figuren**, und folglich, nebst den Winkeln, die sie mit beliebigen gleichliegenden Linien einschliefsen, gleich.

Centricität der Vielecke.

100.

Lehrsatz. In jedem Vieleck mit einer **graden** *Zahl von Seiten, welches einen* **Mittel-Punct der Ecken** *hat, ist die*

Summe des ersten, dritten, fünften etc. Winkels gleich der Summe des zweiten, vierten, sechsten etc. Winkels.

Beweis. Wenn M der Mittel-Punct der Ecken der Figur $ABCDEFGH$ (Fig. 60. I.) ist, so ist $AM = BM = CM = DM = EM = FM = GM = HM$. Also sind alle die Dreiecke AMB, BMC, CMD etc. gleichschenklig über AB, BC, CD etc., und folglich ist $\alpha = b$, $\beta = c$, $\gamma = d$, $\delta = e$, $\varepsilon = f$, $\varphi = g$, $\chi = h$, $\eta = a$.

Daraus folgt

$$a + \alpha + c + \gamma + e + \varepsilon + g + \chi$$
$$= b + \beta + d + \delta + f + \varphi + h + \eta.$$

Die über einander stehenden Winkel in diesen beiden Reihen sind gleich, und der erste Winkel a in der obern Reihe ist dem letzten η in der untern Reihe gleich. Da nun $a + \alpha = A$, $b + \beta = B$, $c + \gamma = C$ etc., so ist

$$A + C + E + G = B + D + F + H.$$

101.

Zusatz. Ist die Zahl der Seiten eines nach den Ecken centrischen Vielecks ungrade, *so ist die Summe des zweiten, vierten, sechsten etc. und desjenigen Theils vom ersten Winkel an der graden Linie nach dem Mittelpunct, welcher nach dem letzten Winkel zu liegt, gleich der Summe des übrigen Theils vom ersten Winkel und des dritten, fünften, siebenten etc. Winkels.*

I. Denn man stelle sich vor, das Vieleck habe eine Seite mehr, die aber Null ist, wodurch die Zahl der Seiten grade wird, so sind die Winkel an dieser Seite rechte. Z. B. wenn die letzte Seite AH (Fig. 60. I.) Null wäre, so wären a und η rechte Winkel, also wäre in dem Beweise von (§. 100.)

$$\varrho + \alpha + c + \gamma + e + \varepsilon + g + \chi$$
$$= b + \beta + d + \delta + f + \varphi + h + \varrho,$$

oder

$$\alpha + C + E + G = B + D + F + h.$$

II. Will man sich, wenn die Zahl der Seiten eines nach den Ecken centrischen Vielecks ungrade ist, an einem Winkel, z. B. A, eine auf den Halbmesser AM senkrechte Linie PQ (Fig. 60. II.) vorstellen, so ist, wie aus (I.) leicht zu sehen,

$$QAB + C + E + G = B + D + F + GAP.$$

102.

Lehrsatz. In jedem Vieleck mit einer graden *Zahl von Seiten, welches einen* Mittel-Punct der Seiten *hat, ist die Summe der ersten, dritten, fünften etc. Seite, gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten etc. Seite.*

Beweis. Wenn das Vieleck $ABCDEFGH$ (Fig. 61. I.) centrisch nach den Seiten und M sein Seiten-Mittel-Punct ist, so halbiren AM, BM, CM etc. die Winkel A, B, C etc. (§. 74.). Also ist $MBA_1 = MBB_1$, $MCB_1 = MCC_1$, etc. Sind nun A_1M, B_1M, C_1M, D_1M etc. Perpendikel aus M auf die Seiten, so sind die rechtwinkligen Dreiecke MBA_1 und MBB_1, MCB_1 und MCC_1 etc. gleich, weil sie eine gemeinschaftliche Seite haben und die Winkel in dem einem so groſs sind, als in dem andern. Also ist

$$BA_1 = BB_1,\ CB_1 = CC_1,\ DC_1 = DD_1,\ ED_1 = EE_1,\ FE_1 = FF_1,$$
$$GF_1 = GG_1,\ HG_1 = HH_1,\ AH_1 = AA_1.$$

Also ist auch

$$AA_1 + BA_1 + CC_1 + DC_1 + EE_1 + FE_1 + GG_1 + HG_1$$
$$= BB_1 + CB_1 + DD_1 + ED_1 + FF_1 + GF_1 + HH_1 + AH_1.$$

Die über einander stehenden Linien in diesen beiden Reihen sind gleich, und die erste Linie AA_1, in der obern Reihe, ist der letztern AH_1 in der untern gleich. Da nun $AA_1 + BA_1 = AB$, $CC_1 + DC_1 = CD$ etc., so ist

$$AB + CD + EF + GH = BC + DE + FG + HA.$$

103.

Zusatz. *Ist die Zahl der Seiten eines nach den Seiten centrischen Vielecks* ungrade, *so ist die Summe des zweiten, vierten, sechsten etc., und des ersten Theils der ersten Seite, bis an den Perpendikel aus dem Mittelpunct, gleich der Summe der dritten, fünften, siebenten etc. Seite und des zweiten Theils der ersten Seite.*

Z. B. in (Fig. 61. II.) ist

$$A_1B + CC_1 + C_1D + EE_1 + E_1A$$
$$= BB_1 + B_1C + DD_1 + D_1E + AA_1 \text{ oder}$$
$$A_1B + CD + EA = BC + DE + AA_1.$$

104.

Lehrsatz. *Nach den Ecken centrische Vielecke sind einander gleich, wenn* alle Seiten *in dem einen so grofs sind, als in dem andern.*

Beweis. Zunächst, ist der Halbmesser der beiden Vielecke gleich. Denn wäre z. B. der Halbmesser $AM = BM$ des Vielecks I. (Fig. 62.) gröfser als der Halbmesser $\alpha\mu = \beta\mu$ des Vielecks II, während $AB = \alpha\beta$ ist, so wäre nothwendig der Winkel AMB kleiner, als der Winkel $\alpha\mu\beta$. Denn, wenn PM und $\pi\mu$ Perpendikel aus M, auf AB und aus μ auf $\alpha\beta$ sind, so ist $AP = PB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\alpha\beta = \alpha\pi = \pi\beta$, weil AM, BM und $\alpha\mu$, $\beta\mu$ gleich lange schräge Linien sind, die sich von den Perpendikeln PM und $\pi\mu$ gleich weit entfernen (§. 59. III.). Also wäre in den rechtwinkligen Dreiecken PBM und $\pi\beta\mu$, sobald BM gröfser wäre, als $\beta\mu$, der Winkel $PMB < \pi\mu\beta$, denn BM wäre eine längere schräge Linie, als $\beta\mu$ aus denselben Puncten B und β des Perpendikels $BP = \beta\pi$, die also mit der Grundlinie PM einen kleineren Winkel PMB macht, als $\pi\mu\beta$ ist (§. 62. II.), folglich wäre auch, weil $AMB = 2PMB$ und $\alpha\mu\beta = 2\pi\mu\beta$ ist (§. 59. III.), $AMB < \alpha\mu\beta$. So aber würde es sich auch mit allen übrigen gleichschenkligen Dreiecken BMC, CMD etc., $\beta\mu\gamma$, $\gamma\mu\delta$ etc. verhalten. Also würde die Summe der Winkel um M kleiner seyn, als die Summe der Winkel um μ. Wäre $AM < \alpha\mu$, so würde auf dieselbe Weise die Summe der Winkel um M gröfser seyn, als die Summe der Winkel um μ. Beides ist nicht möglich, weil vielmehr die Summe der Winkel um M, wie um μ, gleich vier rechten, und also nothwendig gleich grofs ist. Also sind die Halbmesser, der beiden Vielecke nothwendig gleich.

Deshalb sind aber weiter die Dreiecke AMB, BMC, CMD etc. sämmtlich den Dreiecken $\alpha\mu\beta$, $\beta\mu\gamma$, $\gamma\mu\delta$ etc. gleich; denn alle drei Seiten in jedem ersten, sind der Reihe nach, so grofs, als die drei

Seiten in jedem andern. Also sind auch die Winkel ABM und $\alpha\beta\mu$, MBC und $\mu\beta\gamma$ etc. folglich die Winkel B und β, C und γ etc. gleich. Mithin sind alle Seiten und alle Winkel in den beiden Vielecken gleich, und folglich sind die Vielecke selbst gleich.

105.

Lehrsatz. Nach den Ecken centrische Vielecke, in deren einer Seite der Mittelpunct liegt, sind einander gleich, wenn alle Seiten bis auf diese eine, in dem einen so grofs vorausgesetzt werden, als in dem andern.

Beweis. Wie in (§. 104.) wird gezeigt, dafs, wenn die Halbmesser der beiden Vielecke I. und II. (Fig. 63.) ungleich wären, die Winkel AMB und $\alpha\mu\beta$, BMC und $\beta\mu\gamma$ etc. und folglich ihre Summen nicht gleich seyn könnten. Gleichwohl sind diese Summen in beiden Vielecken gleich zwei rechten. Also können die Halbmesser nicht ungleich seyn. Deshalb ist $AM = ME = \alpha\mu = \mu\epsilon$, und folglich $AE = \alpha\epsilon$. Also sind in den beiden centrischen Vielecken I. und II. alle Seiten ohne Ausnahme gleich, und folglich sind die Vielecke selbst einander gleich.

106.

Lehrsatz. I. *Wenn der Mittel-Punct eines nach den Ecken centrischen Vielecks in einer Seite der Figur liegt, so schliefsen die graden Linien aus jeder Ecke der Figur nach den Enden der Seite, in welcher der Mittel-Punct liegt, rechte Winkel ein.*

Z. B. wenn in (Fig. 64.) $AM = BM = CM = DM = EM = FM$ ist, so sind ACB, ADB, AEB, AFB rechte Winkel.

Beweis. Da nach der Voraussetzung $MA = MB = MC = MD = ME = MF$ ist, so ist der Mittel-Punct der Ecken M des Vielecks $ABCDEF$ auch zugleich der Mittel-Punct der Ecken aller der Dreiecke ABC, ABD, ABE, ABF. Und da der Mittel-Punct in einer Seite dieser Dreiecke liegt, so sind die Winkel ACB, ADB, AEB, AFB, der nemlichen Seite gegenüber, rechte (§. 69. I.).

II. *Wenn die graden Linien aus zwei auf einander folgenden Ecken eines Vielecks nach jeder andern Ecke rechte Winkel machen, so ist das Vieleck centrisch nach den Ecken und sein Mittel-Punct liegt in der Mitte der gemeinschaftlichen Grundlinie der an den Ecken rechtwinkligen Dreiecke.*

Beweis. Wenn AB (Fig. 64.) die Grundlinie ist, also die Dreiecke ACB, ADB, AEB, AFB in C, D, E, F rechte Winkel haben, so haben sie sämmtlich einen gemeinschaflichen Mittel-Punct der Ecken; denn der Mittel-Punct von jedem, liegt in der Mitte der gemeinschaftlichen Grundlinie (§. 69. I.). Die Mitte der Grundlinie ist also der Mittel-Punct der Ecken des Vielecks.

Von regelmäfsigen Vielecken.

107.

Erklärung. *Wenn alle Seiten und alle Winkel eines Vielecks einander gleich sind, so heifst das Vieleck* **regelmäfsig.**

108.

Lehrsatz. I. *Regelmäſsige Vielecke sind centrisch nach den Ecken und centrisch nach den Seiten, und zwar fällt der Mittel-Punct der Ecken in den Mittel-Punct der Seiten.*

Beweis. Es sey *M* (Fig. 65.) der Mittel-Punct der Ecken des Dreiecks *ABC*, so ist *AM* = *BM* = *CM*. Wenn nun *ABC.....L* ein regelmäſsiges Vieleck ist, so ist *AB* = *BC*; also sind die drei Seiten des Dreiecks *AMB* so groſs, als die drei Seiten des Dreiecks *BMC*, folglich sind die Dreiecke gleich. Mithin ist der Winkel *MBC* gleich dem Winkel *MAB*. Nun sind aber die Dreiecke *AMB* und *BMC* gleichschenklig über *AB* und *BC*, also sind die Winkel *MAB* und *MBA* gleich; da aber *MBC* = *MAB* war, so sind auch die Winkel *MBA* und *MBC* gleich. Also halbirt die Linie *MB* den Winkel *ABC*. Nun werden die Winkel *BCD* und *ABC* gleich vorausgesetzt, und die Winkel *MCB* und *MBC* sind gleich. Also halbirt auch *MC* den Winkel *BCD*. Daher ist *MCD* = *MBC* = *MAB*, und folglich, weil *MC* = *MB* = *MA* war, und *CD* = *BC* = *AB* vorausgesetzt wird, auch das Dreieck *CMD* den Dreiecken *AMB* und *BMC* gleich. Also ist auch *DM* = *CM* = *BM* = *AM*. Eben so wird bewiesen, daſs das Dreieck *DME* dem Dreiecke *AMB* gleich, und *EM* = *AM* ist; u. s. w. Also ist überhaupt *AM* = *BM* = *CM* = *DM*...... = *LM*, das heiſst: der Punct *M*, ist der Mittel-Punct der Ecken der Figur.

Da ferner, wie bewiesen, z. B. die graden Linien *BM* und *CM*, die Vielecks-Winkel *B* und *C* halbiren, so ist *M* der Mittel-Punct der drei Linien *AB*, *BC* und *CD* (§. 74.), und eben so der drei Linien *BC*, *CD*, *DE* etc. Folglich ist der Eck-Mittel-Punct *M* auch zugleich der Mittel-Punct der Seiten des regelmäſsigen Vielecks.

II. *Vielecke sind regelmäſsig, wenn sie centrisch nach den Ecken und gleichseitig sind.*

Beweis. Denn, wenn in (Fig. 65.) *AB* = *BC* = *CD* etc., und *AM* = *BM* = *CM* etc. ist, so sind die drei Seiten der Dreiecke *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. in dem einem so groſs, als in dem andern. Also sind diese Dreiecke gleich. Desgleichen sind sie gleichschenklig über *AB*, *BC*, *CD* etc. Also sind die Winkel *A*, *B*, *C*..... doppelt so groſs, als die unter einander gleichen

Winkel *a*, *β*, *c* etc. Folglich sind die Winkel des Vielecks *A*, *B*, *C*..... einander gleich und folglich ist das Vieleck regelmäſsig.

III. *Vielecke sind regelmäſsig, wenn sie centrisch nach den Seiten und gleichwinklig sind.*

Beweis. Denn, wenn das Vieleck (Fig. 65.) centrisch nach den Seiten ist, und *M* ist der Seiten-Mittel-Punct, so halbiren die graden Linien *AM*, *BM*, *CM* etc. die Winkel *A*, *B*, *C* etc. Da nun diese Winkel gleich vorausgesetzt werden, so sind auch ihre Hälften gleich. Also sind die Dreiecke *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. gleichschenklig über *AB*, *BC*, *CD* etc. Folglich sind die Linien *AM*, *BM*, *CM* etc. gleich, und folglich auch die Dreiecke *AMB*, *BMC*, *CMD* etc., indem zwei Seiten und die Winkel in dem einen so groſs sind, als in dem andern. Also ist $AB = BC = CD$ etc., das heiſst: die Seiten des Vielecks sind gleich, und folglich ist das Vieleck regelmäſsig.

IV. *Vielecke sind regelmäſsig, wenn sie centrisch nach den Seiten und gleichseitig sind.*

Beweis. Denn, wie in (III.), halbiren die Linien *AM*, *BM*, *CM* etc. die Winkel *A*, *B*, *C* etc. Also ist z. B. $b = β$. Es wird aber $AB = BC$ vorausgesetzt und *BM* ist sich selbst gleich. Also sind die beiden Dreiecke *AMB* und *BMC* gleich. Eben so sind die Dreiecke *BMC* und *CMD*, *DME* und *EMF* etc. gleich. Also ist $AM = BM = CM$ etc., und folglich ist das Vieleck auch centrich nach den Ecken. Da es nun gleichseitig vorausgesetzt wird, so ist es zu Folge (II.) regelmäſsig.

109.

Lehrsatz. *Die Winkel am Mittelpuncte eines regelmäſsigen Vielecks, den Seiten gegenüber, sind sämmtlich einander gleich, und zwar, wenn das Vieleck* n *Seiten hat, ist jeder gleich* $\frac{4\varrho}{n}$.

Beweis. Denn in allen den Dreiecken *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. (Fig. 65.), wenn *M* der Mittel-Punct der Ecken und Seiten des Vielecks ist, sind die drei Seiten in dem einen so groſs, als in dem andern; also sind die Dreiecke, und folglich die Winkel am Mittel-Puncte *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. einander gleich. Und da so viele solcher Winkel als Seiten, also *n* gleiche Winkel vorhanden

sind die zusammen vier rechte ausmachen, so beträgt jeder $\frac{4\varrho}{n}$.

110.

Lehrsatz. Die Seiten des regelmäſsigen Sechsecks sind dem Halbmesser der Ecken gleich.

Beweis. Wenn *ABCDEF* (Fig. 66.) ein regelmäſsiges Sechseck ist, so ist z. B. $AM = BM$, und also sind die Winkel *ABM* und *BAM* einander gleich. Nun ist der Winkel $AMB = \frac{4\varrho}{6} = \frac{2\varrho}{3}$ (§. 109.); also ist die Summe der beiden Winkel *ABM* und *BAM* der Rest von 2ϱ, nemlich $2\varrho - \frac{2\varrho}{3} = \frac{4\varrho}{3}$, folglich beträgt jeder der beiden Winkel, weil sie einander gleich sind, $\frac{2\varrho}{3}$, und folglich sind in dem Dreiecke *AMB* alle drei Winkel gleich, nemlich gleich $\frac{2\varrho}{k}$; mithin auch die drei Seiten, und folglich ist $AB = AM = BM$, das heiſst: die Seiten des regelmäſsigen Sechsecks sind dem Halbmesser der Ecken gleich.

Zweiter Abschnitt.

Von der Gröſse oder dem Inhalte der Figuren in der Ebene und dem, was davon abhängt.

A. Vergleichung der Gröſse der Figuren *ohne Hülfe der Zahl*, oder *geometrisch*.

111.

Erklärung. I. *Das Perpendikel aus einer beliebigen Winkelspitze eines* Dreiecks *auf die gegenüber liegende Seite heiſst des Dreiecks* Höhe, *und die Seite, auf welcher die Höhe senkrecht steht, des Dreiecks* Grundlinie. *Jede Seite eines Dreiecks kann zur Grundlinie genommen werden; die zugehörige Höhe ist immer das Per-*

Da nun *IK* mit *GH* parallel seyn soll, so fällt *IK* in *EAF* und *EAFB* ist eine grade Linie.

Nun wird *IK* gleich *GH* vorausgesetzt. Also ist, wenn *I* in *E* fällt, *EF* = *CD*. Es wird aber auch *AB* = *CD* vorausgesetzt. Also ist *EF* = *AB*. Folglich ist, wenn man beiderseits *AF* abzieht, *EA* = *FB*. Ferner ist in den Parallelogrammen *ABCD* und *EFCD*, *AC* = *BD* und *EC* = *FD* (§. 43.). Also sind in dem Dreiecke *EAC* alle drei Seiten so grofs, als in dem Dreieck *FBD*, folglich sind diese Dreiecke gleich und folglich auch gleich grofs. Zieht man nun von dem Trapeze *EBCD* das Dreieck *EAC* ab, so bleibt das Parallelogramm *ABCD*, und zieht man von dem nemlichen Trapeze *EBCD* das gleich grofse Dreieck *FBD* ab, so bleibt das Parallelogramm *EFCD* übrig. Also sind die Parallelogramme *ABCD* und *EFCD* oder *IKGH* gleich grofs; das heifst: Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich grofs.

115.

Zusatz. I. *Jedes Parallelogramm ist so grofs, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe* (§. 114.), *denn das Rechteck ist ebenfalls ein Parallelogramm.*

II. *Parallelogramme von gleichen Grundlinien, zwischen einerlei Parallelen, sind gleich grofs* (§. 114. und 43.).

116.

Lehrsatz. *Ein Dreieck ist halb so grofs, als ein beliebiges Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.*

Beweis. Es sey *GF* (Fig. 71.) eine grade Linie durch *A*, mit der Grundlinie *BC* des Dreiecks *ABC* parallel, und *CF* sey mit *AB* parallel, so sind in dem Dreieck *ABC* die Seite *AC* nebst den beiden anliegenden Winkeln *BAC* und *BCA* so grofs, als in dem Dreieck *AFC* die Seite *AC* mit den beiden anliegenden Winkeln *ACF* und *CAF*, denn die Wechselswinkel zwischen den Parallelen bey *A* und *C* sind gleich. Also sind die beiden Dreiecke gleich, und folglich auch gleich grofs. Mithin ist das eine Dreieck *ABC* allein, halb so grofs, als das Parallelogramm *AFBC*. Aber dieses Parallelogramm ist eben so grofs, als ein beliebiges anderes Parallelogramm *DEBC* von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 114.), oder mit gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen (§. 115. II.). Also ist das Dreieck

ABC halb so grofs, als ein beliebiges Parallelogramm *DEBC* von gleicher Grundlinie und Höhe.

117.

Zusätze. I. *Ein Dreieck ist halb so grofs als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe.* Denn zu beliebigen Parallelogrammen, von gleichen Grundlinien und Höhen, gehört auch das Rechteck.

II. *Ein Dreieck, welches mit einem Parallelogramme oder Rechtecke gleiche Grundlinie hat, und dessen Spitze in der andern Parallele liegt, ist halb so grofs, als das Parallelogramm.*

III. *Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich grofs.* Denn sie sind halb so grofs, als gleiche Parallelogramme.

IV. *Dreiecke mit gleichen Grundlinien, deren Spitzen in einer Parallele mit der Grundlinie liegen, oder Dreiecke zwischen Parallelen, sind gleich grofs.* Denn sie haben gleiche Grundlinien und Höhen.

V. *Zwei Dreiecke sind gleich grofs, wenn die Grundlinie des einen der Höhe des andern, und die Höhe des ersten der Grundlinie des zweiten gleich ist.* Z. B. die beiden Dreiecke *ABC* und *ADE* (Fig. 72.) sind gleich, wenn *AE* dem Perpendikel *BP* und *AC* dem Perpendikel *DQ* gleich ist. Denn die Dreiecke sind die Hälften gleicher Rechtecke *HIAC* und *FGAE*.

VI. *Also auch Parallelogramme von beliebigen Winkeln, wie z. B.* ADKE *und* ABLC (Fig. 72.) *sind gleich grofs, wenn die Grundlinie* AE *des einen, der Höhe* BP *des andern, und die Höhe* DQ *des ersten der Grundlinie* AC *des zweiten gleich ist;* denn die Parallelogramme sind doppelt so grofs, als die Dreiecke *ABC* und *ADE;* auch sind sie von der nemlichen Gröfse wie die Rechtecke *AG* und *AI*, welche einander gleich sind, weil *AE* = *AH* und *AC* = *AF* seyn soll.

118.

Lerhsatz. I. *Gleichwinklige Parallelogramme von gleicher Höhe, sind zusammen so grofs, als ein Parallelogramm mit eben dem Winkel und eben der Höhe, dessen Grundlinie so lang ist, als die Grundlinien der einzelnen Parallelogramme zusammen.*

Beweis. Wenn z. B. die beiden Parallelogramme *AD* und *EH* (Fig. 73.) gleiche Winkel *C* = *G* und gleiche Höhen *BP* = *EQ* haben, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *BDP* und *EGQ* gleich; denn die beiden Winkel bei *D* und *P*, nebst der Seite *BP*, in dem

Dreiecke BDP, sind so grofs, als die beiden Winkel bei G und Q, und die Seite EQ in dem Dreieck EGQ, und folglich ist $EG = BD$. Legt man also EG in BD, so fallen EF und GH in grade Linien mit AB und CD; denn die Winkel bei E und G sind den Winkeln bei B und D nach der Voraussetzung gleich. Fällt nun FH in IK, so ist auch IK mit BD oder AC parallel, und folglich ist die Figur $AICK$, welche die beiden Parallelogramme AD und EH enthält, ein Parallelogramm, dessen Grundlinie CK so lang ist, als die Grundlinien der einzelnen Parallelogramme zusammen.

Eben so verhält es sich, wenn drei und mehrere gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Höhen zusammengesetzt werden.

Wenn man also die Grundlinien beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Höhen, der Kürze wegen, durch a, b, c, d..... und ihre gemeinschaftliche Höhe durch h bezeichnet, so ist

$$(a.h) + (b.h) + (c.h) + (d.h) \ldots\ldots = ((a + b + c + d \ldots\ldots) h).$$

II. *Gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind zusammen so grofs, als ein Parallelogramm von eben den Winkeln und eben der Grundlinie, dessen Höhe so grofs ist, als die Höhen der einzelnen Parallelogramme zusammen.*

Beweis. Es sey die Grundlinie GH des Parallelogramms EH (Fig 74.) der Grundlinie CD des Parallelogramms AD gleich und $G = C$, so fällt, wenn man GH in AB legt, H in B, weil $AB = CD$ ist, und GE fällt in eine grade Linie mit AC, etwa in AI; eben so $BK = FH$ in eine grade Linie mit BD. Auch ist IK, wenn EF in diese Linie fällt, mit AB und CD parallel. Also ist ID ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie mit AD und EH, welches so grofs ist, als beide zusammen. Seine Höhe aber ist gleich $AP + EQ$; denn wie in (I.) folgt, dafs die Perpendikel EQ und IR gleich sind, und wenn IRS eine grade Linie ist, so ist zwischen den Parallelen AB und CD, $RS = AP$, also die Höhe IS des Parallelogramms ID, gleich $EQ + AP$.

Eben so verhält es sich, wenn drei und mehrere gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien zusammengesetzt werden.

Wenn man also die Höhen beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Grundlinien, der Kürze wegen, durch h, i, k, l..... und ihre gemeinschaftliche Grundlinie durch a bezeichnet, so ist

$$(a.h) + (a.i) + (a.k) + (a.l) \ldots\ldots = (a(h + i + k + l \ldots\ldots)).$$

III. *Zwei gleichwinklige Parallelogramme von gleicher Höhe sind um ein Parallelogramm von eben dem Winkel und eben der Höhe unterschieden, dessen Grundlinie dem Unterschiede der Grundlinien der beiden Parallelogramme gleich ist.*

Beweis. Wenn die beiden Parallelogramme AD und EH (Fig. 73.) gleiche Winkel $C = G$ und gleiche Höhen $AR = EQ$ haben, so wird, wie in (I.), bewiesen, dafs $AC = EG$ ist. Legt man also GH in CM, so fällt, wegen der gleichen Winkel G und C, EG in AC und weil $EG = AC$ ist, E in A, also die Parallele EF in die Parallele AL. Und da FH, welches in LM fällt, mit EG parallel ist, so ist auch LM mit AC und BD parallel, und folglich LD ein Parallelogramm von dem nemlichen Winkel wie AD und EH. Dieses Parallelogramm ist der Unterschied der beiden Parallelogramme AD und EH. Seine Höhe ist ihrer Höhe und seine Grundlinie dem Unterschiede MD ihrer Grundlinien gleich.

Bezeichnet man also die Grundlinien zweier gleichwinkliger Parallelogramme, der Kürze wegen, durch a und b und ihre gemeinschaftliche Höhe durch h, so ist

$$(a.h)-(b.h)=((a-b).h).$$

IV. *Zwei gleichwinklige Parallelogramme von gleichen Grundlinien sind, nm ein Parallelogramm von eben dem Winkel und eben der Grundlinie, unterschieden, dessen Höhe dem Unterschiede der Höhen der beiden Parallelogramme gleich ist.*

Beweis. Wenn die beiden Parallelogramme AD und EH (Fig. 74.) gleiche Grundlinien $CD=GH$ und gleiche Winkel $G=C$ haben, so fällt, wenn man GH in CD und G in C legt, H in D und GE in CA, desgleichen HF in DB. Fällt nun E in L und F in M, also EF in LM, so ist LM mit CD parallel, weil EF mit GH parallel ist. Also ist $ABLM$ ein Parallelogramm. Dieses Parallelogramm, welches der Unterschied der beiden Parallelogramme AD und EH ist, hat mit ihnen gleiche Grundlinien $LM=CD=GH$ und gleiche Winkel $L=C=G$, seine Höhe AU aber ist gleich dem Unterschiede der Höhen AP und $LT=EQ$, wenn AP und LT Perpendikel auf CD sind; denn die Parallelen LM und CD schneiden von den Perpendikeln LT und AP gleich lange Stücke ab.

Bezeichnet man also die Höhen zweier beliebiger gleichwinkliger Parallelogramme, der Kürze wegen, durch h und i, und die gemeinschaftliche Grundlinie durch a, so ist

$$(a.h)-(a.i)=(a(h-i)).$$

119.

Zusätze. I. *Alle Sätze* (118.) *gelten auch von Rechtecken; denn auch Rechtecke sind Parallelogramme.*

II. *Das Quadrat über der Summe zweier beliebigen graden Linien ist so grofs als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien und des zweifachen Rechtecks unter den nemlichen Linien; und umgekehrt. Das heifst es ist z. B.*

$$[(a+b)^2]=[a^2]+[b^2]+2[a.b].$$

Denn $[(a+b)^2]$ oder $[(a+b).(a+b)]$ ist nach (§. 118. I.), so viel als $[a(a+b)]+[b(a+b)]$. Ferner ist $[a(a+b)]$ so viel als $[a^2]+[a.b]$, und $[b(a+b)]$ ist so viel als $[b.a]+[b^2]$, oder, weil $[b.a]=[a.b]$ ist (§. 117. VI.), so viel als $[a.b]+[b^2]$. Also ist $[(a+b)^2]$ so viel als $[a^2]+[a.b]+[b^2]+[a.b]$, oder so viel als $[a^2]+[b^2]+2[ab]$; welches das Erste war. Umgekehrt ist $[a^2]+[b^2]+2[ab]$ so viel als $[a.a]+[a.b]+[b.a]+[b.b]$, oder nach (§. 118. I.) so viel als $[a(a+b)]+[b(a+b)]$, oder so viel als $[(a+b)(a+b)]$ oder $[(a+b)^2]$; welches das Zweite war.

III. *Das Quadrat über dem Unterschiede zweier beliebigen graden Linien ist so grofs, als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien, weniger dem zweifachen Rechteck unter den nemlichen Linien; und umgekehrt. Das heifst, es ist z. B.*

$$[(a-b)^2]=[a^2]+[b^2]-2[a.b].$$

Denn $[(a-b)^2]$ oder $[(a-b).(a-b)]$ ist nach (§. 118. III.) so viel als $[a(a-b)]-[b(a-b)]$. Ferner ist $[a(a-b)]$ nach (§. 118. IV.) so viel als $[a^2]-[a.b]$, und $[b(a-b)]$ ist so viel als $[b.a]-[b^2]$, oder so viel als $[a.b]-[b^2]$. Also ist $[(a-b)^2]$ so viel als $[a^2]-[a.b]-([a.b]+[b^2])$, oder so viel als $[a^2]+[b^2]-2[a.b]$; wel-

ches das **Erste** war. Umgekehrt ist $[a^2] + [b^2] - 2[a.b]$ so viel als $[a.a] - [a.b] + [b.b] - [b.a]$, oder so viel als $[a.a] - [a.b] - ([b.a] - [b.b])$, oder $[a(a-b)] - [b(a-b)]$, oder $[(a-b)(a-b)]$ oder $[(a-b)^2]$; welches das **Zweite** war.

IV. *Das Rechteck unter der Summe und dem Unterschiede zweier beliebigen graden Linien, ist gleich dem Unterschiede der Quadrate der nemlichen Linie; und umgekehrt. Das heiſst es ist, z. B.*

$$[(a+b).(a-b)] = [a^2] - [b^2].$$

Denn $[(a+b)(a-b)]$ ist nach (§. 118. I.) so viel als $[a(a-b)] + [b(a-b)]$. Ferner ist $[a(a-b)]$ nach (§. 118. III.) so viel als $[a^2] - [a.b]$, und $[b(a-b)]$ so viel als $[b.a] - [b^2]$, oder $[a\,b] - [b^2]$, also ist $[(a+b)(a-b)]$ zusammen so viel als $[a^2] - [a.b] + [a.b] - [b^2]$, das heiſst, so viel als $[a^2] - [b^2]$; welches das **Erste** war.

Umgekehrt ist $[a^2] - [b^2]$ so viel als $[a^2] + [a.b] - [a.b] - [b^2]$, und dieses nach (§. 118. III.) so viel als $[a(a+b)] - [b(a+b)]$, oder so viel als $[(a-b)(a+b)]$, oder $[(a+b)(a-b)]$; welches das **Zweite** war.

V. *Summe und Unterschied von Dreiecken gleicher Höhe sind einem Dreieck von eben der Höhe gleich, dessen Grundlinie, Summe und Unterschied der Grundlinien der einzelnen Dreiecke ist.*

Denn die Dreiecke sind die Hälften beliebiger, also auch gleichwinkliger Parallelogramme, von gleichen Grundlinien und Höhen (§. 116.), von welchen der Satz Statt findet (§. 118. I. III.).

VI. *Summe und Unterschied von Dreiecken gleicher Grundlinie sind einem Dreiecke von eben der Grundlinie gleich, dessen Höhe, Summe und Unterschied der Höhen der einzelnen Dreiecke ist.*

Denn die einzelnen Dreiecke sind die Hälften beliebiger, also auch gleichwinkliger Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen (§. 116.), von welchen der Satz Statt findet (§. 118. II. IV.).

120.

Lehrsatz. *Wenn Dreiecke mit gemeinschaftlichem Scheitel, die beiden Seiten und Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms zu Grundlinien haben, so ist das Dreieck über einer der Diagonalen so groſs, als die* **Summe** *oder der* **Unterschied** *der Dreiecke über denjenigen beiden Seiten, die mit der Diagonale in einem Punct zusammen treffen, je nachdem der andere Winkel des Parallelogramms innerhalb oder auſserhalb des Dreiecks über der Diagonal fällt.*

Z. B. wenn $ABCD$ (Fig. 75.) ein **beliebiges** Parallelogramm und E ein **beliebiger** Punct ist, so ist

$$1. \begin{cases} \triangle\, ACE = \triangle\, ABE + \triangle\, ADE \\ \triangle\, DBE = \triangle\, ABE - \triangle\, CBE. \end{cases}$$

Beweis. DR, CVQ und BP sollen auf EA senkrecht, desgleichen soll BV mit EA parallel seyn. Alsdann sind die rechtwinkligen Dreiecke DRA und CVB gleich, weil $DA = CB$ ist, und die Winkel DAR und CBV gleich sind. Also ist, $CV = DR$. Nun ist wegen der Parallelen, $VQ = BP$. Also ist $CQ = BP + DR$. Aber CQ, BP und DR sind die Höhen der Dreiecke ACE, ABE und ADE über der nemlichen Grundlinie AE. Also ist das Dreieck ACE so

grofs, als die Summe der beiden Dreiecke ABE und ADE (§. 119. VI.); welches das **Erste** ist, weil der andere Winkel des Parallelogramms B **innerhalb** AEC fällt.

Es sey ferner $EBIGH$ eine grade Linie, auf welche DH, CI und AG senkrecht sind, desgleichen sey DF mit EH parallel, so sind die rechtwinkligen Dreiecke DFA und BIC gleich; denn es ist, wegen der Parallelen, $DA = BC$, und die Winkel DAF und BCI sind gleich. Also ist $AF = CI$, folglich auch, weil wegen der Parallelen $DH = FG$ ist, $AG - CI = DH$. Aber DH, AG und CI sind die Höhen der Dreiecke DBE, ABE und CBE über der nemlichen Grundlinie BE. Also ist das Dreieck DBE so grofs, als der Unterschied der beiden Dreiecke ABE und CBE (§. 119. VI.); welches das **Zweite** ist, weil der andere Winkel des Parallelogramms A **aufserhalb** DEB fällt.

121.

Lehrsatz. *Wenn grade Linien durch die Winkel-Scheitel eines Dreiecks auf den gegenüber liegenden Seiten perpendiculair sind, so sind die Rechtecke unter den Seiten nnd den Abständen der Perpendikel, um jede Ecke, gleich.*

Z. B. wenn in (Fig. 76. I. und II.), in welchen Figuren gleiche Buchstaben, gleiche Puncte bezeichnen, AS auf der Seite BC, BT auf der Seite CA und CU auf der Seite AB senkrecht steht, so ist in beiden Figuren

$$[AB.AU] = [AC.AT]$$
$$[BC.BS] = [BA.BU]$$
$$[CA.CT] = [CB.CS].$$

Beweis. ASP, BTQ und CUR (immer in beiden Figuren) sollen grade Linien und AE, BI, CF sollen **Quadrate** seyn, so sind die Seiten dieser Quadrate mit den Seiten des Dreiecks ABC und mit den Perpendikeln CU, AS und BT parallel; also sind AR, BR, BP, CP, und CQ, AQ **Rechtecke.**

Nun ist z. B. in den beiden Dreiecken AFB und ACD, $AF = AC$, $AB = AD$ und der Winkel FAB, als die Summe von BAC und einem rechten, gleich dem Winkel CAD, als einer gleichen Summe. Folglich sind die Dreiecke AFB und ACD gleich.

Das Dreieck AFB hat aber mit dem Rechteck AQ gleiche Grundlinie AF, und seine Spitze B liegt in der andern Parallele BQ. Also ist es die Hälfte des Rechtecks AQ (§. 117. II.). Das Dreieck ACD hingegen hat mit dem Rechteck AR gleiche Grundlinie AD und seine Spitze C liegt in der andern Parallele. Also ist es die Hälfte des Rechtecks AR. Die beiden Dreiecke AFB und ACD waren aber einander **gleich** und mithin auch **gleich grofs.** Also sind auch die Rechtecke AQ und AR **gleich grofs**, das heifst, es ist $[AD.AU] = [AF.AT]$, oder weil $AF = AC$ und $AD = AB$ ist,

$$[AB.AU] = [AC.AT].$$

Eben so wird bewiesen, dafs die Dreiecke EBC und ABH gleich und folglich, weil sie halb so grofs sind, als die Rechtecke BR und BP, dafs diese Rechtecke gleich grofs sind, d. h., dafs $[BH.BS] = [BE.BU]$, oder weil $BH = BC$ und $BE = BA$ ist, dafs

$$[BC.BS] = [BA.BU]$$

ist.

Desgleichen, dafs die Dreiecke ACI und BCG gleich, und folglich, weil sie halb so grofs sind, als die Rechtecke CP und CQ, dafs diese Rechtecke gleich grofs sind, d. h., dafs $[CG.CT]=[CI.CS]$, weil $CG=CA$ und $CI=CB$ ist, dafs

$$[CA.CT]=[CB.CS]$$

ist.

122.

Zusatz. Wenn das Dreieck **rechtwinklig** ist, so fallen die Perpendikel aus den Scheiteln der beiden andern Winkel auf die gegenüberstehenden Seiten in die Catheten selbst, und folglich sind die Abschnitte der Perpendikel um den **rechten** Winkel Null. Wenn z. B. der Winkel (B. Fig. 76. I. und II.) ein **rechter** ist, so fallen die Perpendikel AS und CU aus A und C, in AB und CB, wie (Fig. 76. III.), und folglich sind alsdann die Rechtecke UE und BP (Fig. 76. I. II.) Null.

Wenn also ein Dreieck rechtwinklig ist, so sind die Rechtecke unter der Hypothenuse und den Abschnitten des Perpendikels aus dem rechten Winkel auf die Hypothenuse, den Quadraten der Catheten gleich, nemlich in (Fig. 76. III.)

$$[AB.AB]=[AC.AT] \text{ und}$$
$$[BC.BC]=[CA.CT]$$

oder

$$[AB^2]=[AC.AT] \text{ und}$$
$$[BC^2]=[CA.CT]$$

oder

Quadrat AE = Rechteck AQ und
Quadrat CH = Rechteck CQ.

123.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist

1) *um einen **spitzen** Winkel die Summe der Quadrate der Seiten, wenn man davon die Rechtecke unter den Seiten und den Abständen der Perpendikel aus der gegenüber liegenden Winkelspitze von der Ecke, also weil diese Rechtecke gleich grofs sind (§. 121.), das doppelte Rechteck unter einer Seite und dem Abstande des Perpendikels **wegnimmt**;*
2) *um einen **stumpfen** Winkel die Summe der Quadrate der Seiten, wenn man denselben die nemlichen Rechtecke **hinzufügt**;*
3) *um einen **rechten** Winkel die Summe der Quadrate der Seiten selbst,*

dem Quadrate der dritten Seite gleich.

Z. B. in Fig. 76. I.) ist

$$[AB^2]+[BC^2]-[AB.BU]-[BC.BS]=[AC^2] \text{ oder}$$
$$[AB^2]+[BC^2]-2[BC.BS]=[AC^2] \text{ und}$$
$$[AB^2]+[BC^2]-2[BA.BU]=[AC^2].$$

In

In (Fig. 76. II.) ist
$[AB^2]+[BC^2]+[AB.BU]+[BC.BS]=[AC^2]$, oder
$[AB^2]+[BC^2]+2[BC.BS]=[AC^2]$, und
$[AB^2]+[BC^2]+2[BA.BU]=[AC^2]$.

In (Fig. 76. III.) ist
$$[AB^2]+[BC^2]=[AC^2].$$

Beweis. I. In (Fig. 76. I.) ist nach (§. 121.)
Rechteck AQ = Rechteck AR,
Rechteck CQ = Rechteck CP.
Also, da Rechteck AQ + Rechteck $CQ=[AC^2]$ ist,
Rechteck AR + Rechteck $CP=[AC^2]$.
Aber Rechteck $AR=[AB^2]$ — Rechteck BR,
Rechteck $CP=[BC^2]$ — Rechteck BP;
also
$[AB^2]$ — Rechteck BR + $[BC^2]$ — Rechteck $BP=[AC^2]$.
Nun ist Rechteck $BR=[BE.BU]=[AB.BU]$,
und Rechteck $BP=[BH.BS]=[BC.BS]$,
also ist
$[AB^2]+[BC^2]-[AB.BU]-[BC.BS]=[AC^2]$,
oder auch, weil nach (§. 121.) $[AB.BU]=[BC.BS]$ ist,
$[AB^2]+[BC^2]-2[BC.BS]=[AC^2]$, oder
$[AB^2]+[BC^2]-2[AB.BU]=[AC^2]$.

II. In (Fig. 76. II.) ist nach (§. 121.)
Rechteck AQ = Rechteck AR,
Rechteck CQ = Rechteck CP.
Also, da Rechteck AQ + Rechteck $CQ=[AC^2]$ ist,
Rechteck AR + Rechteck $CP=[AC^2]$.
Aber Rechteck $AR=[AB^2]$ + Rechteck BR,
Rechteck $CP=[BC^2]$ + Rechteck BP;
also
$[AB^2]$ + Rechteck BR + $[BC^2]$ + Reckteck $BP=[AC^2]$.
Nun ist Rechteck $BR=[BE.BU]=[AB.BU]$,
und Rechteck $BP=[BH.BS]=[BC.BS]$;
also ist
$[AB^2]+[BC^2]+[AB.BU]+[BC.BS]=[AC^2]$,
oder auch, weil nach (§. 121.) $[AB.BU]=[BC.BS]$,
$[AB^2]+[BC^2]+2[BC.BS]=[AC^2]$, oder
$[AB^2]+[BC^2]+2[AB.BU]=[AC^2]$.

III. In (Fig. 76. III.) ist nach (§. 122.)
$[AB^2]$ = Rechteck AQ,
$[BC^2]$ = Rechteck CQ;
also ist, weil Rechteck AQ + Rechteck $CQ=[AC^2]$,
$$[AB^2]+[BC^2]=[AC^2].$$

$$[AD^2] = [AP^2] + [DP^2] \text{ und}$$
$$[AB^2] = [AP^2] + [BP^2],$$

also, wenn man für (Fig. I.) das Quadrat der kleinern Linie AD von dem Quadrat der gröfsern AB abzieht,

$$[AB^2] - [AD]^2 = [BP^2] - [DP^2],$$

und, wenn man für (Fig. II.) das Quadrat der kleinern Linie AB von dem Quadrat der gröfsern AD abzieht,

$$[AD^2] - [AB^2] = [DP^2] - [BP^2].$$

Nun ist der Unterschied zweier Quadrate gleich dem Rechteck unter der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten (§. 119. IV.). Also ist in (Fig. I.)

$$[(AB + AD)(AB - AD)] = [(BP + DP)(BP - DP)],$$

und in (Fig. II.)

$$[(AD + AB)(AD - AB)] = [(DP + BP)(DP - BP)].$$

Es ist aber in (Fig. I.) $BP + DP$, oder $CP + DP = DC$ und $BP - DP = BD$; und in (Fig. II.) $DP + BP = BD$ und $DP - BP$, oder $DP - CP = DC$. Also ist

$$[(AB + AD)(AB - AD)] = [BD.DC] \text{ in (Fig. I.) und}$$
$$[(AD + AB)(AD - AB)] = [BD.DC] \text{ in (Fig. II.)}.$$

128.

Lehrsatz. In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen und des vierfachen Quadrats über der Entfernung der Mittel-Puncte der Diagonalen von einander.

Z. B. wenn in dem beliebigen Viereck $ABCD$ (Fig. 80.) $AG = GD$, $CF = FB$, und FG eine grade Linie ist, so ist

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= [AD^2] + [BC^2] + 4[FG^2].$$

Beweis. In dem Dreiecke ABC halbirt die grade Linie AF die Grundlinie BC, weil $CF = FB$ seyn soll; also ist nach (§. 125.)

$$[AB^2] + [CA^2] = 2[AF^2] + 2[CF^2].$$

Eben so halbirt in dem Dreieck DBC die grade Linie DF die Grundlinie CB; also ist

$$[BD^2] + [DC^2] = 2[FD^2] + 2[CF^2].$$

Beides zusammengenommen giebt

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= 2[AF^2] + 2[FD^2] + 4[CF^2],$$

oder, weil $4[CF^2] = [CB^2]$, indem $CB = 2\,CF$ ist,

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= 2[AF^2] + 2[FD^2] + [CB^2].$$

Nun halbirt die grade Linie FG in dem Dreiecke AFD die Grundlinie AD, also ist nach (§. 125.)

$$[AF^2] + [FD^2] = 2[AG^2] + 2[FG^2],$$

folglich ist

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= 4[AG^2] + 4[FG^2] + [CB^2],$$

oder, weil $4[AG^2] = AD^2$, indem $AD = 2\,AG$ ist,

$$[AB^2 + BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= [AD^2] + [BC^2] + 4[FG^2];$$

wie behauptet wurde.

129.

Zusätze. *Aus* (§. 128.) *folgt* I., *dass in einem* P a r a l l e l o g r a m m e *die Summe der Quadrate über den vier Seiten gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen.*

Denn, wenn $ABCD$ (Fig. 80.) ein Parallelogramm wäre, so würden sich seine Diagonalen halbiren (§. 82. III.), und also F und G in E zusammenfallen, folglich FG gleich Null, mithin blos

$$[AB^2] + [BD^2] + [DC^2] + [CA^2]$$
$$= [AD^2] + [BC^2]$$

seyn.

II. *In einem* R h o m b o ï d *ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen viermal so gross, als das Quadrat einer der gleichen Seiten.*

Denn die Seiten des Rhomboïdes sind gleich lang.

III. *In einem Quadrat ist das Quadrat über der Diagonal doppelt so gross, als das Quadrat über der Seite;* denn die beiden Diagonalen sind in einem Quadrate einander gleich. Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus dem Pythagorischen Lehrsatze, weil ein Quadrat rechte Winkel hat und seine Seiten einander gleich sind.

130.

Erklärung. *Wenn die Winkel eines Dreiecks, oder einer beliebigen andern Figur, den Winkeln einer andern gleich sind, so sollen die Seiten, welche in den beiden Figuren zwischen den* n e m l i c h e n *Winkeln liegen,* **ä h n l i c h -**

liegend *oder* homolog *heifsen. Z. B. wenn in* (Fig. 81.) *die Figuren* ABCDEFG *und* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\eta$ *gleiche Winkel haben, so dafs* $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ *etc. ist, so sind* AB *und* $\alpha\beta$, BC *und* $\beta\gamma$, CD *und* $\gamma\delta$ *ähnlichliegende, oder homologe Seiten.*

131.

Erklärung. Die Seiten einer Figur, wie sie in beliebiger Richtung auf einander folgen, sollen, von einer beliebigen Seite anfangend, erste, zweite, dritte *etc. heifsen. Eben so die Winkel.*

In einem Dreieck kann jede Seite die erste seyn, und jede andere Seite die zweite. Die letzte Seite ist dann die dritte. Eben so die Winkel.

In gleichwinkligen Dreiecken sind der erste, zweite und dritte Winkel gleich, und die erste, zweite und dritte Seite sind ähnlichliegende.

132.

Lehrsatz. I. In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Parallelogramme, unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern, und die Parallelogramme, unter den ähnlichliegenden Seiten der beiden Dreiecke, gleich grofs, wenn die Winkel der Parallelogramme den Winkeln der Dreiecks-Seiten, unter welchen sie liegen, gleich sind.

Z. B. es sey XY (Fig 82. I. und II.) mit AC parallel, so dafs ABC und XBY gleichwinklige Dreiecke sind. Ferner sey GYH und ECD grade und mit AB parallel, LXM und FAE grade und mit BC parallel, und $IXYK$ und FBD grade und mit CA parallel, so dafs

BM und BG Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten BX, BC und BY, BA;
BK und AH Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten BX, $AC = XK$ und $XY = BH$, BA;
BI und BN Parallelogramme unter den ähnlichliegenden Seiten BY, $AC = BF$ und $XY = BL$, BC

sind; so sind diese Parallelogramme einander gleich; nemlich:

$$1.\quad (BX.BC) = (BA.BY),$$
$$2.\quad (BX.AC) = (BA.XY),$$
$$3.\quad (BY.AC) = (BC.XY).$$

Beweis. a. Das Parallelogramm $BM = (BX.BC)$ erhält man, wenn man von dem Dreieck ABC das Drei-

eck AXN wegnimmt und dagegen das Dreieck NMC zusetzt; also ist

$$\text{Parall. } BM = \triangle ABC - \triangle AXN + \triangle NCM.$$

Das Parallelogramm $BG = (BA . BY)$ erhält man, wenn man von dem Dreieck ABC das Dreieck OYC wegnimmt und das Dreieck AOG zusetzt, so dafs

$$\text{Parall. } BG = \triangle ABC - \triangle OYC + \triangle AOG.$$

Nun ist das Dreieck OYC dem Dreieck AXN gleich, denn die Seiten des einen sind den Seiten des andern gleich, nemlich: wegen der Parallelen ist $OY = AX$, $YC = XN$ und $NC = XY = AO$, also, NO abgezogen, auch $OC = AN$. Auf dieselbe Weise ist das Dreieck AOG dem Dreieck NCM gleich; denn es ist, wie vorhin, $AO = XY = NC$, $AG = XN + NP = YC + NP = PM + NP = NM$ und $GO = GP + OP = AX + OP = YO + OP = YP = MC$. Also ist

$$\triangle OYC = \triangle AXN \text{ und } \triangle AOG = \triangle NCM,$$

folglich

$$\text{Parall. } BM = \text{Parall. } BG.$$

β. Die Dreiecke ABC und DBC sind gleich, denn es ist $BC = BC$, und wegen der Parallelen, $AB = CD$ und $AC = BD$. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke BXY und BHY und die Dreiecke YOC und YKC gleich. Also sind die Parallelogramme AY und DY gleich; denn es ist Parall. $AY = \triangle ABC - \triangle BXY - \triangle YOC$ und Parall. $DY = \triangle DBC - \triangle BHY - \triangle YKC$. Nun ist das Parallelogramm BK gleich der Summe der Parallelogramme HX und DY, und das Parallelogramm AH gleich der Summe der gleich grofsen Parallelogramme HX und AY. Also ist

$$\text{Parall. } BK = \text{Parall. } AH.$$

γ. Eben wie in (β.) wird bewiesen, dafs die Parallelogramme BI und BN gleich grofs sind; denn es ist $\triangle ABC = \triangle ABF$, $\triangle BLX = \triangle BYX$ u. $\triangle AIX = \triangle ANX$, wegen der gleichen Seiten zwischen Parallelen. Also ist Parall. XF = Parall. XC, und folglich Parall. LY + Parall. XF gleich Parall. LY + Parall. XC, das heifst:

$$\text{Parall. } BI = \text{Parall. } BN.$$

II. *Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel der nemliche ist, und das* P a r a l l e l o g r a m m *mit diesem Winkel, unter einer den Winkel einschliefsenden Seite in einem Dreieck und der andern einschliefsenden Seite im andern, ist so grofs, als das* g l e i c h w i n k l i g e *Parallelogramm unter der andern anliegenden Seite im ersten und der ersten anliegen-*

den Seite im andern Dreieck, so sind die Dreiecke gleich winklig und die Parallelogramme unter den übrigen ähnlich liegenden Seiten sind gleich grofs.

Z. B. wenn in den Dreiecken ABC und DEE (Fig. 83.) $E = B$ und

$$(ED.BC) = (BA.EF)$$

ist, so sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig, das heifst, es ist auch

$$A = D \text{ und } C = F.$$

Beweis. Man lege EF in BY. XY sey mit AC parallel, so sind in den gleichwinkligen Dreiecken ABC und XBY nach (I.) die Parallelogramme $(BX.BC)$ und $(BA.BY)$ gleich grofs. Nun wird für den nemlichen Winkel $E = B$, $(ED.BC) = (BA.EF)$ vorausgesetzt. Desgleichen wird vorausgesetzt $BY = EF$, so dafs

$$(BX.BC) = (BA.BY) \text{ und zugleich}$$
$$(ED.BC) = (BA.EF) = (BA.BY)$$

ist. Daraus folgt

$$(BX.BC) = (ED.BC),$$

und mithin $ED = BX$, weil in gleich grofsen Parallelogrammen, wie $(BX.BC)$ und $(ED.BC)$, mit gleichen Winkeln und einer gleichen Seite BC, auch die andere Seite BX gleich grofs ist (§. 112.).

Also ist in den Dreiecken DEF und XBY, $EF = BY$, $ED = BX$ und $E = B$. Folglich sind die Dreiecke gleich. Da nun die Dreiecke XBY und ABC gleichwinklig sind, indem XY mit AC parallel war, so sind auch die Dreiecke DEF und ABC gleichwinklig; wie behauptet wurde. Dann aber sind auch die Parallelogramme unter den übrigen, ähnlichliegenden Seiten, nach (I.), gleich grofs.

133.

Lehrsatz. I. *In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Rechtecke unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern so grofs, als die Rechtecke unter den andern ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke.*

Z. B. in den gleichwinkligen Dreiecken ABC und $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 84. I. und II.) sind folgende Rechtecke gleich grofs:

1. $[BC.\alpha\gamma] = [AC.\beta\gamma]$,
2. $[CA.\beta\alpha] = [BA.\gamma\alpha]$,
3. $[AB.\gamma\beta] = [CB.\alpha\beta]$.

Beweis. Man lege z. B. die Seite $\alpha\gamma$ des kleinern Dreiecks in die Seite BC des gröfsern, und den Punct γ in den Punct C, so wird die andere Seite $\beta\gamma$, an dem nemlichen Winkel, in die Seite AC fallen, weil die Winkel γ und C gleich seyn sollen.

Nimmt man nun auf den Seiten AC und BC, $E\gamma = \alpha\gamma$ und $D\gamma = \beta\gamma$, so ist das Dreieck $D\gamma E$ dem kleinern Dreieck $\alpha\beta\gamma$ gleich, weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen so grofs sind, als in dem andern.

Nun ist der Winkel ADE, oder δ, gleich $2\varrho - \beta$ und der Winkel BED, oder ε, gleich $2\varrho - \alpha$, weil ADC und BEC grade Linien sind; also sind in dem Viereck $ABED$ die Summen der gegenüber liegenden Winkel $B + \delta = B + 2\varrho - \beta$ und $A + \varepsilon = A + 2\varrho - \alpha$, oder, weil $B = \beta$, $A = \alpha$ vorausgesetzt wird,

$$B + \delta = 2\varrho \text{ und } A + \varepsilon = 2\varrho.$$

Folglich ist das Viereck $ABDE$ centrisch nach den Ecken (§. 86. II.). Ist also M der Mittel-Punct dieses Vierecks, so ist

$$AM = BM = DM = EM.$$

Nun ist in dem gleichschenkligen Dreiecke MBE, für die Linie MC, die durch den Scheitel M geht, nach (§. 127.), das Rechteck unter Summe und Unterschied der Linien MB und MC, gleich dem Rechtecke unter den Abschnitten BC und EC, das heifst, es ist

$$[MC + MB]\,[MC - MB] = [BC \,.\, \alpha C].$$

Auf dieselbe Weise ist in dem gleichschenkligen Dreiecke MAD, für die nemliche Linie MC, die durch den Scheitel M geht,

$$[MC + MA]\,[MC - MA] = [AC \,.\, \beta C].$$

Es ist aber $MA = MB$. Also ist

$$[MC + MB]\,[MC - MB] = [MC + MA]\,[MC - MA];$$

folglich ist auch $[BC \,.\, \alpha C] = [AC \,.\, \beta C]$, oder

$$[BC \,.\, \alpha\gamma] = [AC \,.\, \beta\gamma];$$

wie behauptet wurde (1.).

Eben so wird, wenn man die Winkel α und A in einander legt, bewiesen, dafs

$$[CA \,.\, \beta\alpha] = [BA \,.\, \gamma\alpha],$$

und wenn man die Winkel β und B in einander legt, dafs

$$[AB \,.\, \gamma\beta] = [CB \,.\, \alpha\beta]$$

ist, wie in (2.) und (3.) behauptet *).

II. *Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel der nemliche ist, und das Rechteck unter einer, den Winkel einschliefsenden Seite des einen und der andern einschliefsenden Seite des andern ist so grofs, als das Rechteck unter der andern einschliefsenden Seite des*

---

*) Diesen Lehrsatz pflegt man gewöhnlich durch Proportionen, das heifst, mit Hülfe der Zahlen zu beweisen. Grüsoh hat gezeigt, dafs der Satz, wie hier oben, auch ohne Hülfe der Zahl, durch blofse Anschauung bewiesen werden kann. Man sehe in den Memoiren der Academie der Wissenschaften zu Berlin, von den Jahren 1814 und 15 die Abhandlung unter dem Titel „Vereinfachung und Erweiterung der Euclidischen Geometrie" vom Hrn. Grüson. Der Satz (§. 133.) nebst dem vorbereitenden Satze (§. 127.) und die Beweise der folgenden Sätze, die darauf beruhen, sind die dortigen. Es können dadurch, wenn man nicht sowohl die Gleichvielfachheit ähnlichliegender Seiten bey ähnlichen Figuren, wovon weiter unten, sondern nur die Gleichheit der Gröfse der Parallelogramme oder Rectangel unter ähnlichliegenden Seiten in Betrachtung ziehen will, auch mehrere Sätze von der Aehnlichkeit der Figuren bewiesen werden.

ersten und der ersten einschliessenden Seite des andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig; auch sind die Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten gleich.

Z. B. wenn in (Fig. 84. I. und II.) die Winkel β und B gleich sind, und es ist

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta],$$

so sind die Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleichwinklig, das heifst, es ist auch $A = \alpha$, $C = \gamma$. Desgleichen ist

$$[CA.\beta\alpha] = [BA.\gamma\alpha] \text{ und}$$
$$[BC.\alpha\gamma] = [AC.\beta\gamma].$$

Beweis. Der Beweis ist dem des Satzes (§. 132. II.) ähnlich, wenn man blofs Rechteck statt Parallelogramm setzt und den Beweis auf (§. 135. I.) gründet.

III. *Wenn in zwei Dreiecken das Rechteck unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern, so grofs ist, als das Rechteck unter einer der anstofsenden Seiten im ersten und einer der anstofsenden Seiten im andern Dreieck, zugleich aber die der gröfseren von den zusammenstofsenden Seiten gegenüberliegenden Winkel in den beiden Dreiecken gleich grofs sind, so sind die Dreiecke gleichwinklig und die Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten sind gleich grofs.*

Z. B. wenn in (Fig. 85.)

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta],$$

und es ist $AB > BC$, $\alpha\beta > \beta\gamma$ und $C = \gamma$, so sind die Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$ gleichwinklig; also $A = \alpha$ und $B = \beta$; desgleichen ist

$$[AC.\alpha\beta] = [AB.\alpha\gamma] \text{ und}$$
$$[BC.\alpha\gamma] = [AC.\beta\gamma].$$

Beweis. Es sey $BY = \beta\gamma$ und der Winkel BYX gleich γ, also gleich C, so ist XY mit AC parallel; folglich sind die Dreiecke XBY und ABC gleichwinklig. Mithin ist zu Folge (1.)

$$[AB.BY] = [BC.BX].$$

Da nun $BY = \beta\gamma$ seyn sollte, so ist auch

$$[AB.\beta\gamma] = [BC.BX].$$

Es wurde aber $[AB.\beta\gamma] = [BC.\alpha\beta]$ vorausgesetzt. Also ist nothwendig $[BC.BX] = [BC.\alpha\beta]$, und folglich

$$BX = \alpha\beta \text{ (§. 112.)}.$$

Daraus folgt, dafs in den Dreiecken XBY und $\alpha\beta\gamma$ die Seiten $\alpha\beta$ und XB, $\beta\gamma$ und BY und die den gröfseren gegenüber liegenden Winkel γ und Y gleich sind. Also sind die Dreiecke gleich (§. 55.) und folglich auch gleichwinklig. Da nun aber, wie vorhin bewiesen, auch die Dreiecke XBY und ABC gleichwinklig sind, so sind es auch die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC, d. h. es ist auch $A = \alpha$ und $B = \beta$. Die Gleichheit der Gröfse der Rechtecke unter den übrigen ähnlichliegenden Seiten folgt nun aus (I.).

IV. *Wenn in zwei Dreiecken das Rechteck unter der ersten Seite des einen und einer zweiten Seite des andern so grofs ist, als das Rechteck unter der zweiten Seite des ersten und der ersten Seite des andern, desgleichen, wenn ein zweites Rechteck z. B. unter der zweiten Seite des ersten und der dritten Seite des andern so grofs ist, als das Rechteck unter der dritten Seite des ersten und der zweiten Seite des andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig, und auch das dritte Rechteck unter der dritten Seite des ersten*

Dreiecks und der ersten des andern ist so grofs, als das Rechteck unter der ersten Seite der ersten und der dritten Seite des andern.

Z. B. wenn in (Fig. 85.)

$$[AB.\beta\gamma] = [\alpha\beta.BC] \text{ und } [BC.\gamma\alpha] = [\beta\gamma.CA]$$

ist, so ist

$$A = \alpha,\ B = \beta,\ C = \gamma \text{ und } [CA.\alpha\beta] = [\gamma\alpha.AB].$$

Beweis. Es sey $BY = \beta\gamma$ und XY mit AC parellel, so sind die Dreiecke XBY und ABC gleichwinklig. Alsdann ist zu Folge (I.)

$$[AB.BY] = [BX.BC] \text{ und}$$
$$[BC.XY] = [BY.CA].$$

Da nun $BY = \beta\gamma$ seyn soll, so ist auch

$$[AB.\beta\gamma] = [BX.BC] \text{ und}$$
$$[BC.XY] = [\beta\gamma.CA].$$

Es wurde aber

$$[AB.\beta\gamma] = [\alpha\beta.BC] \text{ und}$$
$$[BC.\gamma\alpha] = [\beta\gamma.CA]$$

vorausgesetzt. Also ist nothwendig

$$BX = \alpha\beta \text{ und } XY = \gamma\alpha \text{ (§. 112.).}$$

Da nun auch $BY = \alpha\gamma$ seyn sollte, so sind alle drei Seiten des Dreiecks XBY so grofs, als die drei Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$; folglich sind diese Dreiecke gleich (§. 52.). Die Dreiecke XBY und ABC sind aber gleichwinklig, also sind es auch die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und ABC; welches das Erste war.

Ferner ist in den gleichwinkligen Dreiecken XBY und ABC auch

$$[CA.BX] = [XY.AB],$$

oder, weil $BX = \alpha\beta$ und $XY = \gamma\alpha$ war,

$$[CA.\alpha\beta] = [\gamma\alpha.AB];$$

welches das Zweite war.

134.

Lehrsatz. I. In zwei gleichwinkligen Dreiecken sind die Parallelogramme mit beliebigem gleichen Winkel, unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen Seite des andern Dreiecks so grofs, als die Parallelogramme von gleichen Winkeln unter ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke.

Wenn z. B. ABC und XBY (Fig. 86.) zwei gleichwinklige Dreiecke sind, und es ist $BK = BA$, $BN = BX$, auch KL und NP mit BC, und LY und PC mit BK parallel, so dafs BL und BP Parallelogramme mit dem beliebigen Winkel KBC unter BA, BY und BX, BC sind, so ist

$$\text{Parall. } BL = \text{Parall. } BP.$$

Beweis. Nach (§. 133. I.) ist

$$\text{Rechteck } BE = \text{Rechteck } BI,$$

wenn $BD = BA$, $BH = BX$, und DBC ein rechter Winkel ist.

Nun sind BE und BI zugleich Rechtecke unter ähnlichliegenden Seiten der Dreiecke KBC und NBY, denn es wird vorausgesetzt $KB = AB = DB$ und $NB = XB = HB$; also sind diese Dreiecke KBC und NBY, nach (§. 133. II.) gleichwinklig. BL und BP sind aber Parallelogramme unter ähnlichliegenden Seiten dieser gleichwinkligen Dreiecke; also sind sie nach (§. 132. I.) gleich grofs.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, daſs die Parallelogramme mit beliebigem gleichen Winkel unter den andern ähnlichliegenden Seiten der gleichwinkligen Dreiecke ABC und XBY gleich groſs sind, wenn man andere Winkel dieser Dreiecke in einander legt.

135.

Anmerkung. Dieser Satz (§. 134.) hat ähnliche Gegensätze wie (§. 133.). Man findet sie und ihre Beweise, wenn man überall statt Rechteck oder statt Parallelogramm mit rechten Winkeln, Parallelogramm mit beliebigem Winkel setzt.

136.

Anmerkung. Der Unterschied der drei ersten Lehrsätze in (§. 132. 133. 134.) ist folgender.

Man stelle sich zwei gleichwinklige Dreiecke und ein Parallelogramm unter einer beliebigen Seite des einen und einer beliebigen, nicht-ähnlichliegenden Seite des andern Dreiecks, desgleichen ein Parallelogramm von gleichem Winkel unter den im ersten und im andern Dreieck anstoſsenden Seiten vor, so wird bewiesen:

In (§. 132. I.) daſs diese beiden Parallelogramme gleich groſs sind, wenn ihr Winkel dem Winkel in den beiden Dreiecken gleich ist, unter deren Seiten sie liegen.

In (§. 133. I.) daſs die beiden Parallelogramme gleich groſs sind, wenn ihr Winkel ein rechter ist.

In (§, 134. I.) daſs die beiden Parallelogramme gleich groſs sind, wenn auch ihr Winkel beliebig ist.

Der Satz (§. 134. I.), enthält also auch die Sätze (§. 132. I.) und (§. 133. I.) einschlieſslich; allein sie müssen ihm vorhergehen, weil er sich auf sie gründet.

137.

Lehrsatz. *Das Quadrat der Seite eines regelmäſsigen Fünfecks ist so groſs als die Summe der Quadrate der Seiten des regelmäſsigen Sechsecks und des regelmäſsigen Zehnecks, von dem nemlichen Halbmesser der Ecken.*

Wenn z. B. AD (Fig. 87.) die Seite eines regelmäſsigen Fünfecks, AC die Seite eines regelmäſsigen Sechsecks und AB die Seite eines regelmäſsigen Zehnecks, sämmtlich von gleichem Halbmesser der Ecken, ist, so daſs $AM = BM = CM = DM$, so ist

$$[AD^2] = [AC^2] + [AB^2].$$

Beweis. Die Seite des regelmäſsigen Sechsecks ist dem Halbmesser seiner Ecken gleich (§. 110.); also ist $AC = AM = CM$. Es sey der Winkel FMA dem Winkel FAM gleich, so ist das Dreieck FAM über AM gleichschenklig. Nun ist auch das Dreieck DAM gleichschenklig, über DA, und der Winkel DAM ist dem Winkel FAM gleich; also sind die Dreiecke FAM

und *DAM* gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten derselben sind z. B. *AM*, *AF* und *AD*, *AM*. Also ist nach (§. 133. I.) $[AM . AM] = [AF . AD]$, oder, weil $AM = AC$ ist,

$$1.\quad [AC^2] = [AF . AD].$$

Nun ist im regulairen Fünfeck der Winkel $AMD = \frac{4\varrho}{5}$, also jeder der Winkel *DAM* und *ADM* gleich $\frac{1}{2}\left(2\varrho - \frac{4\varrho}{5}\right) = \varrho - \frac{2\varrho}{5} = \frac{3\varrho}{5}$. Es sollte aber der Winkel *FMA* dem Winkel *FAM* oder *DAM* gleich seyn. Also ist auch der Winkel $FMA = \frac{3\varrho}{5}$. Nun ist im regulairen Zehneck der Winkel $BMA = BMD = \frac{4\varrho}{10} = \frac{2\varrho}{5}$, also ist der Winkel $BME = FMA - BMA = \frac{3\varrho}{5} - \frac{2\varrho}{5} = \frac{\varrho}{5}$. Folglich ist, weil $BMD = \frac{2\varrho}{5}$ war, $BME = \frac{1}{2} BMD$. Mithin halbirt die Linie *ME* den Winkel *BMD*, und folglich auch in dem gleichschenkligen Dreieck *BMD* die Grundlinie *BD* und steht darauf senkrecht (§. 69. I.). Also sind in dem rechtwinkligen Dreiecke *BEF* die beiden Seiten *BE* und *EF* und der rechte Winkel *E*, so groſs als in dem rechtwinkligen Dreieck *DEF* die beiden Seiten *DE* und *EF* und der rechte Winkel *E*. Folglich sind die Dreiecke gleich, und folglich sind die Winkel *BDF* und *DBF* einander gleich. Aber auch in dem gleichschenkligen Dreiecke *ABD* sind die Winkel *BDA* und *BAD* gleich groſs, weil $AB = BD$ ist. Also sind die Dreiecke *BDF* und *BAD*, weil sie den Winkel *D* gemein haben, gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten derselben sind z. B. *AB*, *FD* und *AD*, $BD = AB$. Also ist nach (§. 133. I.)

$$2.\quad [AB^2] = [FD . AD].$$

Oben war $[AC^2] = [AF . AD]$ (1.). Also ist, zusammengenommen,

$$[AF . AD] + [FD . AD] = [AC^2] + [AB^2],$$

oder

$$[(AF + FD) . AD] = [AC^2] + [AB^2]\ (118. I.),$$

oder, weil $AF + FD = AD$ ist,

$$[AD^2] = [AC^2] + [AB^2];$$

wie behauptet.

138.

Lehrsatz. In jedem Trapez sind die Rechtecke unter den zusammenstoſsenden Theilen der Diagonalen, welche sie von einander abschneiden, gleich groſs.

Z. B. wenn in (Fig. 88.) AB mit CD parallel, also $ABCD$ ein Trapez ist, so ist

$$[AP.PC] = [BP.PD].$$

Beweis. Die Dreiecke APB und DPC sind gleichwinklig; denn die Scheitelwinkel bei P und die Wechselwinkel ABP, PCD und BAP, PDC, zwischen den Parallelen, sind gleich. Aehnlichliegende Seiten sind AP, PD und BP, PC; also ist nach (§. 133. I.)

$$[AP.PC] = [BP.PD],$$

wie behauptet.

139.

Zusatz. Also sind in einem Trapez auch die von den Diagonalen und den nicht-parallelen Seiten eingeschlossenen Dreiecke gleich groſs. Z. B. Dreieck APC = Dreieck BPD (Fig. 88.).

Denn da die Rechtecke unter AP, PC und BP, PD gleich groſs sind (§. 138.), so sind auch die Parallelogramme unter diesen Linien, mit dem Winkel $APC = BPD$, gleich groſs und von diesen Parallelogrammen sind die Dreiecke APC und BPD, welche von den Diagonalen und den nicht parallelen Seiten eingeschlossen werden, die Hälften.

140.

Lehrsatz. In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Rechtecke unter den in graden Linien liegenden Stücken, welche die Diagonalen von einander abschneiden, gleich groſs.

Z. B. wenn das Viereck $ABCD$ (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$[AP.PD] = [CP.PB].$$

Beweis. Die Dreiecke APB und CPD sind gleichwinklig; denn es ist, zu Folge (§. 87.), $d = \delta$, $b = \beta$. Aehnlichliegende Seiten sind AP, CP und PB, PD. Also ist, nach (§. 133. I.),

$$[AP.PD] = [CP.PB].$$

141.

In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke sind die Rechtecke unter den Entfernungen des Durchschnitts-Puncts je zweier gegenüberliegender Seiten von den Ecken, in diesen Seiten, gleich groſs.

Z. B. wenn das Viereck $ABCD$ (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch, und E der Duchschnitts-Punct der Seiten AB und CD, F der Durchschnitts-der Seiten AC und BD ist, so ist

$$[EA.EB] = [EC.ED] \text{ und}$$
$$[FA.FC] = [FB.FD].$$

Beweis. Die Summen gegenüberliegeuder Winkel des centrischen Vierecks $ABCD$ sind gleich zwei rechten (§. 86. I.). Also ist $ACD + ABD = ACD + ACE$, denn auch die Summe der Nebenwin-

kel ACD und ACE beträgt zwei rechte; also ist $ABD = ACE$. Folglich sind die Dreiecke EAC und EBD gleichwinklig, denn sie haben auſserdem den Winkel E gemein. Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind EA, ED und EC, EB. Also ist

$$[EA.EB] = [ED.EC] \text{ (§. 133. I.).}$$

Eben so wird bewiesen, daſs die Dreiecke FAB und FCD gleichwinklig sind, und daſs also

$$[FA.FC] = [FB.FD]$$

ist; wie behauptet.

142.

In jedem nach den Ecken centrischen Vierecke ist die Summe der Rechtecke unter den gegenüberliegenden Seiten dem Rechteck unter den Diagonalen gleich.

Wenn z. B. das Viereck $ABCD$ (Fig. 53.) nach den Ecken centrisch ist, so ist

$$[AB.CD] + [AC.BD] = [AD.BC].$$

Dieser Satz heiſst auch, nach seinem Erfinder, der Ptolomäische.

Beweis. Es sey der Winkel KBD dem Winkel b gleich, so sind die Dreiecke ABC und KBD gleichwinklig; denn auſser $KBD = b$ ist auch $a = \alpha$ (§. 87.). Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind AC, KD und BC, BD. Also ist, zu Folge (§. 133. I.),

$$1. \quad [AC.BD] = [KD.BC].$$

Ferner sind die Dreiecke DBC und ABK gleichwinklig; denn es ist

$$ABK = ABD - KBD = b + \gamma - b = \gamma,$$

weil $KBD = b$ seyn sollte, also $ABK = CBD$ und auſserdem $\delta = d$, (§. 87.). Aehnlichliegende Seiten der Dreiecke DBC und ABK sind AB, BC und AK, CD. Also ist, zu Folge (§. 133. I.),

$$2. \quad [AB.CD] = [AK.BC].$$

Zusammengenommen also ist, aus (1. 2.),

$$[AB.CD] + [AC.BD] = [AK.BC] + [KD.BC] = [(AK+KD).BC],$$

und, weil $AK + KD = AD$ ist,

$$[AB.CD] + [AC.BD] = [AD.BC];$$

wie behauptet.

143.

Lehrsatz. I. *Wenn eine grade Linie durch eine beliebige Winkel-Spitze eines beliebigen Dreiecks den Winkel, durch dessen Spitze sie geht, halbirt, so ist das Rechteck unter einer an der halbirenden Linie liegenden Seite und dem Abschnitt an der andern Seite so groſs, als das Rechteck unter dieser andern Seite und dem andern Abschnitt.*

Z. B. wenn in (Fig. 89.) $\beta = \gamma$ ist, so ist

$$[AB.DC] = [AC.BD].$$

Beweis. Es sey CAE eine grade Linie und $AE = AB$, so ist $\varepsilon = \varphi$ (§. 44. I.), also der äuſsere Winkel BAC des Dreiecks EAB, welcher $\varepsilon + \varphi$ ist, (§. 33. VI.), gleich 2ε; mithin ist $\beta + \gamma = 2\varepsilon$, und, weil $\beta = \gamma$ seyn

soll, $\gamma = \varepsilon$; folglich ist EB mit AD parallel (§. 23. I.), und folglich sind die Dreiecke CAD und CEB gleichwinklig. Nun sey AF mit BC parallel, so sind auch die Dreiecke EFA und ADC gleichwinklig. Also ist, vermöge (§. 133. I.),

$$[EA.DC] = [AC.FA].$$

Es wird aber $EA = BA$ vorausgesetzt, und vermöge der Parallelen ist $FA = BD$. Also ist

$$[AB.DC] = [AC.BD];$$

wie behauptet.

II. *Wenn eine grade Linie durch eine beliebige Winkelspitze eines beliebigen Dreiecks geht, und das Rechteck unter einer an diese Linie anstofsenden Seite des Dreiecks und dem Abschnitte an der andern Seite ist so grofs, als das Rechteck unter der andern Seite und dem andern Abschnitte, so* halbirt *die Linie den Winkel des Dreiecks, durch dessen Scheitel sie geht.*

Z. B. wenn in (Fig. 89.)

$$[AB.DC] = [AC.BD]$$

ist, so ist $\beta = \gamma$.

Beweis. Es sey GD mit AC parallel, so dafs die Winkel GDB und ACD gleich sind, auch sey $GD = AB$. Da nun $[AB.DC] = [AC.BD]$ vorausgesetzt wird, so ist $[GD.DC] = [AC.BD]$. Daraus folgt, vermöge (§. 133. II.), dafs die Dreiecke GDB und ACD gleichwinklig sind, und dafs folglich GB mit AD parallel ist. Schneiden sich nun GB und AC in E, so sind die Winkel CEB und DGB gleich, weil CE und DG parallel sind. Also ist $\varepsilon = DGB = \gamma$. Es ist aber auch, wegen der Parallelen, $AE = GD$, und da $GD = AB$ war, $AE = AB$, folglich $\varepsilon = \varphi$ (§. 44. I.); und da wegen der Parallelen auch die Wechselswinkel φ und β gleich sind, so ist auch $\varepsilon = \beta$. Mithin ist, weil vorhin $\varepsilon = \gamma$ war, $\beta = \gamma$; wie behauptet.

144.

Lehrsatz. *Wenn eine grade Linie durch eine Winkelspitze eines beliebigen Dreiecks den Winkel, durch dessen Spitze sie geht,* halbirt, *so ist das Rechteck unter den Seiten des Dreiecks, die den halbirten Winkel einschliefsen, so grofs als die Summe des Rechtecks unter den beiden Abschnitten auf der dritten Seite, und des Quadrats der halbirenden Linie.*

Z.

Z. B. wenn in (Fig. 90.) die grade Linie BD den Dreiecks-Winkel B halbirt, so dafs $\alpha = \beta$ ist, so ist

$$[AB.BC] = [AD.DC] + [BD^2].$$

Beweis. Es sey der Winkel b dem Winkel α, also auch dem Winkel β gleich, so sind die Dreiecke DBC und ADE gleichwinklig; denn aufser den gleichen Scheitelwinkeln bei D sind die Winkel b und β gleich. Gleichliegende Seiten dieser Dreiecke sind AD, BD und DE, DC, also ist zu Folge (§. 133. I.)

$$1. \quad [AD.DC] = [BD.DE].$$

Aber auch die Dreiecke ABE und DBC sind gleichwinklig; denn da in den Dreiecken DBC und ADE, $b = \beta$ und $d = \delta$ ist, so ist auch der dritte Winkel $c = \gamma$, folglich ist in den Dreiecken ABE und DBC, $c = \gamma$, und wie vorausgesetzt, $\alpha = \beta$. Aehnlichliegende Seiten dieser Dreiecke sind AB, EB und BD, CB. Also ist zu Folge (§. 133. I.)

$$2. \quad [AB.CB] = [BD.EB].$$

Nun ist $EB = DE + BD$, also ist aus (2)

$$[AB.CB] = [BD.(DE + BD)] = [BD.DE] + [BD^2],$$

folglich, weil vorhin $[BD.DE] = [AD.DC]$ war (1.),

$$[AB.CB] = [AD.DC] + [BD^2];$$

wie behauptet.

Gröfsere und *kleinere* Figuren von *gleichem Umfange.*

145.

Erklärung. Die Summe der Seiten einer Figur heifst Umfang. Figuren von gleichem Umfange und vielleicht verschiedener Gestalt und Fläche heifsen isoperimetrisch.

146.

Lehrsatz. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange und gleicher Grundlinie ist das gröfste das über der Grundlinie gleichschenklige.

Erster Beweis. Das Dreieck ABC (Fig. 91.) sey gleichschenklig über BC, also $AB = AC$. FAE sey mit BC parallel. BAD sey eine grade Linie und $AD = AB$. Wegen der Parallelen sind die Neigungswinkel DAE und ABC und die Wechselswinkel EAC und ACB gleich. Also sind auch die Winkel DAE und EAC gleich, weil die Winkel ABC und ACB in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC gleich sind. Nun ist auch $AD = AC$, weil $AD = AB$ seyn soll, und AE ist sich selbst gleich. Also sind in dem Dreiecke DAE die beiden Seiten AD und AE, nebst dem eingeschlossenen Winkel DAE, so grofs als in dem Dreiecke EAC die beiden Seiten AC und AE, mit dem eingeschlossenen Winkel EAC. Also sind die Dreiecke

DAE und EAC gleich, und folglich ist $DE = EC$. Nun ist $DE + EB > BD$ (§. 49.). Also ist auch $EC + EB > BD$, oder $EC + EB > AB + AD$; und, weil $AD = AC$ ist,

$$EC + EB > AB + AC.$$

Die Dreiecke ABC und EBC haben aber gleiche Grundlinie und gleiche Höhe und folglich gleichen Inhalt. Also hat jedes, nicht gleichschenklige Dreieck EBC einen grösern Umfang, als ein gleich grosses, gleichschenkliges Dreieck ABC.

Ein höheres oder grösseres, nicht gleichschenkliges Dreieck, wie z. B. AGC, kann ferner keinen kleinern Umfang haben wie ABC, über derselben Grundlinie. Denn es ist in dem Dreieck BGH, $BG + GH > BH$ (§. 49.), und folglich $BG + GC > BH + HC$, mithin, weil wie vorhin bewiesen $BH + HC > AB + AC$, um so mehr,

$$GB + GC > AB + AC.$$

Also haben alle nicht gleichschenklige Dreiecke, die eben so hoch oder höher, das heisst, eben so gross oder grösser sind, als ein gleichschenkliges Dreieck über derselben Grundlinie, einen grösseren Umfang. Mithin kann ein nicht gleichschenkliges Dreieck, welches den nemlichen Umfang hat, wie ein gleichschenkliges über derselben Grundlinie, nur eine geringere Höhe und folglich nur einen geringeren Inhalt haben, und folglich ist unter allen Dreiecken von gleichem Umfange und gleicher Grundlinie das gröfste das über der Grundlinie gleichschenklige.

Zweiter Beweis. Man setze, die Dreiecke ACB und ADB (Fig. 92.) hätten gleichen Umfang, so dafs also

$$CA + CB = DA + DB$$

ist.

Es sey ACH eine grade Linie, $CH = CB$ und CE auf HB, CI auf AB senkrecht. Alsdann sind die Winkel HCE und BCE, wie BCI und ACI, gleich (§. 59. III.). Also ist $HCE + ACI = BCE + BCI = ECI$, folglich ist ECI ein rechter Winkel, denn $HCE + ACI + ECI$ ist gleich zwei rechten. Da also in dem Viereck EI drei Winkel bei I, E und C rechte sind, so ist auch der vierte Winkel ABH ein rechter.

Nun sey der Winkel DAB in dem Dreieck DAB, welches nach der Voraussetzung mit CAB gleichen Umfang haben soll, kleiner als CAB, so ist der Winkel DBA nothwendig gröfser als CBA. Denn wäre DBA kleiner als CBA, z. B. LBA, so wäre $LB + LA < CB + CA$ (§. 50.), und wäre DBA gleich $CBA = MBA$, so wäre $MB + MA$, weil $MA < CM + CA$ ist (§. 49.), ebenfalls kleiner als $CB + CA$. Beides ist der Voraussetzung entgegen, weil $DA + DB = CA + CB$ seyn soll. Folglich kann der Winkel DBA weder kleiner als CBA, noch ihm gleich seyn, und folglich ist nothwendig $DBA > CBA$; also $DBH < CBH$.

Es sey DF auf HB senkrecht und $GF = BF$, so sind die Winkel DGB und DBG gleich. Also ist auch DGB kleiner als CBH. In dem Viereck $ADGB$ ist also der Winkel DAB kleiner als CBA und der Winkel DGB kleiner als CBH, folglich ist die Summe der beiden Winkel DAB und DGB kleiner als ABG, oder kleiner als ein rechter, und folglich, da der dritte Winkel bei B ein rechter ist, der vierte Winkel ADG, nach innen zu, gröfser als zwei rechte, und folglich der äufsere Winkel ADG kleiner als zwei rechte. Folglich ist ADG keine grade Linie, sondern $AD + DG > AG$, oder, weil $DG = DB$ ist, $DA + DB > AG$. Es wird

aber vorausgesetzt, daſs $DA + DB = CA + CB$ seyn soll. Also ist $CA + CB$, oder, weil $CB = CH$ ist, $CA + CH$ oder $AH > AG$. Da nun bei B ein rechter Winkel ist, so ist $HB > GB$ (§. 62. II.). Nun ist $CI = EB = \frac{1}{2}HB$ und $DK = FB = \frac{1}{2}GB$. Also ist $EB > FB$ oder $CI > DK$, das heiſst: das gleichschenklige Dreieck ACB ist höher und folglich gröſser, als jedes nicht gleichschenklige Dreieck ADB von gleichem Umfange, über derselben Grundlinie; wie behauptet wird.

147.

Lehrsatz. *Wenn in beliebig verschiedenen Dreiecken zwei Seiten in dem einen so groſs sind als in dem andern, so ist dasjenige das gröſste, in welchem die beiden unveränderlichen Seiten einen rechten Winkel einschlieſsen.*

Beweis. In (Fig. 93.) sey das Dreieck ABC in B rechtwinklig. Beliebige andere Dreiecke DAB, EAB etc. sollen, auſser der Seite AB, die gleiche Seite $DB = EB \ldots = CB$ haben. Alsdann sind alle diese Dreiecke kleiner als das Dreieck ABC; denn, wenn DF, EG etc. Perpendikel aus D, E etc. auf AG sind, so sind diese Perpendikel sämmtlich kürzer als die schrägen Linien DB, EB (§. 63. IV.), und folglich sämmtlich kürzer als CB. Nun sind DF, EG etc. die Höhen der Dreiecke DAB, EAB etc. und CB ist die Höhe des Dreiecks CAB, sämmtlich über gleicher Grundlinie. Also sind alle die Dreiecke DAB, EAB etc. kleiner als das rechtwinklige Dreieck CAB mit eben der Grundlinie AB und eben der einen gleichen Seite $CB = DB = EB$ etc.

148.

Lehrsatz. *Unter allen Vielecken von gleichem Umfange kann das gröſste nur gleiche Seiten haben.*

Beweis. Gesetzt das Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 94.) habe nicht gleiche Seiten und es sey z. B. nicht $AB = BC$, so ist, wenn auch die übrige Figur $ACDEF$ bleibt, schon mit der Summe der Seiten AB und BC ein über AC gleichschenkliges Dreieck AKC von gleichem Umfange möglich, welches gröſser ist als ABC (§. 146.). Eben so verhält es sich mit allen andern zusammenstoſsenden Seiten. Also kann eine ungleichseitige Figur nie die gröſste unter allen von gleichem Umfange seyn, und die gröſste kann also nur gleiche Seiten haben.

149.

Lehrsatz. *Wenn alle Seiten eines Vielecks, bis auf eine, gegeben sind, so kann das gröſste Vieleck, welches sich damit einschlieſsen läſst, nur centrisch nach den Ecken seyn und den Mittelpunct der Ecken in der Mitte der willkührlichen Seite haben.*

Beweis. Die Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FG des Vielecks $ABCDEFG$ (Fig. 95.) sollen die gegebenen seyn, AG die willkührliche. Schlieſsen nun beliebige zwei Diagonalen von den Enden dieser willkührlichen Seite nach einer Ecke, z. B. AD und DG, in D nicht einen rechten Winkel ein, so läſst sich, wenn man die Figuren $ABCD$ und $DEFG$, also auch die Diagonalen AD und DG, unverändert beibehält, mit diesen Diagonalen

ein gröſseres Dreieck ADG einschlieſsen (§. 147.) und folglich mit den nemlichen Seiten ein gröſseres Vieleck $ABCDEFG$. So verhält es sich mit den Diagonalen nach jeder andern Ecke. Das gröſste Vieleck, welches sich mit den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FG einschlieſsen läſst, kann also nur unter denjenigen seyn, in welchen alle die Winkel ABG, ACG, ADG, AEG und AFG rechte sind. Ein solches Vieleck ist centrisch nach den Ecken and hat seinen Mittel-Punct der Ecken in der Mitte der willkührliche Seite AG (§. 106. II).

Es giebt aber nur ein solches Vieleck; denn alle dergleichen Vielecke mit den nemlichen gegebenen und einer willkührlichen Seite sind gleich (§. 105.). Also kann das gröſste Vieleck $ABCDEFG$ mit den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FG nur das eine seyn, welches centrisch nach den Ecken ist und den Mittel-Punct der Ecken in der Mitte der willkührlichen Seite AG hat.

150.

Lehrsatz. Das gröſste unter allen Vielecken mit den nemlichen Seiten, also von gleichem Umfange, ist centrisch nach den Ecken.

Beweis. $ABCDEF$ (Fig. 96. I.) sey ein nach den Ecken centrisches Vieleck mit den gegebenen Seiten AB, BC, CD, DE, EF und FA; M sey der Mittel-Punct der Ecken, AMZ eine grade Linie und $AM = MZ$; $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$ (Fig. 96. II.) dagegen sey ein nicht centrisches Vieleck mit den nemlichen Seiten $AB = \alpha\beta$, $BC = \beta\gamma$, $CD = \gamma\delta$, $DE = \delta\epsilon$, $EF = \epsilon\varphi$ und $FA = \varphi\alpha$. Auch sey $DZ = \delta\zeta$ und $ZE = \zeta\epsilon$.

Nun ist zu Folge (§. 149.) das centrische Vieleck $ABCDZ$ gröſser als jedes andere Vieleck mit den nemlichen Seiten AB, BC, CD und DZ und einer willkührlichen Seite AZ, also gröſser als das nicht centrische Vieleck $\alpha\beta\gamma\delta\zeta$. Auf dieselbe Weise ist das Vieleck $AFEZ$ gröſser als das Vieleck $\alpha\varphi\epsilon\zeta$. Zusammengenommen also ist das Vieleck $ABCDZEF$ gröſser als jedes andere Vieleck $\alpha\beta\gamma\delta\zeta\epsilon\varphi$, mit den nemlichen Seiten. Die Dreiecke DZE und $\delta\zeta\epsilon$ sind aber gleich, weil alle drei Seiten in dem einen so groſs sind als in dem andern, folglich auch gleich groſs. Zieht man daher diese gleichen Dreiecke ab, so folgt, daſs auch das centrische Vieleck $ABCDEF$ gröſser ist als jedes andere nicht centrische Vieleck $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\varphi$, mit den nemlichen Seiten, oder von gleichem Umfange.

151.

Lehrsatz. Nach den Ecken centrische Vielecke, mit den nemlichen Seiten, sind auch dann noch gleich groſs, wenn ihre Seiten in verschiedener Ordnung auf einander folgen.

Beweis. Zuerst folgt, daſs die Halbmesser nach den Ecken centrischer Vielecke, wenn sie die nemlichen Seiten haben, nicht ungleich seyn können. Denn gesetzt, der Halbmesser des einen wäre kleiner als der Halbmesser des andern, so wären alle Winkel am Mittel-Puncte, über gleichen Seiten, in dem ersten gröſser als in dem andern, welches auf die Weise, wie in (§. 104.), bewiesen wird, folglich wären die Summen der Winkel am Mittel-Punct verschieden, was nicht seyn kann, da sie immer vier rechten gleich sind. Wäre der Halbmesser in dem einen Vieleck gröſser

als im andern, so wären alle Winkel am Mittel-Punct über gleichen Seiten, in dem ersten kleiner als in dem andern (§. 104.), also die Summen der Winkel am Mittel-Punct wiederum verschieden. Also können die Halbmesser der beiden Vielecke nicht ungleich seyn, sondern müssen gleich seyn. Dann aber sind die Dreiecke über gleichen Seiten gleich und folglich auch gleich grofs. Mithin sind auch die Summen der Dreiecke um den Mittel-Punct, oder die Flächen der beiden Vielecke, gleich grofs.

152.

Lehrsatz. Unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleich vielen Seiten ist das regelmäfsige das gröfseste.

Beweis. Nach (§. 148.) ist unter allen Vielecken von gleichem Umfange, das gleichseitige und nach (§. 150.) das nach den Ecken centrische das gröfseste. Also ist unter allen Vielecken von gleichem Umfange und gleich vielen Seiten das gleichseitige, welches zugleich centrisch nach den Ecken ist, das gröfste, und dieses ist das regelmäfsige (§. 108. II.).

B. Vergleichung der Gröfse der Figuren mit Hülfe der Zahl, oder durch Rechnung.

153.

Erklärung. Gröfsen heifsen gleichartig, *wenn sie durch Vermehrung und Verminderung* aus einander *entstehen können,* ungleichartig, *im entgegengesetzten Falle. In der Geometrie sind die Längen von Linien, die Winkel, die Inhalte begrenzter Flächen, die Inhalte von Körpern* gleichartige *Gröfsen; denn, wenn man Linien, oder Winkel, oder Flächen, oder Körper an einander setzt, oder von einander abschneidet, so entstehen wieder Linien, Winkel, Flächen und Körper. Hingegen Linien und Winkel, oder Linien und Flächen, oder Winkel und Körper u. s. w. sind* ungleichartige *Gröfsen, weil nie aus Linien Winkel, oder aus Linien Flächen, oder aus Winkel Körper u. s. w. entstehen können, wie man dergleichen Gröfsen auch an einander fügen, oder von einander wegnehmen mag.*

154.

Erklärung. Nur gleichartige Gröfsen können mittelst der Zahl verglichen oder durch einander ausgedrückt oder gemessen *werden, weil nur solche Gröfsen durch Aneinanderfügen und Voneinanderwegnehmen entstehen.*

Die Bezeichnung gleichartiger Gröfsen durch die Zahl geschieht vermittelst irgend einer Gröfse derselben Art,

die auch eine der Verglichenen selbst seyn kann, und welche Einheit *heisst und immer durch 1 bezeichnet wird.*

Man nimmt eine solche Einheit, die dann für alle zu vergleichenden Grösen derselben Art die nemliche bleibt, willkührlich an, und drückt durch Zahlen aus, wie oft die Einheit, oder irgend ein Theil derselben, aneinander gefügt oder von einer andern Grösse derselben Art hinweggenommen werden muss, um die zu messende Grösse genau oder näherungsweise zu bekommen. Nähert man sich blos der auszudrückenden Grösse, so kann auch blos die Operation, durch welche die Näherung geschieht, durch irgend ein Zeichen angedeutet werden.

I. Ist eine Grösse grade ein *Vielfaches der Einheit,* so wird dieselbe durch eine einzelne Zahl, oder durch eine sogenannte *ganze Zahl* ausgedrückt; denn die ganze Zahl ist das Zeichen des geschehenen Aneinanderfügens mehrerer gleichartiger Grösen. Wird z. B. zum Messen der Längen von beliebigen Linien die Länge der graden Linie *AB* (Fig. 97. I.) als Einheit angenommen, und also durch das Zeichen 1 bezeichnet, und muss dann diese Länge grade dreimal an einander gefügt werden, um eine andere Linie *AC* zu bekommen, so wird die Linie *AC* durch die ganze Zahl drei, und also durch das Zeichen 3 bezeichnet. Ist der Winkel *ABC* (Fig. 97. II.) das angenommene Maass oder die Einheit beliebiger Winkel, welches wiederum durch 1 bezeichnet wird, und der Winkel *DBA* entsteht durch fünfmaliges Aneinandersetzen des Winkels *ABC*, so wird der Winkel *ABD* durch die ganze Zahl fünf, und folglich durch das Zeichen 5 ausgedrückt. Ist das Quadrat *AC* (Fig. 97. III.) das angenommene Maass oder die Einheit beliebiger Flächen, welches dann wiederum durch 1 bezeichnet wird, und die Fläche *AF* entsteht durch zwölfmaliges Aneinandersetzen des Quadrats *AC*, so wird *AF* durch die ganze Zahl zwölf, und folglich durch das Zeichen 12 ausgedrückt u. s. w.

II. Ist umgekehrt die angenommene *Einheit* einer Grösse grade ein *Vielfaches der zu messenden Grösse,* so wird letztere durch einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner die Zahl des Vielfachen ist, ausgedrückt, und ist ein *aufgehender Theil* der Einheit. (Man sehe den ersten Band; Rechenkunst, zweiter Abschnitt.) Ist z. B. in (Fig. 97. I.), wie vorhin, $AB = 1$,

und die Linie *AD* mufs grade viermal aneinandergesetzt werden, um *AB* zu geben, so wird *AD* durch den Bruch $\frac{1}{4}$ ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. II.), wie vorhin, der Winkel *ABC* = 1 und der Winkel *ABE* mufs grade dreimal an einander gesetzt werden, um *ABC* zu geben, so wird *ABE* durch $\frac{1}{3}$ ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. III.), wie vorhin, das Quadrat *AC* = 1, und die Fläche *AI* mufs grade sechsmal an einander gesetzt werden, um *AC* zu geben, so wird *AI* durch $\frac{1}{6}$ ausgedrückt u. s. w.

III. Ist die zu messende und zu vergleichende Gröfse grade *ein Vielfaches eines aufgehenden Theils der Einheit*, so wird sie durch einen *Bruch* ausgedrückt, dessen Nenner die Zahl der Theile in der Einheit und dessen Zähler die Zahl solcher Theile in der zu messenden Gröfe bezeichnet. (Rechenkunst, zweiter Abschnitt.) Ist z. B. in (Fig. 97. I.), wie vorhin, *AB* = 1, und der fünfte Theil von *AB* mufs dreizehnmal an einander gesetzt werden, um *AE* zu geben, so wird *AE* durch den Bruch $\frac{13}{5}$ ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. II.), wie vorhin, der Winkel *ABC* = 1, und der dritte Theil dieses Winkels mufs achtmal an einander gesetzt werden, um den Winkel *ABF* zu geben, so wird *ABF* durch $\frac{8}{3}$ ausgedrückt. Ist in (Fig. 97. III.), wie vorhin, das Quadrat *AC* = 1, und die Hälfte davon mufs eilfmal an einander gesetzt werden, um die Figur *AL* zu geben, so wird die Fläche *AL* durch $\frac{11}{2}$ ausgedrückt u. s. w.

IV. Ist endlich die zu messende Gröfse *weder ein Vielfaches der Einheit, noch ein Vielfaches irgend eines Theils derselben*, sondern fällt zwischen zwei auf einander folgende Vielfachen irgend eines Theils der Einheit, so klein auch der Theil seyn mag, so ist sie *incommensurabel:* im Gegensatz von den Gröfsen in den vorigen Fällen, welche *commensurabel* sind. Man kann sich einer solchen Gröfse nur durch Zusammensetzen commensurabler Gröfsen nach Belieben *nähern*. Die Gröfse wird aber genau ausgedrückt, wenn man die *Operation* bezeichnet, durch welche man der Gröfse ohne Ende näher kommen kann. Gesetzt, die Länge der Linie *AE*, oder die Gröfse des Winkels *ABG*, oder der Inhalt der Figur *AN* (Fig. 97. I. II. III.) wäre von der Art, dafs die Zahl, welche ausdrückt, wie Vielfaches diese Gröfsen von ihrer Einheit sind, diejenige ist,

welche mit sich selbst multiplicirt 5 giebt, so kann die Vielfachheit der benannten Gröſsen gegen die Einheit durch keine ganze Zahl und durch keinen Bruch ausgedrückt werden, weil es keine ganze Zahl und keinen Bruch giebt, die, mit sich selbst multiplicirt, die ganze Zahl 5 gäben, indem 5 nicht die zweite Potestät einer ganzen Zahl ist. Man kann sich also alsdann dem Ausdruck der Vielfachheit der Gröſse, welche gemessen werden soll, nur durch Reihen, durch Kettenbrüche, oder durch andere Mittel, nach Belieben *nähern*. Gleichwohl wird die zu messende Gröſse genau ausgedrückt, wenn man die Operation anzeigt, durch welche die Näherung geschieht, also in dem obigen Beispiele, wenn man die zu messende Gröſse durch $\sqrt{5}$ oder durch $5^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet; u. s. w.

So läſst sich jede Raum-Gröſse, sie sey Linie, Winkel, Fläche oder Körper, durch eine Einheit ihrer Art, mit Hülfe der Zahl, ausdrücken, und man kann, wenn man Raum-Gröſsen, die verglichen werden sollen, durch Buchstaben, z. B. Linien, Winkel, Flächen und Körper durch $a, b, c \ldots. x, p \ldots. \alpha, \beta \ldots.$ und wie man sonst will, bezeichnet hat, unter diesen Buchstaben ohne Weiteres blos Zahlen verstehen, das heiſst, Zahlen im allgemeinen Sinne des Wortes (Rechenkunst, dritter Abschnitt) nicht ganze Zahlen allein, sondern eben so wohl Brüche und incommensurable, blos durch Operations-Zeichen angedeutete Zahlengröſsen, wie die Umstände sie erfordern.

155.

Erklärung. *So wie der Ausdruck irgend einer Raumgröſse, durch eine Einheit ihrer Art, vermittelst der Zahl geschieht, was nichts anderes ist als die Vergleichung der zu messenden Gröſse mit einer andern, zur Einheit angenommenen, ihrer Art, so geschieht auch die gegenseitige Vergleichung beliebieger, auf diese Weise ausgedrückter gleichartiger Gröſsen durch die Zahl allein.* So wie z. B. eine Linie, oder ein Winkel, oder eine Fläche, oder Körper a, das $a$fache der Einheit von Linie, Winkel, Fläche oder Körper und eine dergleichen Gröſse b das $b$fache der nemlichen Einheit ist: so ist die erste Gröſse a, das $\frac{a}{b}$fache der zweiten und die

zweite Gröſse b das $\frac{b}{a}$ fache der ersten; denn nimmt man das $\frac{a}{b}$ fache der Gröſse b, das heiſst, multiplicirt man b mit $\frac{a}{b}$, so erhält man a, und nimmt man das $\frac{b}{a}$ fache der Gröſse a, das heiſst, multiplicirt man a mit $\frac{b}{a}$, so erhält man b. Vergleicht man zwei gleichartige Gröſsen, so ist der Quotient der Zahlen, welche sie ausdrücken, nicht mehr eine Gröſse eben der Art, sondern eine bloſse Zahl, welche anzeigt, welches Vielfache die eine Gröſse von der andern ist. Wären a, b, c und d vier verschiedene Linien, oder Winkel, oder Flächen, oder Körper, durch ihre Einheiten in Zahlen ausgedrückt, und man fände, daſs $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ist, so müſste man sagen, daſs a und c von b und d *Gleich-Vielfache* sind.

Wie sich in der Folge zeigen wird, können die Zahlen der Flächen-Einheiten in einer beliebigen Fläche allemal als das Product zweier Zahlen von Linien-Einheiten in zwei Linien, und die Zahlen der Körper-Einheiten in einem beliebigen Körper als das Product dreier Zahlen von Linien-Einheiten in drei Linien, oder auch als das Product zweier Zahlen, die eine von Linien-Einheiten in einer Linie, die andere von Flächen-Einheiten in einer Fläche betrachtet werden, was sich schon daraus schlieſsen läſst, daſs die Flächen allemal zwei Abmessungen, Länge und Breite, und die Körper drei Abmessungen, Länge, Breite und Höhe, haben (§. 4.). Das Product zweier und dreier Zahlen, wenn sie Linien bezeichnen, hat also allemal eine geometrische Bedeutung. Ersteres bedeutet eine Fläche, letzteres einen Körper. Das Product von vier, fünf und mehreren Zahlen dagegen, welche Linien bezeichnen, oder auch nur von zwei Zahlen, welche Flächen oder Körper bezeichnen, hat keine geometrische Bedeutung. Gleichwohl hindert nichts, daſs bei den Vergleichungen von Räumen, Producte von mehr als drei Zahlen, die Linien oder Flächen etc. bezeichnen, vorkommen; denn durch Division, oder durch fernere Multiplication, lassen

sich dergleichen Producte allemal auf weniger als drei Abmessungen zurückbringen. Gesetzt z. B. a, b, c, d und p, q, r, s bezeichneten Linien, und man habe bei irgend einer Vergleichung gefunden, dafs

$$a.b.c.d = p.q.r.s$$

ist, so haben zwar die beiden Producte $a.b.c.d$ und $p.q.r.s$ an sich keine geometrische Bedeutung. Allein multiplicirt man die Zahlen a, b, c, d und p, q, r, s ferner, z. B. mit $\frac{1}{d}$, oder, was dasselbe ist, dividirt man sie durch d, so erhält man

$$a.b.c = \frac{p.q.r.s}{d} = pqr\frac{s}{d} = pqs\frac{r}{d} \text{ etc.}$$

und dieses drückt aus, dafs der durch abc bezeichnete Körper das $\frac{s}{d}$fache des Körpers pqr oder das $\frac{r}{d}$fache des Körpers pqs ist, u. s. w.; denn $\frac{s}{d}$, $\frac{r}{d}$ etc. sind, wie vorhin bemerkt, nicht mehr Linien, sondern blofse Zahlen. Dividirt man $abcd = pqrs$ durch bd, so erhält man

$$ac = \frac{pqrs}{bd} = pq\frac{rs}{bd} = pr\frac{qs}{bd} \text{ etc.,}$$

welches ausdrückt, dafs die durch ac bezeichnete Fläche das $\frac{rs}{bd}$fache der Fläche pq oder das $\frac{qs}{bd}$fache der Fläche pr ist, u. s. w. Denn z. B. $\frac{rs}{bd}$ oder $\frac{r}{b}.\frac{s}{d}$ ist das Product von zwei blofsen Zahlen, und also ebenfalls eine Zahl u. s. w.

Es hindert also nichts, die Zahlen, welche Linien, Winkel, Flächen, Körper ausdrücken, durch so viele Multiplicationen und Divisionen, als man will, zusammenzusetzen, und damit, wie überall, mit blofsen Zahlen zu rechnen, worin eben der Vortheil der Anwendung der Zahl, oder der Rechenkunst auf die Geometrie besteht, dessen man entbehrt, wenn man bei der blofsen Anschauung bleibt; denn bei dieser ist man auf die *drei* Abmessungen des Raumes beschränkt, und kann Sätze, bei welchen es auf die Producte von *mehr als drei* Zahlen ankommt, nur mit

Mühe und durch fremdartige Vorstellungen anschaulich machen. Betrachtet man dagegen Raumgröfsen als *Zahlen ihrer Einheiten*, so kann man mit diesen Zahlen, ohne weitere Rücksicht auf die Einheit, unbeschränkt rechnen, das heifst, sie allen den Verwandlungen unterwerfen, die aus den Verbindungen, in welche sie durch die Natur der Aufgabe gesetzt sind, für blofse Zahlen folgen. Will man dem Resultate wieder seine geometrische Bedeutung geben, so darf man dasselbe nur auf 1, 2 oder 3 Abmessungen bringen. Ausdrücke mit einer Abmessung können dann Linien oder Winkel, Ausdrücke mit zwei Abmessungen Flächen, und mit drei Abmessungen Körper bedeuten. Ausdrücke mit weniger als einer, oder mit mehr als drei Abmessungen sind aber allemal blofse Zahlen, die keine unmittelbare geometrische Bedeutung haben.

156.

Erklärung. Wenn Raum-Gröfsen einerlei Art an einander gefügt werden, so werden sie offenbar gröfser, nimmt man sie von einander hinweg, kleiner. Nun kann man schon eine einzelne Gröfse als durch Hinzufügung zu Null entstanden ansehen: es folgt also, dafs, wenn z. B. eine Linie zu einer andern hinzugefügt wird, dieses Hinzufügen nur in derselben Richtung, oder die Linie fortsetzend, geschehen kann, und wenn eine Linie von einer andern hinweggenommen wird, dafs es in entgegengesetzter Richtung, oder umkehrend, geschehen mufs. Wenn also z. B. die Linie $BC = b$ (Fig. 98.) zu der Linie $AB = a$ hinzugefügt werden soll, und man nimmt an, dafs die Linie von A ab nach B, nicht etwa von B ab nach A, gröfser wird, also in A der Nullpunct ist, so mufs nothwendig BC, wie in der Figur, an AB angesetzt werden, und die Linie AC wird dann durch $a + b$ ausgedrückt. Soll hingegen die Linie $BC = a$ hinweggenommen werden, so wird AB um eben so viel kleiner, und folglich mufs BC von B nach A rückwärts genommen werden, so dafs, wenn $BD = BC = b$ ist, nur noch AD übrig bleibt. Dieses AD wird alsdann durch $a - b$ ausgedrückt. In der That ist $AD = a - b$ nichts anders als diejenige Linie, welche, wenn man zu derselben $b = DB$ hinzuthut, wiederum $AB = a$ giebt, wie es in dem Sinne des Zeichens — liegt (Rechenkunst,

§. 107.). Ist b gröfser als a, so fällt der Endpunct der Linie $a - b$ über A hinaus, auf die entgegengesetzte Seite von A. Wäre z. B. $b = EB$, so wäre $a - b = AE$ und negativ, während alle Linien auf der andern Seite von A nach C zu positiv sind. Das Negative ist also bei Linien dem Positiven, *der Richtung nach* entgegengesetzt: es liegt *auf verschiedenen Seiten des Nullpunctes.* Betrachtet man beliebige Längen auf der Linie AC, rechterhand des Punctes A, als positiv, so sind alle Längen linkerhand von A, negativ.

Giebt man hierauf überall Acht, so findet sich der Ausdruck der Linien blos nach den Regeln, denen die durch Addition und Subtraction zusammengesetzten Zahlen überhaupt unterworfen sind. Gesetzt man wolle die Linie DB durch die Linien AB und AD ausdrücken. Der Null-Punct mag in A, die beiden Linien AB und AD also mögen positiv seyn, und zwar sey $AB = a$, $AD = c$. Alsdann ist offenbar $DB = a - c$; denn, wenn $AD = BF$, so ist $AF = a - c = DB$. Nun sey c negativ, also etwa gleich AE, so ist nach derselben Regel $EB = a - (-c) = a + c$, und in der That ist, wenn z. B. $BC = AE$ ist, $EB = AC = a + c$.

Bei Winkeln verhält es sich eben so. Wenn man die Winkel (Fig. 99.) von AC ab nach D zu rechnet, so sind die Winkel ACB, ACD, ACF, der äufsere Winkel ACG und selbst gröfsere Winkel, als 4ϱ, 8ϱ etc., alle positiv, weil dergleichen immer gröfsere Winkel durch Hinzufügung immer neuer Winkel entstehen. Hingegen Winkel, wie ACE, ACK etc., auf der andern Seite von AC, die ebenfalls gröfser als 4ϱ, 8ϱ etc. seyn können, sind alle negativ, weil sie entstehen, wenn man von einem positiven Winkel einen Winkel zurückrechnet, der gröfser ist als er.

157.

Anmerkung. Wenn also z. B. RP und QS (Fig. 100.) Coordinaten-Axen sind (§. 64.), und die Abcissen von A nach S zu, und die Ordinaten von A nach P zu, sind positiv, so sind die Abscissen von A nach Q zu und die Ordinaten von A nach R zu, in den entgegengesetzten Richtungen, negativ, und von allen Puncten, wie M, die in dem Winkel PAS liegen, sind die Abscissen und die Ordinaten positiv; von allen Puncten, wie N,

die in dem Winkel *PAQ* liegen, sind die Abscissen negativ, die Ordinaten positiv; von allen Puncten, wie *U*, in dem Winkel *SAR*, sind die Abscissen positiv, die Ordinaten negativ und von allen Puncten, wie *T*, in dem Winkel *QAR*, sind die Abscissen und Ordinaten negativ.

Die Ordinaten aus einem Puncte *AM*, *AN*, *AT*, *AU* sind alle positiv, nur der Ordinaten-Winkel kann negativ seyn: z. B. wenn die Winkel, wie *SAM*, *SAN* etc., positiv genommen werden, so sind die Winkel in der entgegengesetzten Richtung, wie *SAU*, *SAT* etc., negativ.

158.

Erklärung. Wenn ungleichartige Gröſsen, z. B. Linien und Winkel, Linien und Flächen, Winkel und Körper etc. die auf irgend eine Weise von einander abhängen, die Eigenschaft haben, daſs, so lange die eine wächst oder abnimmt, die andere ebenfalls immer wächst, oder immer abnimmt, oder umgekehrt, nie die zweite vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, so lange es nicht die erste auch thut, so sollen die Gröſsen zusammengehörig, *und zwar, wenn sie beide zugleich immerfort wachsen oder immerfort abnehmen,* gleichförmig zusammengehörig, *wenn die eine abnimmt indem die andere wächst,* entgegengesetzt zusammengehörig *heiſsen.*

159.

Lehrsatz. Wenn von zwei ungleichartigen, aber gleichförmig zusammengehörigen, *von einander abhängigen Gröſsen* A *und* B *bewiesen werden kann, daſs, wenn* A *in das mfache* A *oder in* m A = P *übergeht, aus* B *ebenfalls grade das mfache* B, *oder* m B = Q *wird, wo* m *eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeutet, so daſs also* P *und* Q commensurable Gleich-Vielfache *von* A *und* B *sind* (§. 155.), *so gilt das Nemliche auch, wenn* m A *mit* A *incommensurabel, oder wenn* m *eine irrationale Zahl ist, das heiſst, auch dann gehört grade* m B *zu* m A, *und* P *und* Q *sind also* immer Gleich-Vielfache von *A* und *B*, m *mag rational oder irrational seyn, mithin für jede beliebige Zahl* m.

Beweis. Ginge, im Fall *m* irrational ist, *B* nicht grade in $mB = Q$ über, wenn *A* in *mA* übergeht, so ginge es in eine gröſsere oder kleinere Gröſse als *mB* über, z. B. in die gröſsere $(m + e)\,B$, wo *e*

irgend eine Zahl ist. Es lassen sich aber Zahlen, namentlich Brüche, so nahe bei einander annehmen, als man will, also z. B. zwei Zahlen, p und q, die um weniger als e verschieden sind, was auch e seyn mag. Nun können zwischen den beiden Zahlen p und q nicht zwei andere zugleich liegen, deren Unterschied grőſser ist, als der Unterschied von p und q, also lassen sich Brüche p und q annehmen, zwischen welchen m und $m+e$ nicht zugleich liegen können. Ist also p kleiner und q gröſser als m, so liegt q nothwendig zwischen m und $m+e$, und folglich ist qB gröſser als mB und kleiner als $(m+e)B$, desgleichen ist qA gröſser als mA.

Nun nehme man an, A und B wachsen und A gehe zuerst in qA über, so muſs nothwendig, weil nach der Voraussetung bewiesen werden kann, daſs für alle ganze Zahlen und Brüche, wie q, B in das Gleichvielfache übergeht, qB aus B werden. Ginge nun weiter A von qA in mA über, so müſste qB in $(m+e)B$ übergehen, weil nach der Voraussetzung, wenn mA aus A wird, B in $(m+e)B$ übergeht. Aber qA ist gröſser als mA, hingegen qB ist kleiner als $(m+e)B$, also würde die eine Gröſse A von qA nach mA abnehmen, während die andere von qB nach $(m+e)A$ wächst. Dieses ist der Voraussetzung entgegen, weil die Gröſsen gleichförmig zusammengehören, also immer nur zugleich wachsen und abnehmen sollen, nie abwechselnd. Also ist es unmöglich, daſs B in etwas Gröſseres als mB übergeht, während A von A nach mA kommt.

Ganz auf dieselbe Art wird bewiesen, daſs aus B nichts Kleineres als mB werden kann, wenn aus A, mA wird. Also muſs nothwendig immer B in $mB = Q$ übergehen, wenn $mA = P$ aus A wird; auch wenn m irrational ist, daſs heiſst: auch dann sind P und Q Gleichvielfache von A und B. Folglich gilt eine Gleichvielfachheit, die für gleichförmig zusammengehörige commensurable Gröſsen bewiesen wird, auch ohne Ausnahme für gleichförmig zusammengehörige incommensurable Gröſsen *).

*) Man pflegt gewöhnlich diesen Satz bei jedem einzelnen Falle, wo er vorkommt, besonders zu beweisen. Da aber der Beweis immer der nemliche ist, und also nur wiederholt werden muſs, übrigens aber der Satz häufig vorkommt, so scheint es besser, ihn, wie hier, ein für allemal aufzustellen.

160.

Lehrsatz. *Wenn, wie vorhin,* A *und* B *gleichförmig zusammengehörige Gröfsen sind, die nach irgend einem Gesetz von einander abhängen, und* P *ist der letzte, äufserste Werth von* A, *den* A *nicht überschreiten kann, also eine Grenze für* A, *der zu dem Werth* P *von* A *gehörige Werth von* B *aber ist* Q, *so ist auch* Q *eine* Grenze *für* B, *das heifst: wenn* A *und* B *zugleich wachsen und* P *ist das gröfste* A, *so ist der zu diesem Werth* P *von* A *gehörige Werth* Q, *von* B *auch das gröfste* B, *und wenn* A *und* B *zugleich abnehmen und* P *ist das kleinste* A, *so ist der zu* P *gehörige Werth* Q *von* B *auch das kleinste* B.

Beweis. Im ersten Falle wächst A immerfort, bis zu P, und B mit A. Wäre nun der zu dem gröfsten Werth P von A gehörige Werth Q von B nicht das gröfste B, so müfste B irgendwo abgenommen haben, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil A und B nur zugleich wachsen sollen. Also ist Q das gröfste von allen B.

Im zweiten Falle nimmt A immerfort ab bis zu P und B mit A. Wäre nun der zu dem kleinsten Werthe P von A gehörige Werth Q von B nicht das kleinste B, so müfste B irgendwo zugenommen haben, welches der Voraussetzung entgegen ist, weil A und B nur zugleich abnehmen sollen. Also ist Q das kleinste von allen B.

161.

Lehrsatz. *Wenn* a *und* b *die Zahlen Ausdrücke zweier zusammenstofsenden Seiten eines Parallelogramms von beliebigem Winkel, also die Zahlen der willkührlich angenommenen Linien-Einheit in den beiden Seiten sind, so ist das Product* a . b *der Zahlen-Ausdruck des Flächen-Inhalts das Parallelogramms, nemlich die Zahl der Flächen-Einheiten in der Fläche desselben, welche Einheit ein Rhomboïd mit den Seiten* 1 *und dem Winkel des Parallelogramms ist.*

Beweis. Die willkührlich angenommene Linien-Einheit sey $AE = AG = 1$ (Fig. 101.) und AF ein Parallelogramm, also ein Rhomboïd, so ist dieses Rhomboïd die Flächen-Einheit. Ist nun EP mit AC parallel, so gehören zu beliebigen gleichen Theilen der Linie AC, wie $AG = GM$ etc. oder auch $AQ = QS$ etc., gleiche

Parallelogramme AF, GN etc. oder AR, QT etc.; denn die Seiten und Winkel dieser Parallelogramme sind gleich (§. 83.). Ist also b eine ganze Zahl oder ein Bruch, so wird durch eben diese Zahl b auch die Fläche des Parallelogramms AP ausgedrückt, weil zu jeder Linien-Einheit AG eine Flächen-Einheit AF gehört. Aber die Fläche AP wächst mit der Linie b zugleich. Also sind die Fläche AP und die Linie AC gleichförmig zusammengehörige Größsen. Folglich wird, weil für jedes beliebige commensurabele b, die Fläche $AF = 1$ mit $AG = 1$ zugleich in $AP = b$ und $AC = b$ übergeht, die Fläche AP auch dann noch durch b ausgedrückt, wenn b incommensurabel ist (§. 159.). Geht nun ferner $AE = 1$ in $AB = a$ über, so geht die Fläche $AP = b$, in so fern a commensurabel ist, in $AD = a.b$ über, weil zu jeder Einheit $AE = EH$ etc. der Linie AB ein gleiches Parallelogramm $AP = EI = HL$ etc. von b Flächen-Einheiten gehört (§. 83.). Nun wächst die Fläche AD mit der Linie $AB = a$ immer zugleich. Also sind wieder die Fläche und die Linie gleichförmig zusammengehörige Grösen. Folglich wird, weil für jedes beliebige commensurable a die Fläche $AP = b$, mit $AE = 1$ zugleich, in das $a$fache übergeht, die Fläche AD auch dann noch durch $a.b$ ausgedrückt, wenn a incommensurabel ist. Die Zahl der Flächen-Einheiten AF in dem Parallelogramme AD ist also in allen Fällen, die Zahlen a und b der Linien-Einheiten in den Seiten AB und AC mögen ganze Zahlen, oder Brüche, oder incommensurabel seyn, dem Producte $a.b$ der Zahlen a und b gleich, und man findet sie, wenn man diese Zahlen mit einander multiplicirt.

Wenn z. B. $AB = 5\,AE = 5$ und $AC = 3\,AG = 3$ ist, so ist das Parallelogramm $AD = 5.3\,AF = 15\,AF = 15$.

Wenn $AB = \frac{11}{2}.AE = \frac{11}{2}$, $AC = \frac{10}{3}.AG = \frac{10}{3}$ ist, so ist das Parallelogramm $AD = \frac{11}{2}.\frac{10}{3}\,AF = \frac{110}{6}\,AF = \frac{55}{3}\,AF = \frac{55}{3}$.

Wenn $AB = 13\frac{1}{5}.AE = 13\frac{1}{5}$, $AC = 10\frac{1}{3}.AG = 10\frac{1}{3}$ ist, so ist das Parallelogramm $AD = 13\frac{1}{5}.10\frac{1}{3}\,AF = 13\frac{1}{5}.10\frac{1}{3}$ u. s. w.

162.

Zusätze I. *Wenn das Parallelogramm rechtwinklig ist, so ist die zugehörige Flächen-Einheit* AF (Fig.

(Fig. 101.) *ein Quadrat. Also findet man die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Rechteck, wenn man die Zahlen der Linien-Einheiten in den beiden Seiten mit einander multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.*

II. *Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Quadrat also findet man, wenn man die Zahl der Längen-Einheiten in den Seiten mit sich selbst multiplicirt, die Zahl mag ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.*

III. *Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Parallelogramm findet man, wenn man die Zahl der Linien-Einheiten in Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.*

Denn das Parallelogramm ist so grofs als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 115. I.).

IV. *Die Zahl der Quadrat-Einheiten in einem Dreieck findet man, wenn man die Zahlen der Linien-Einheiten in Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und davon die Hälfte nimmt, oder auch, wenn man die Zahl der Linien-Einheiten in der halben Grundlinie mit denen in der ganzen Höhe, oder die Zahl der Linien-Einheiten in der ganzen Grundlinie mit denen in der halben Höhe multiplicirt, die Zahlen mögen ganz, oder gebrochen, oder incommensurabel seyn.*

Denn das Dreieck ist halb so grofs, als ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 117. I.).

163.

Anmerkung. Der Kürze wegen pflegt man die Zahl der Quadrat-Einheiten in einer Fläche blos Fläche oder Inhalt, und die Zahl der Linien-Einheiten in einer Linie blos Linie zu nennen, und sagt also z. B. der Inhalt eines Rechtecks werde gefunden, wenn man seine Seiten mit einander multiplicirt, worunter die Zahlen der Flächen- und Linien-Einheiten verstanden werden; denn Linien kann man nicht mit einander multipliciren, sondern nur Zahlen.

164.

Lehrsatz. *Die Flächen zweier Parallelogramme, oder zweier Rechtecke, oder zweier Dreiecke und ihre Grundlinien sind von einander Gleichvielfache, wenn die Figuren gleiche Höhe haben, und haben sie gleiche Grundlinien, so sind ihre Flächen und ihre Höhen von einander Gleichvielfache.*

Beweis. Denn die gleiche Höhe zweier Parallelogramme, oder Rechtecke, oder Dreiecke sey b, die Grundlinie des ersten sey a, des zweiten c, so sind die Inhalte der Parallelogramme oder Rechtecke gleich ab und cb, und die Inhalte der Dreiecke gleich $\frac{1}{2}ab$ und $\frac{1}{2}cb$ (§. 162.). Nun ist

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c} \text{ und } \frac{\frac{1}{2}ab}{\frac{1}{2}cb} = \frac{a}{c},$$

also sind die Inhalte und die Grundlinien Gleichvielfache. Auf dieselbe Weise wird der Satz bewiesen, wenn die Grundlinien gleich und die Höhen verschieden sind.

165.

Lehrsatz. *Summen und Unterschiede von Parallelogrammen oder Dreiecken von beliebigen gleichen oder ungleichen Winkeln und Grundlinien, aber gleichen Höhen, sind so groſs als ein Parallelogramm oder Dreieck von eben der Höhe, dessen Grundlinie so groſs ist als Summe und Unterschied der Grundlinien der einzelnen Parallelogramme oder Dreiecke. Eben so verhält es sich mit Parallelogrammen oder Dreiecken von gleichen Grundlinien und verschiedenen Höhen.*

Beweis. Die gleiche Höhe der Parallelogramme oder Dreiecke sey h, ihre Grundlinien sollen a, b, c etc. seyn, so sind die Inhalte der einzelnen Parallelogramme ah, bh, ch etc., und die Inhalte der Dreiecke $\frac{1}{2}ah, \frac{1}{2}bh, \frac{1}{2}ch \ldots$ (§. 162.). Der Inhalt eines Parallelogramms von gleicher Höhe, dessen Grundlinie, Summe oder Unterschied der einzelnen Grundlinien ist, ist aber gleich $(a+b+c\ldots)h$ und $(a-b)h$. Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist $\frac{1}{2}(a+b+c\ldots)h$ und $\frac{1}{2}(a-b)h$. Diese Inhalte sind der Summe oder dem Unterschiede der einzelnen Parallelogramme und Dreiecke gleich, denn es ist

$$(a+b+c\ldots)h = ah+bh+ch\ldots \text{ und}$$
$$(a-b)h = ah-bh,$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b+c\ldots)h = \tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}bh + \tfrac{1}{2}ch\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b)h = \tfrac{1}{2}ah - \tfrac{1}{2}bh.$$

Der Beweis für den Fall gleicher Grundlinien und verschiedener Höhen ist dem vorigen gleich.

166.

Anmerkung. **Die Sätze (§. 119. II. III. IV.) findet man hier, wie nachstehend:**

I. *Das Quadrat über der Summe zweier beliebigen graden Linien ist so groſs als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien und des zwiefachen Rechtecks unter den nemlichen Linien; und umgekehrt.*

Denn wenn die beiden Linien a und b sind, so ist ihre Summe $a+b$. Ein Quadrat aber, dessen Seite $a+b$ ist, ist gleich $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$.

II. *Das Quadrat über dem Unterschiede zweier beliebigen Linien ist so groſs als die Summe der Quadrate der einzelnen Linien, weniger dem zwiefachen Rechteck unter den nemlichen Linien; und umgekehrt.*

Denn wenn die beiden Linien a und b sind, so ist ihr Unterschied $a-b$. Ein Quadrat mit der Seite $a-b$ aber ist gleich $(a-b)(a-b) = a^2 + b^2 - 2ab$; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$.

III. *Ein Rechteck, dessen eine Seite die Summe und dessen andere der Unterschied zweier Linien ist, ist so groſs als der Unterschied der Quadrate der beiden Linien; und umgekehrt.*

Denn wenn die beiden Linien a und b sind, so ist ihre Summe $a+b$ und ihr Unterschied $a-b$. Der Inhalt eines Rechtecks aber, dessen Seiten $a+b$ und $a-b$ sind, ist $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; welches der Satz ist.

Umgekehrt ist auch $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

167.

Zusatz. Den Inhalt eines Trapezes findet man, wenn man die Summe der parallelen Seiten mit der Höhe multiplicirt und davon die Hälfte nimmt, oder auch, wenn man, schon vor der Multiplication, von einem der Factoren die Hälfte nimmt und diese Hälfte mit dem andern Factor multiplicirt.

Denn die Fläche eines Trapezes *ABCD* (Fig. 102.) ist gleich der Summe der Flächen zweier Dreiecke *ABD* und *ACD* von gleicher Höhe, deren Inhalte also zusammen der Hälfte des Products der Summe ihrer Grundlinien *AB* und *CD* in ihre gemeinschaftliche Höhe (das Perpendikel zwischen den Parallelen) gleich sind.

168.

Anmerkung. Wenn beide Seiten eines Parallelogramms, z. B. eines Rechtecks, positiv sind, so ist auch der Inhalt positiv. Ist eine Seite negativ, so ist der Inhalt negativ; sind aber beide Seiten negativ, so ist der Inhalt wieder positiv.

Dieses folgt aus den Regeln der Multiplication von Zahlen (Rechenkunst §. 117.). Denn, wenn die beiden Seiten des Rechtecks $+a$ und $+b$ sind, so ist der Inhalt $(+a).(+b)$ gleich $+ab$. Sind die Seiten $+a$ und $-b$, oder $-a$ und $+b$, so ist der Inhalt $(+a).(-b)$ gleich $-ab$, oder $(-a).(+b)$ ebenfalls gleich $-ab$. Sind hingegen die Seiten $-a$ und $-b$, so ist der Inhalt $(-a).(-b)$ gleich $+ab$ (Rechenkunst §. 117.).

An der Figur lassen sich diese Resultate, wie folgt, sehen. Es sey *A* (Fig. 103.) der Anfangs-Punct der Seiten des Rechtecks. Nach der rechten Hand und nach oben sollen die positiven Seiten gerechnet werden; so muſs nothwendig auch der positive Inhalt innerhalb *BAD* liegen, und es ist also z. B. das Rechteck *AC* nothwendig positiv.

Soll nun ein anderes Rechteck z. B. dieselbe Höhe, aber eine negative Grundlinie haben, so muſs man, nach dem Sinne des Negativen, etwas Gröſseres, als sie selbst ist, in der Richtung des Positiven, zu ihr hinzuthun müssen, um eine positive Grundlinie zu bekommen. Eine solche Grundlinie also würde z. B. *AF* seyn; denn zu dieser muſs man, von *F* an, nach der Rechten zu, etwas Gröſseres als *AF*, z. B. *FD* hinzuthun, um eine positive Grundlinie *AD* zu bekommen. Das zu der Grundlinie *AF* gehörige Rechteck ist *AE*. Dieses Rechteck ist aber nothwendig negativ, weil man auch zu ihm ein Gröſseres, als es selbst ist, namentlich das Rechteck *FC*, nach der Rechten zu hinzuthun muſs, um das zu der positiven Grundlinie *AD* gehörige Rechteck *AC* zu bekommen. Also ist ein Rechteck unter einer negativen Grundlinie und einer positiven Höhe negativ.

Eben so verhält es sich, wenn die Rechtecke gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen haben sollen. Soll ein Rechteck *AI* mit der nemlichen Grundlinie *AD* die negative Höhe *AH* haben, so ist es nothwendig negativ, denn man mufs, nach oben zu, das gröfsere Rechteck *HC* hinzuthun, um das zu der positiven Höhe *AB* gehörige positive Rechteck *AC* zu bekommen.

Anders aber verhält es sich, wenn Grundlinien und Höhen, also beide Seiten zugleich negativ seyn sollen, und wenn also z. B. von dem Rechteck *AG* die Rede ist. Thut man zu der negativen Höhe *AH* dieses Rechtecks die positive Linie *HB* hinzu, so bekommt man die positive Höhe *AB*, und das zu dieser positiven Höhe und der negativen Grundlinie *AF* gehörige Rechteck *AE* ist negativ. Eben so ist das zu der positiven Höhe *BH* und negativen Grundlinie *AF* gehöriges Rechteck *HE*, wie vorhin bewiesen, negativ. Wäre nun das Rechteck *AG* negativ, so würde man, wenn man zu demselben das negative Rechteck *HE* hinzuthäte, nicht das negative Rechteck *AE* allein, wie es seyn soll, sondern aufser demselben noch das negative Rechteck *AG*, doppelt bekommen. Eben so verhält es sich, wenn man zu der negativen Grundlinie *AF* die positive Linie *FD* und zu dem Rechteck *AG* das negative Rechteck *GD* hinzuthäte. Also kann das Rechteck *AG* nicht negativ seyn, sondern es ist vielmehr positiv.

169.

Lehrsatz. I. *Die Seiten eines beliebigen Dreiecks sind von den ähnlichliegenden Seiten eines beliebigen andern gleichwinkligen Dreiecks Gleichvielfache. Desgleichen sind ähnlichliegende Seiten gleichwinkliger Dreiecke von einander Gleichvielfache.*

Z. B. wenn *ABG* (Fig. 104. I. und II.) und *DEF* (Fig. 104. III. und IV.) gleichwinklige Dreiecke sind, so ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \frac{b}{c} = \frac{e}{f}, \frac{c}{a} = \frac{f}{d}.$$

Beweis. Man lege z. B. die Seite $ED = d$ in *BG*, so fällt $EF = e$ in *BH*, weil die Winkel *B* und *E* gleich sind, und die Dreiecke *GBH* und *DEF* sind gleich; denn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel sind in dem einen so grofs, als in dem andern. Also sind

die Winkel GHB und ACB gleich; denn, weil die Dreiecke GBH und DEF gleich sind, so sind die Winkel GHB und DFE gleich, und nach der Voraussetzung sollen die Winkel DFE und ACB gleich seyn: folglich ist GH mit AC parallel. Nun haben die Dreiecke AGH und CGH gleiche Grundlinie GH und gleiche Höhen zwischen den Parallelen AC und GH, also sind sie gleich grofs (§. 117. III.), folglich sind auch, wenn man zu beiden das Dreick GBH hinzuthut, die Dreiecke ABH und GBC gleich grofs.

Aber die Dreiecke ABH und GBH haben über den Grundlinien AB und GB einerlei Höhe, denn sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitel H. Also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien von einander Gleichvielfache (§. 164.), das heifst, es ist

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle GBH} = \frac{AB}{GB} = \frac{AB}{ED} = \frac{a}{d}.$$

Eben so haben die Dreiecke CBG und HBG, über den Grundlinien CB und HB, einerlei Höhe, denn sie haben einen gemeinschaftlichen Scheitel G. Also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien ebenfalls Gleichvielfache (§. 164.), d. h. es ist

$$\frac{\triangle CBG}{\triangle HBG} = \frac{b}{e}.$$

Nun aber sind die Dreiecke ABH und CBG, wie vorhin bewiesen, gleich grofs, und das Dreieck GBH oder HBG ist sich selbst gleich. Also ist

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle GBH} = \frac{\triangle CBG}{\triangle HBG};$$

folglich ist auch

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e},$$

d. h. die gleichliegenden Seiten a, d und b, e sind von einander Gleichvielfache.

Auf dieselbe Weise wird, wenn man die andern Winkel in einander legt, bewiesen, dafs auch die andern gleichliegenden Seiten von einander Gleichvielfache sind. Also ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}, \quad \frac{b}{e} = \frac{c}{f}, \quad \frac{c}{f} = \frac{a}{d},$$

oder, zusammengenommen,

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f};$$

welches das Erste war.

Aus diesen Gleichungen folgt weiter das Zweite, nemlich:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \quad \frac{b}{c} = \frac{e}{f}, \quad \frac{c}{a} = \frac{f}{d}.$$

II. *Wenn ein Winkel eines Dreiecks so groſs ist, als ein Winkel eines andern und die beiden Seiten, die ihn einschlieſsen, in dem einen Dreiecke sind von denen im andern, oder auch beide Seiten-Paare von einander Gleichvielfache, so sind die Dreiecke gleichwinklig und auch die andern Seiten sind von einander Gleichvielfache.*

Z. B. wenn in (Fig. 104.) $E = B$ und $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$, oder, was das nemliche ist, $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ ist, so sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig; auch ist $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

Beweis. Man lege die Seite $ED = d$ in BG, so fällt die Seite $EF = e$ in die Seite BC, weil die Winkel B und E gleich seyn sollen. Fiele nun der Punct F nicht in H, sondern vielleicht in den Punct K, so daſs $BK = e$ und KG nicht mit AC parallel wäre, sondern GH wäre mit AC parallel, so könnte auch nicht $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ seyn, denn wie in (I.) bewiesen, ist $\frac{a}{b} = \frac{d}{BH}$. Also kann F nur in H fallen und GH muſs mit AC parallel seyn. Dann aber sind, vermöge der Parallelen, die Winkel bei G und H den Winkeln bei A und C gleich. Nun sind die Dreiecke GBH und DEF gleich, weil zwei Seiten und der Winkel, den sie einschlieſsen, in dem einen so groſs sind, als in dem andern. Also sind auch die Winkel C und A den Winkeln F und D gleich, und folglich sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig; woraus auch, vermöge (I.), $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ folgt.

III. *Wenn zwei Seiten eines Dreiecks von zwei Seiten eines andern, oder auch beide von einander Gleichvielfache sind, und der der gröſsern von den beiden Seiten gegenüberliegende Winkel ist in dem einen Dreieck so groſs als in dem andern, so sind die Dreiecke gleichwinklig*

und auch die übrigen Seiten sind von einander Gleichvielfache.

Z. B. wenn in (Fig. 104.) $a > b$, $d > e$, $C = F$ und $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ ist, so sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig, und es ist

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Beweis. Es sey $BH = EF$ und HG mit AC parallel, so sind die Dreiecke GBH und ABC gleichwinklig; also ist zu Folge (I.) $\frac{a}{BG} = \frac{b}{BH}$. Es war aber $BH = EF = e$. Also ist $\frac{a}{BG} = \frac{b}{e}$. Nun soll nach der Voraussetung $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ seyn. Also ist $BG = d = ED$. In den Dreiecken GBH und DEF sind also die Seiten BG gleich d, BH gleich e, und der der gröſsern von ihnen gegenüber liegende Winkel H ist dem Winkel F gleich, weil wegen der Parallelen $H = C$ war und C nach der Voraussetzung gleich F seyn soll. Also sind die Dreiecke GBH und DEF gleich (§. 53.). Nun sind die Dreiecke GBH und ABC gleichwinklig. Also sind es auch die Dreiecke DEF und ABC, und folglich ist auch zu Folge (I.) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

IV. *Wenn die drei Seiten eines Dreiecks von den drei Seiten eines andern, oder auch von einander Gleichvielfache sind, so sind die Dreiecke gleichwinklig.*

Z. B. wenn in (Fig. 104.) $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ist, so sind die Dreiecke ABC und DEF gleichwinklig.

Beweis. Es sey $BH = EF$ und GH mit AC parallel, so sind die Dreiecke GBH und ABC gleichwinklig, also ist zu Folge (I.) $\frac{a}{BG} = \frac{b}{BH} = \frac{c}{GH}$. Es war aber $BH = EF = e$. Also ist $\frac{a}{BG} = \frac{b}{e} = \frac{c}{GH}$. Nun soll nach der Voraussetzung $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ seyn. Also ist $BG = d = ED$ und $GH = f = DF$. In den Dreiecken

GBH und *DEF* sind also alle drei Seiten in dem einem so grofs als in dem andern, nemlich $BH = EF = e$, $BG = ED = d$ und $GH = DF = f$. Also sind die Dreiecke *GBH* und *DEF* gleich (§. 52.). Nun sind die Dreiecke *GBH* und *ABC* gleichwinklig. Also sind es auch die Dreiecke *DFF* und *ABC*.

170.

Erklärung. *Es sollen hinfort Winkel, wo es bequem ist, auch durch Nebeneinandersetzen der Zeichen der Länge der Linien, welche sie einschliefsen, in Klammern gestellt, bezeichnet werden, und zwar sowohl, wenn die Linien an den Enden ihrer bestimmten Länge zusammenstofsen, als wenn sie, erst genugsam verlängert, sich begegnen.*

Z. B. der Winkel zwischen zwei graden Linien, deren Länge a und b ist, soll durch (ab) der Winkel zwischen den Linien e und q durch (eq) zwischen x und y durch (xy) u. s. w. bezeichnet werden.

In dem Dreiecke *ABC* (Fig. 104. I.) z. B. würde also der Winkel *A* durch (ac), der Winkel *B* durch (ba), der Winkel *C* durch (cb) bezeichnet werden.

In dem Vieleck (Fig. 105.) würden z. B. (ab) und (ag) die Winkel *ABC* und *BAG*, hingegen, wenn *QRABP*, *DCP*, *DEQ*, *FGR* und *EFS* grade Linien sind, (ac) den Winkel *APD*, (ad) den Winkel *BQD*, (ae) den Winkel *BSE* und (af) den Winkel *BRF* bezeichnen, u. s. w. Sind nicht zusammenstofsende Seiten eines Vielecks parallel, so sind die Winkel, welche sie einschliefsen, und welche immer auf dieselbe Weise bezeichnet werden, Null.

171.

Zusätze. I. *Bedient man sich der Bezeichnung der Winkel (170.) in den Lehrsätzen (169.) von den Dreiecken, und nimmt zwei Dreiecke mit den Seiten* a_1, b_1, c_1 *und* a_2, b_2, c_2 *an, so kann man die Sätze (169.) auch wie folgt ausdrücken.*

1. *Wenn* $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) = (b_2 a_2)$ *und* $(c_1 a_1) = (c_2 c_2)$ *ist, so ist*

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (\S.\ 169.\ I.).$$

2. *Wenn* $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$ *und* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ *ist, so ist*

$$(b_1 c_1) = (b_2 c_2),\ (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und } \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

(§. 169. II.).

3. *Wenn* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$ *und* $b_1 > a_1$ *ist*, *so ist*

$(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$, $(c_1 a_1) = (c_2 a_2)$ *und* $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (§. 169. III.).

4. *Wenn* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ *ist, so ist*

$(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$ *und* $(c_1 a_1) = (c_2 a_2)$ (§. 169. IV.).

II. *Will man die den Seiten* a_1, b_1, c_1 *und* a_2, b_2, c_2 *gegenüberliegenden Winkel durch* $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ *und* $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ *bezeichnen, so sind die Sätze* (§. 169.) *folgende.*

1. *Wenn* $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *und* $\gamma_1 = \gamma_2$ *ist, so ist*
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (§. 169. I.).

2. *Wenn* $\gamma_1 = \gamma_2$ *und* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ *ist, so ist*

$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *und* $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (§. 169. II.).

3. *Wenn* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\alpha_1 = \alpha_2$ *und* $b_1 > a_1$ *ist, so ist*

$\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ *und* $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (§. 169. III.).

4. *Wenn* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ *ist, so ist*
$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *und* $\gamma_1 = \gamma_2$ (§. 169. IV.).

III. *Setzt man, um die Gleichvielfachheit der Längen von Linien-Paaren auszudrücken, z. B.* $\frac{a_1}{a_2} = m$, *also* $a_1 = ma_2$, *wo* m *eine ganze, gebrochene oder irrationale gegebene Zahl seyn kann, so ist, wenn z. B.* $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ *und* $a_1 = ma_2$ *ist, auch* $b_1 = mb_2$. *Bedient man sich dieser Bezeichnung, so sind die Sätze* (§. 169.) *folgende:*

1. *Wenn* $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *und* $\gamma_1 = \gamma_2$, *desgleichen* $a_1 = ma_2$ ist, so ist auch
$b_1 = mb_2$ *und* $c_1 = mc_2$ (§. 169. I.).

2. *Wenn* $\gamma_1 = \gamma_2$, $a_1 = ma_2$ *und* $b_1 = mb_2$ *ist, so ist*
$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *und* $c_1 = mc_2$ (§. 169. II.).

3. *Wenn* $a_1 = ma_2$, $b_1 = mb_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ *und* $b_1 > a_1$ *ist, so ist*

$$\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2 \text{ und } c_1 = mc_2 \ (\S.\ 169.\ \text{III.}).$$

4. *Wenn* $a_1 = ma_2$, $b_1 = mb_2$, $c_1 = mc_2$ *ist, so ist*

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2 \text{ und } \gamma_1 = \gamma_2 \ (\S.\ 169.\ \text{IV.}).$$

172.

Anmerkung. **Die Sätze von Dreiecken (§. 169.), in welchen von der Zahl Gebrauch gemacht wird, treten an die Stelle der Sätze (§. 133.), welche auf die Anschauung allein gegründet sind, und ihre Resultate stimmen mit jenen wie gehörig überein.**

1. *Der Satz* (§. 169. I.) *nemlich giebt z. B., wie* (§. 171. I.) *ausgedrückt, Folgendes:*

Wenn $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$, $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$ *und* $(c_1 a_1) = (c_2 a_2)$ *ist, so ist*

$$a_1.b_2 = a_2.b_1,\ b_1.c_2 = b_2.c_1 \text{ und } c_1.a_2 = a_1.c_2;$$

die Producte $a_1.b_2$, $a_2.b_1$ *etc. drücken aber die* F l ä c h e n d e r R e c h t e c k e u n t e r d e n S e i t e n a_1 *und* b_2, a_2 *und* b_1 *etc. aus. Also giebt der Satz* (§. 169. I.) *das Nemliche wie der Satz* (§. 133. I.), *und folglich stimmen die beiden Sätze überein.*

2. *Der Satz* (§. 169. II.) *giebt, wie* (§. 171. I.) *ausgedrückt, Folgendes:*

Wenn $(a_1 b_1) = (a_2 b_2)$ *und* $a_1.b_2 = a_2.b_1$ *ist, so ist*

$$(b_1 c_1) = (b_2 c_2),\ (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und}$$
$$b_1.c_1 = b_2.c_2,\ c_1.a_1 = c_2.a_2.$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. II.); *also stimmen die beiden Sätze überein.*

3. *Der Satz* (§. 169. III.) *giebt, wie* (§. 171. I.) *ausgedrückt, Folgendes:*

Wenn $a_1.b_2 = a_2.b_1$, $(b_1 c_1) = (b_2 c_2)$ *und* $b_1 > a_1$ *ist, so ist*

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2),\ (c_1 a_1) = (c_2 a_2) \text{ und}$$
$$b_1.c_2 = b_2.c_1 \text{ und } c_1.a_2 = a_1.c_2.$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. III.). *Also stimmen die beiden Sätze überein.*

4. *Der Satz* (§. 169. IV.) *giebt, wie* (§. 171. I.) *ausgedrückt, Folgendes:*

Wenn $a_1.b_2 = a_2.b_1$, $b_1.c_2 = b_2.c_1$ *und* $c_1.a_2 = c_2.a_1$ *ist, so ist*

$$(a_1 b_1) = (a_2 b_2),\ (b_1 c_1) = (b_2 c_2),\ (c_1 a_1) = (c_2 a_2).$$

Das Nemliche giebt der Satz (§. 133. IV.). Also stimmen die beiden Sätze überein.

Man kann also auch nunmehr die obigen Sätze (§. 134. bis 144.), in welchen Dreiecke vorkommen, von deren Seiten und Winkeln das Nemliche vorausgesetzt wird, wie in einem der vier Sätze (§. 133.), und welche also auf den Sätzen (§. 133.) beruhen, auf die Sätze (§. 169.) gründen und folglich dieselben nunmehr auch mit Hülfe der Zahl beweisen. Diese Art des Beweises ist die, welche man gewöhnlich durch geometrische Proportionen nennt; allein sie ist nichts anders als die Beweis-Art durch die Zahl, denn die geometrischen Proportionen drücken die Gleichvielfachheit aus und die Gleichvielfachheit wird von der Zahl ausgedrückt.

173.

Anmerkung. Unter den vielen Beweisen des pythagorischen Lehrsatzes ist noch folgender, der jetzt auf Zahlen beruht, zu bemerken.

Das Dreieck ABC (Fig. 106.) sey in A rechtwinklig und AD auf BC senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ADB und BAC, weil aufser dem rechten Winkel der Winkel B in dem einen so grofs ist als in dem andern, gleichwinklig. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke ADC und BAC gleichwinklig. Aehnlichliegende Seiten sind in den beiden ersten c, a und a, q, und in den beiden andern c, b und b, s. Also ist vermöge (§. 171.)

$$cq = a^2 \text{ und } cs = b^2,$$

die Summe hiervon ist

$$c(q + s) = a^2 + b^2.$$

Es ist aber $q + s = c$. Also ist

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

welches der pythagorische Lehrsatz ist; denn die Gleichung drückt aus, dafs das Quadrat der Hypothenuse gleich ist der Summe der Quadrate der Catheten.

Es folgt daraus

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ und } b^2 = c^2 - a^2.$$

Die Seiten selbst durch einander ausgedrückt sind folgende:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)},\quad a = \sqrt{(c^2 - b^2)},\quad b = \sqrt{(c^2 - a^2)}.$$

174.

Lehrsatz. Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks a, b und c sind, so ist der Inhalt des Dreiecks:

1. $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}$ *),
oder auch
2. $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{((a^2+c^2)^2 - (a^2-c^2)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2)}$
oder auch
3. $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4]}$.

Beweis. Das Perpendikel AD in dem Dreiecke ABC (Fig. 107.) sey p_1, so ist zu Folge (§. 173.)
$$BD = \sqrt{(c^2 - p_1^2)} \text{ und } DC = \sqrt{(b^2 - p_1^2)},$$
also, da $BD + DC = BC = a$ ist,
$$4. \quad a = \sqrt{(c^2 - p_1^2)} + \sqrt{(b^2 - p_1^2)}.$$
Daraus folgt $a - \sqrt{(c^2 - p_1^2)} = \sqrt{(b^2 - p_1^2)}$, und wenn man diese Ausdrücke zu beiden Seiten mit sich selbst multiplicirt,
$$a^2 - 2a\sqrt{(c^2 - p_1^2)} + c^2 - p_1^2 = b^2 - p_1^2, \text{ oder}$$
$$5. \quad a^2 + c^2 - b^2 = 2a\sqrt{(c^2 - p_1^2)}.$$
Multiplicirt man wieder auf beiden Seiten mit sich selbst, so findet man
$$(a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2c^2 - 4a^2p_1^2, \text{ oder}$$
$$6. \quad 4a^2p_1^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \text{ oder}$$
$$4a^2p_1^2 = (2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2), \text{ oder}$$
$$4a^2p_1^2 = (b^2 - (a-c)^2)((a+c^2) - b^2), \text{ oder}$$
$$4a^2p_1^2 = (b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b), \text{ oder}$$
$$7. \quad 2ap_1 = \sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}.$$
Nun ist der Inhalt des Dreiecks gleich $\frac{1}{2}BC.AD = \frac{1}{2}ap_1$, also ist derselbe gleich
$$8. \quad \triangle = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]};$$
welches der erste Ausdruck des Lehrsatzes ist. Derselbe ist **zur Berechnung durch Logarithmen bequem, da er die Wurzel eines blofsen Products von Factoren ist.**

Da ferner $4a^2c^2$ so viel ist als
$$9. \quad (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2,$$
welches nemlich $a^4 + 2a^2c^2 + c^4 - a^4 + 2a^2c^2 - c^4 = 4a^2c^2$ ausmacht, so ist das obige $4a^2p_1^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ so viel als
$$10. \quad 4a^2p_1^2 = (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2,$$
woraus für den Inhalt $\frac{1}{2}ap_1$.
$$10. \quad \triangle = \frac{1}{4}\sqrt{[(a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}$$
folgt. Dieses ist der zweite Ausdruck des Lehrsatzes. Derselbe ist **zur Berechnung** dann **bequem, wenn**

*) Dieser Satz wird gewöhnlich dem Tartalea zugeschrieben. Er ist aber vielleicht schon im achten Jahrhundert, von Hero dem Jüngern gefunden.

man **Tafeln der zweiten Potestäten der natürlichen Zahlen hat.** Man kann alsdann, weil der Ausdruck blos aus zweiten Potestäten zusammengesetzt ist, den Inhalt blos durch die Tafeln, ohne weitere Rechnung finden.

Endlich folgt aus der obigen Gleichung (6.) $4a^2p_1^2$ oder

$$\triangle^2 = 4a^2c^2 - (a^4 + c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2), \text{ oder}$$
$$\triangle^2 = 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - c^4 - b^4, \text{ oder}$$
$$16.\ \triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4]};$$

welches der dritte Ausdruck des Lehrsatzes ist.

175.

Lehrsatz. Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks, wie vorhin, durch a, b, c, die Halbmesser der Seiten und Ecken aber durch q und r bezeichnet werden, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$1.\ \triangle = \frac{abc}{4r} \text{ und}$$
$$2.\ \triangle = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,q.$$

Beweis. M (Fig. 107.) sey der Mittelpunct der Ecken des Dreiecks, so das also $AM = BM = CM = r$ ist, EMC sey eine grade Linie und $EM = MC$, so ist M auch der Mittelpunct der Ecken des Dreiecks AEC, denn es ist $AM = CM = EM$. Also sind die Winkel E und B beide die Hälften des Winkels AMC (§. 68.), und folglich sind sie **einander gleich**. Ferner ist der Winkel EAC ein rechter (§. 69. I.) und in dem Dreieck ABD ist der Winkel D ein rechter. Also sind in dem Dreieck AEC zwei Winkel so groſs als in dem Dreieck ABD. Folglich sind diese Dreiecke **gleichwinklig**. Aehnlichliegende Seiten sind EC, AB und AC, AD. Also ist $\frac{AB}{EC} = \frac{AD}{AC}$, das heiſst $\frac{c}{2r} = \frac{p_1}{b}$. Daraus folgt $p_1 = \frac{bc}{2r}$. Nun ist der Inhalt des Dreiecks gleich $\triangle = \frac{1}{2}ap_1$, also ist $\triangle = \frac{1}{2}a \cdot \frac{bc}{2r}$, oder

$$\triangle = \frac{abc}{4r};$$

welches das **Erste** war.

Wenn ferner N der Mittel-Punct der Seiten des Dreiecks ABC ist und NF, NG und NH sind Perpen-

dikel aus N auf die Seiten des Dreiecks, so ist $NF = NG = NH = q$. Also ist der Inhalt des Dreiecks BCN gleich $\frac{1}{2}aq$, der Inhalt des Dreiecks CNA gleich $\frac{1}{2}bq$ und der Inhalt des Dreiecks ANB gleich $\frac{1}{2}cq$. Diese drei Dreiecke zusammen machen das Dreieck ABC aus; also ist der Inhalt des gegebenen Dreiecks $\triangle = \frac{1}{2}aq + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cq$ oder

$$\triangle = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\,q;$$

welches das Zweite war.

176.

Zusätze. I. *Wenn die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks wie vorhin durch* a, b, c *bezeichnet werden, so ist der Halbmesser der Ecken des Dreiecks zu Folge* (§. 175. 1.) $r = \frac{abc}{4\triangle}$, *und wenn man statt* $\triangle$ *den Ausdruck des Inhalts durch die Seiten* (§. 174. 1.) *setzt,*

$$r = \frac{abc}{\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}},$$

welches der Ausdruck des Halbmessers der Ecken eines beliebigen Dreiecks durch die drei Seiten ist.

II. *Für* q *findet man aus* (§. 175. 2.) $q = \frac{2\triangle}{a+b+c}$, *also, wenn man wieder den Ausdruck von* $\triangle$ *durch* a, b *und* c *aus* (§. 174. 1.) *setzt,*

$$q = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}}{a+b+c},$$

oder

$$q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{a+b+c}\right)};$$

welches der Ausdruck des Halbmessers der Seiten eines beliebigen Dreiecks durch die drei Seiten ist.

177

Zusatz. Der Inhalt eines beliebigen Dreiecks läfst sich auch leicht durch die drei Perpendikel aus den Ecken auf die gegenüber liegenden Seiten und durch die drei graden Linien durch die Ecken und die Mitten der gegenüber liegenden Seiten ausdrücken.

Bezeichnet man nemlich die Perpendikel AD_1, BD_2, BD_3 (Fig. 107.) *durch* p_1, p_2, p_3, *so ist der Inhalt des Dreiecks* ABC

$$1.\quad \triangle = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{\sqrt{\left\{\begin{matrix}(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)(p_1p_2+p_1p_3-p_2p_3)\\(p_1p_2-p_1p_3+p_2p_3)(p_1p_3+p_2p_3-p_1p_2)]\end{matrix}\right\}}}.$$

Bezeichnet man die graden Linien AK_1, BK_2, CK_3 *durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seiten durch* k_1, k_2, k_3, *so ist der Inhalt*

2. $\Delta = \frac{1}{3}\sqrt{[(k_1+k_2+k_3)(k_1+k_2-k_3)(k_1-k_2+k_3)(k_2+k_3-k_1)]}$.

Den ersten Ausdruck findet man weil $2\Delta = ap_1 = bp_2 = cp_3$ und also $a = \frac{2\Delta}{p_1}$, $b = \frac{2\Delta}{p_2}$, $c = \frac{2\Delta}{p_3}$ ist. Setzt man dieses in den Ausdruck des Inhalts $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{((a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a))}$ (1. §. 174.), so erhält man

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\left[\left(\frac{2\Delta}{p_1}+\frac{2\Delta}{p_2}+\frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_1}+\frac{2\Delta}{p_2}-\frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_1}-\frac{2\Delta}{p_2}+\frac{2\Delta}{p_3}\right)\left(\frac{2\Delta}{p_2}+\frac{2\Delta}{p_3}-\frac{2\Delta}{p_1}\right)\right]},$$

oder

$$\Delta = \Delta^2\sqrt{\left[\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)\left(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_1}\right)\right]},$$

oder wenn man mit $p_1^2\, p_2^2\, p_3^2$ multiplicirt und mit Δ dividirt

$$p_1^2\, p_2^2\, p_3^2 = \Delta\sqrt{[(p_2p_3+p_1p_3+p_1p_2)(p_2p_3+p_1p_3-p_1p_2)\times(p_2p_3-p_1p_3+p_1p_2)(p_1p_3+p_1p_2-p_2p_3)]}$$

woraus der Ausdruck (1.) folgt.

Den zweiten Ausdruck findet man mit Hülfe des Satzes (§. 123.). Vermöge dieses Satzes ist z. B. in dem Dreieck ABK_1

$$AB^2 = BK_1^2 + AK_1^2 + 2\,BK.\,DK_1$$

und in dem Dreieck ACK_1,

$$AC^2 = CK_1^2 + AK^2 - 2\,CK_1\,DK_1,$$

oder weil $BK_1 = CK_1$ ist, indem K_1 in der Mitte der Seite BC liegen soll,

$$AB^2 = BK_1^2 + AK_1^2 + BK_1\,DK_1 \text{ und}$$
$$AC^2 = BK_1^2 + AK_1^2 - BK_1\,DK_1.$$

Die Summe dieser beiden Ausdrücke ist

$$AB^2 + AC^2 = 2BK_1^2 + 2AK_1^2, \text{ oder}$$
$$c^2 + b^2 = 2.\tfrac{1}{4}a^2 + 2k_1^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2k_1^2, \text{ oder}$$

3. $4k_1^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$.

Auf dieselbe Weise findet man für die anderen beiden Linien k_2 und k_3,

4. $4k_2^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$ und

5. $4k_3^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$.

Daraus folgt

6. $8k_1^2+8k_2^2-4k_3^2=4b^2+4c^2-2a^2+4c^2+4a^2-2b^2-2a^2-2b^2+c^2=9c^2$

und auf dieselbe Weise

7. $8k_2^2 + 8k_3^2 - 4k_1^2 = 9a^2$

8. $8k_3^2 + 8k_1^2 - 4k_2^2 = 9b^2$.

Nun ist zu Folge der Gleichung (6.) im Beweise des Satzes (§. 174.) $4a^2p_1^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2$, und weil $\frac{1}{2}ap_1 = \Delta$ ist,

$$16\Delta^2 = 4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2,$$

oder

oder, wenn man mit 9^2 multiplicirt,

$$9. \quad 16.81\,\Delta^2 = 4.9a^2.9c^2 - (9a^2 + 9c - 9b^2)^2.$$

Setzt man hierin die Ausdrücke von $9a^2$, $9b^2$ und $9c^2$ aus (7. 8. und 6.), so findet man

$$16.81\,\Delta^2 = 4(8k_2^2 + 8k_3^2 - 4k_1^2)(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_3^2)$$
$$- (8k_2^2 + 8k_3^2 - 4k_1^2 + 8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_3^2 - 8k_3^2 - 8k_1^2 + 4k_2^2)^2,$$

oder

$$16.81\,\Delta^2 = 4(8k_2^2 + 8k_3^2 - 4k_1^2)(8k_1^2 + 8k_2^2 - 4k_3^2) - (20k_2^2 - 4k_1^2 - 4k_3^2)^2.$$

oder, wenn man mit 16 dividirt,

$$81\,\Delta^2 = 4(2k_2^2 + 2k_3^2 - k_1^2)(2k_1^2 + 2k_2^2 - k_3^2) - (5k_2^2 - k_1^2 - k_3^2)^2,$$

das heisst,

$$81\,\Delta^2 = 16k_1^2k_2^2 + 16k_2^4 - 8k_2^2k_3^2 + 16k_1^2k_3^2 + 16k_2^2k_3^2 - 8k_3^4$$
$$- 8k_1^4 - 8k_1^2k_2^2 + 4k_1^2k_3^2 - 25k_2^4 - k_1^4 - k_3^4$$
$$+ 10k_1^2k_2^2 + 10k_2^2k_3^2 - 2k_1^2k_3^2$$
$$= 18k_1^2k_2^2 + 18k_1^2k_3^2 + 18k_2^2k_3^2 - 9k_1^4 - 9k_2^4 - 9k_3^4,$$

oder

$$9\,\Delta^2 = 2k_1^2k_2^2 + 2k_1^2k_3^2 + 2k_2^2k_3^2 - k_1^4 - k_2^4 - k_3^4, \text{ oder}$$

$$9. \quad \Delta = \tfrac{1}{3}\sqrt{[2k_1^2k_2^2 + 2k_1^2k_3^2 + 2k_2^2k_3^2 - k_1^4 - k_2^2 - k_3^4]}.$$

Die Grösse rechterhand bezeichnet nach (3. §. 174.) $\frac{4}{3}$ von dem Inhalt eines Dreiecks, dessen Seiten k_1, k_2, k_3 sind. Der Inhalt eines solchen Dreiecks aber ist auch zu Folge des ersten Ausdrucks (§. 174.) gleich $\frac{1}{4}\sqrt{[(k_1 + k_2 + k_3)(k_1 + k_2 - k_3)(k_1 - k_2 + k_3)(k_2 + k_3 - k_1)]}$; also ist auch

$$10. \quad \Delta = \tfrac{1}{3}\sqrt{[(k_1+k_2+k_3)(k_1+k_2-k_3)(k_1-k_2+k_3)(k_2+k_3-k_1)]};$$

welches der obige zweite Ausdruck von Δ ist.

178.

Lehrsatz. Wenn man die vier Seiten eines nach den Ecken centrischen Vierecks durch a, b, c, d, *den Inhalt des Vierecks durch* F *und den Halbmesser der Ecken durch* r *bezeichnet, so ist*

$$1. \quad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)]}$$

und

$$2. \quad r = \sqrt{\left[\frac{abcd\left((a^2+b^2+c^2+d^2) + abcd\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\right)\right)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)}\right]}.$$

Ist das Viereck centrisch nach den Ecken und zugleich centrisch nach den Seiten, so ist sein Inhalt

$$3. \quad F_1 = \sqrt{[abcd]}.$$

Beweis. I. Das Viereck $ABCD$ (Fig. 108.) sey centrisch nach den Ecken und BE auf AD, BF auf DC senkrecht, so ist nach (§. 123.) in dem Dreieck ABD,

$$4. \quad BD^2 = a^2 + d^2 + 2AE.d,$$

und in dem Dreieck CBD,

$$5. \quad BD^2 = c^2 + b^2 - 2CF.c.$$

Also ist

$$6. \quad a^2 + d^2 + 2d.AE = b^2 + c^2 - 2c.CF.$$

Nun ist die Summe gegenüberliegender Winkel des Vierecks, z. B. die Summe $A + C$, gleich zwei rechten, weil das Viereck cen-

trisch nach den Ecken seyn soll: also ist der Winkel BAE dem Winkel C gleich. Folglich sind die rechtwinkligen Dreiecke BAE und BCF gleichwinklig, und folglich ist nach (§. 169. I.)

$$7.\quad \frac{CF}{AE} = \frac{b}{a},\ \text{also}\ AE = \frac{a}{b}\,CF.$$

Setzt man dieses in (6.), so findet man

$$a^2 + d^2 + 2d.\frac{a}{b}.CF = c^2 + b^2 - 2c.CF,$$

woraus

$$8.\quad CF = \tfrac{1}{2}b.\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}$$

folgt.

Nun ist $BF = \sqrt{(b^2 - CF^2)}$, also

$$9.\quad BF = b\sqrt{\left[1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]},$$

und weil die rechtwinkligen Dreiecke BAE und BCF gleichwinklig sind, $\frac{BF}{BE} = \frac{b}{a}$, also $BE = \frac{a}{b}.BF$, folglich aus (9.)

$$10.\quad BE = a\sqrt{\left[1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]}.$$

Der Inhalt des Vierecks $ABCD$ ist aber dem Inhalt der beiden Dreiecke CBD und ABD gleich, also gleich $\frac{1}{2}c.BF + \frac{1}{2}d.BE$, folglich ist aus (9. und 10.)

$$F = \tfrac{1}{2}(bc + ad)\sqrt{\left[1 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc}\right)^2\right]},\ \text{oder}$$

$$11.\quad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[4(bc + ad)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2]},\ \text{oder}$$

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(2bc + 2ad + b^2 + c^2 - a^2 - d^2)(2bc + 2ad - b^2 - c^2 + a^2 + d^2)]},$$

oder $F = \frac{1}{4}\sqrt{[((b + c)^2 - (a - d)^2)((a + d)^2 - (b - c)^2)]}$, oder

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b + c + a - d)(b + c - a + d)(a + d + b - c)(a + d - b + c)]},\ \text{oder}$$

$$12.\quad F = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(b + c + d - a)]};$$

welches der Ausdruck (1.) im Lehrsatze ist.

II. Setzt man den Ausdruck von CF aus (8.) in (5.), so erhält man

$$BD^2 = c^2 + b^2 - bc\frac{c^2 + b^2 - a^2 - d^2}{ad + bc},\ \text{oder}$$

$$BD^2 = \frac{(c^2 + b^2)(ad + bc) - bc(c^2 + b^2) + bc(a^2 + d^2)}{ad + bc},\ \text{oder}$$

$$13.\quad BD^2 = \frac{ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2)}{ad + bc}.$$

Nun ist der Halbmesser der Ecken des Vierecks r zugleich der Halbmesser der Ecken der Dreiecke ABD und CBD; also läßt sich der Inhalt dieser Dreiecke nach (§. 175. 1.) auch durch

$$14.\quad \frac{ad.BD}{4r}\ \text{und}\ \frac{bc.BD}{4r}$$

ausdrücken. Die Summe dieser Flächen ist der Inhalt des Vierecks F. Also ist

$$15.\quad F = \frac{(ad + bc)BD}{4r},$$

und folglich

$$16.\quad r = \frac{(ad + bc)BD}{4F}.$$

Setzt man hierin den Ausdruck von BD aus (13.), so findet man

$$17.\quad r=\sqrt{\frac{[(ad+bc)((ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2))]}{4F}},\ \text{oder}$$

$$r=\sqrt{\frac{[a^2d^2b^2+a^2d^2c^2+ab^3cd+abc^3d+a^3bcd+abcd^3+a^2b^2c^2+b^2c^2d^2]}{4F}}$$

oder

$$18.\quad r=\sqrt{\frac{\left[abcd\left((a^2+b^2+c^2+d^2)+abcd\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\right)\right]}{4F}}.$$

Setzt man hierin noch den Ausdruck von $4F$ aus (1.), so findet man den Ausdruck (2.) des Lehrsatzes.

III. Ist das Viereck zugleich **centrisch nach den Seiten**, so sind die Summen gegenüberliegender Seiten gleich (§. 88, I.). Also ist alsdann $a+c=b+d$. Setzt man nun in den Ausdruck des Inhalts (1.) $b+d$ statt $a+c$ und $a+c$ statt $b+d$, so erhält man

$$F=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(b+b+d-d)(a+a-c+c)(b-b+d+d)(a+c+c-a)]},$$

oder $F=\frac{1}{4}\sqrt{[2b.2a.2d.2c]}$, oder

$$19.\quad F=\sqrt{[abcd]};$$

welches der Ausdruck (3.) des Lehrsatzes ist.

179.

L e h r s a t z. *Wenn man die vier Seiten eines* T r a p e z e s *durch* a, b, c, d *und den Inhalt durch* F *bezeichnet, und* a *und* c *sind die* p a r a l l e l e n *Seiten, so ist*

$$F=\tfrac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]}.$$

Beweis. Das Viereck $ABCD$ (Fig. 109.) sey ein T r a p e z und BC sey mit AD parallel, BE und CF auf AD senkrecht und gleich p, so ist in den rechtwinkligen Dreiecken ABE und DCF,

$$AE=\sqrt{(b^2-p^2)}\ \text{und}\ DF=\sqrt{(d^2-p^2)}.$$

Es ist aber $AE+BC+DF=a$; also ist

$$a=c+\sqrt{(b^2-p^2)}+\sqrt{(d^2-p^2)},\ \text{oder}\ a-c-\sqrt{(b^2-p^2)}=\sqrt{(d^2-p^2)}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck zu beiden Seiten mit sich selbst, so findet man

$$(a-c)^2-2(a-c)\sqrt{(b^2-p^2)}+b^2-p^2=d^2-p^2,\ \text{oder}$$
$$(a-c)^2+b^2-d^2=2(a-c)\sqrt{(b^2-p^2)}.$$

Multiplicirt man abermals mit sich selbst, so erhält man

$$((a-c)^2+b^2-d^2)^2=4(a-c)^2(b^2-p^2),\ \text{oder}$$
$$4(a-c)^2p^2=4(a-c)^2b^2-((a-c)^2+b^2-d^2)^2,\ \text{oder}$$
$$4(a-c)^2p^2=(2(a-c)b+(a-c)^2+b^2-d^2)(2(a-c)b-(a-c)^2-b^2+d^2),$$
$$\text{oder}\ 4(a-c)^2p^2=((a-c+b)^2-d^2)(d^2-(a-c-b)^2),\ \text{oder}$$
$$4(a-c)^2p^2=(a-c+b+d)(a-c+b-d)(d+a-c-b)(d-a+c+b),$$

also

$$p=\frac{\sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]}}{2(a-c)}.$$

Nun ist der Inhalt des Trapezes gleich $\frac{(a+c)p}{2}$. Also ist

$$F=\tfrac{1}{4}\,\frac{a+c}{a-c}\sqrt{[(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a+b-c-d)]};$$

wie im Lehrsatze.

180.

Lehrsatz. I. *Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke* ABC (Fig. 110. I.) *einer der spitzen Winkel z. B.* C, *mmal so grofs ist, als der Winkel* F *in einem andern rechtwinkligen Dreiecke* DEF (Fig. 110. II.), *die Hypothenuse* AC *aber in dem ersten Dreiecke eben so grofs ist, als die Hypothenuse* DF *in dem andern, so ist die dem spitzen Winkel* C *gegenüberliegende Cathete* AB *in dem ersten Dreiecke weniger als* m*mal so grofs als die Cathete* DE, *dem Winkel* F *gegenüber im anderen Dreiecke.* m *kann jede beliebige ganze, gebrochene oder irrationale Zahl seyn.*

Beweis. I. α) In (Fig. 110. III.) sey AMB ein beliebiger Winkel. Die Winkel BMC, CMD, DME, EMF, FMG etc. sollen ihm gleich seyn. Desgleichen sollen alle die Linien AM, BM, CM, DM etc. einander gleich seyn. Alsdann sind alle die gleichschenkligen Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME etc. einander gleich. Folglich ist $AB = BC = CD = DE = EF = FG$ etc., und alle Winkel dieser Dreiecke an der Grundlinie, wie MAB, MBA, MBC etc. sind kleiner als rechte (§. 45. I.). Nun sollen BB_1, CC_1, DD_1 etc. Perpendikel aus B, C, D etc. auf AM seyn. Alsdann ist BB_1 kleiner als BA, weil das Perpendikel BB_1 kürzer ist als die schräge Linie BA (§. 63. IV.). Es sollen ferner Bb_5, Cc_4, Dd_3 etc. Parallelen mit AM seyn. Alsdann sind die Wechselswinkel MBb_5 und BMA, MCc_4 und CMA, MDd_3 und DMA etc. zwischen den Parallelen gleich. Folglich ist z. B. der Winkel MCc_4 zweimal so grofs als der Winkel MBb_5 oder BMA, der Winkel MDd_3 ist dreimal so grofs als BMA, der Winkel MEe_2 viermal so grofs; u. s. w. Folglich nehmen die Winkel MBb_5, MCc_4, MDd_3, MEe_2 etc. immerfort zu, und mithin, weil die Winkel CBM, DCM, EDM, FEM etc. alle gleich grofs sind, die Winkel CBb_5, DCc_4, EDd_3, FEe_2 etc. immerfort ab. Also nehmen die Linien BB_1, Cb_1, Dc_1, Ed_1, Fe_1 immerfort ab (§. 48. II.); denn alle die Linien AB, BC, CD etc. sind einander gleich. Mithin ist Cb_1 kleiner als BB_1; Dc_1 ist kleiner als die Hälfte von CC_1, denn Dc_1 ist kleiner als Cb_1 und noch mehr kleiner als BB_1; Ed_1 ist kleiner als ein Drittheil von DD_1, denn es ist kleiner als Dc_1, noch mehr kleiner als Cb_1 und noch mehr kleiner als BB_1 u. s. w.

Wenn also m eine beliebige ganze Zahl ist, so ist in zwei rechtwinkligen Dreiecken GMG_1 und BMB_1 (Fig. III.), oder ACB und DFE (Fig. I. II.) von gleichen Hypothenusen $GM = BM$ oder $AC = DF$, in welchen der Winkel GMG_1 ein beliebiges Vielfache, z. B. das $m$fache des Winkels BMB_1 ist, die Cathete GG_1, jenem Winkel im ersten Dreieck gegenüber, kleiner als das $m$fache der Cathete BB_1, dem Winkel im andern Dreieck gegenüber.

β. Es sey ferner in (Fig. III.) der Winkel $GMA = p.BMA$ wo p eine beliebige ganze Zahl ist, so ist wie vorhin bewiesen Gf_1 kleiner als der $p-1$ste Theil von FF_1, und folglich $GG_1 < FF_1 + \frac{FF_1}{p-1} < \frac{p-1+1}{p-1} FF_1$ $< \frac{p}{p-1} FF_1$. Eben so ist $FF_1 < \frac{p-1}{p-2} EE_1$ also um so mehr $GG_1 < \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p-2} EE_1$, oder $GG_1 < \frac{p}{p-2} EE_1$. Aus demselben Grunde ist um so mehr $GG_1 < \frac{p}{p-3} DD_1$; u. s. w. Geht man so fort, bis zu einer beliebigen ganzen Zahl $p-n$ und setzt dieselbe gleich q, das zugehörige Perpendikel aber z. B. gleich CC_1, so folgt, daſs

$$GG_1 < \frac{p}{q} CC_1,$$

oder, wenn man den Bruch $\frac{p}{q}$, in welchem Zähler und Nenner beliebige ganze Zahlen sind, durch m bezeichnet,

$$GG_1 < m\, CC_1$$

ist, wo nun $GMA = m.CMA$.

Wenn also m ein *beliebiger Bruch* ist, so ist in zwei rechtwinkligen Dreiecken wie GMG_1 und CMC_1 (Fig. III.) oder ACB und DFE (Fig. I. und II.), deren Hypothenusen GM, CM, oder AC, DF, gleich groſs sind, in welchen aber der Winkel GMG_1 gleich $m.CMC_1$, oder der Winkel $C = m.F$ ist, wo m einen beliebigen Bruch bedeutet, die Cathete GG_1 (Fig. III.), dem Winkel gegenüber, kleiner als $m.CC_1$, oder AB (Fig. II.) kleiner als $m.DE$ (Fig. I.).

γ. Es sey endlich m eine *irrationale Zahl*, so ist dennoch AB kleiner als $m.DE$ (Fig. I. und II.), wenn

$C = mF$ und $AC = DF$ ist. Denn man setze, es sey der Winkel A_1CB_1 irgend ein Vielfaches von *DFE*, oder irgend ein Vielfaches eines Theils des Winkels *DFE*, so ist, wenn man $A_1CB_1 = \mu . DFE$ setzt, wo μ irgend eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeutet, wie vorhin bewiesen, A_1B_1 kleiner als $\mu . DE$.

Man setze A_1B_1 gleich $\mu . DE - \varkappa DE$, wo $\varkappa$ von dem Winkel F abhängen wird. Man setze ferner $\mu = m + k$, wo k nur von dem Winkel ACA_1 abhängt, und folglich willkührlich ist, weil man A_1C so nahe an AC legen kann, als man will, so wäre $A_1B_1 = mDE + kDE - \varkappa DE = (m + k - \varkappa) . DE$. Es kann also, wenn man k klein genug, das heifst, A_1C nahe genug an AC annimmt, A_1B_1 auch gleich mDE und kleiner als mDE seyn, ersteres wenn man $k = \varkappa$, letzteres wenn man $k < \varkappa$ setzt. Daraus folgt, dafs AB nie gleich oder gröfser als $m . DE$ seyn kann, was auch m seyn mag. Denn da in dem rechtwinkligen Dreieck ACB der Winkel ACB kleiner als in dem Dreiecke A_1CB_1 der Winkel A_1CB_1 seyn soll, die Hypothenusen AC und A_1C aber gleich sind, so ist nothwendig AB *immer kleiner* als A_1B_1 (§. 48. II.). Also kann AB nicht gleich oder gröfser als $m . DE$ seyn, weil A_1B_1 auch *gleich* $m . DE$ und *kleiner* als $m . DE$ seyn kann. Folglich kann AB *nur kleiner* seyn als $m . DE$.

Mithin ist in *allen* Fällen $AB < m . DE$ (Fig. I. und II.), sobald $C = mF$ und $AC = DF$ ist, m mag eine ganze Zahl oder ein Bruch oder irrational seyn.

II. *Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke* ABC (Fig. 110. I.) *einer der spitzen Winkel, z. B.* C, *m mal so grofs ist, als in einem andern rechtwinkligen Dreiecke* DEF (Fig. II.) *der Winkel* F, *die Cathete* BC *aber in dem ersten Dreieck ist so grofs, als die Cathete* EF *in dem andern, so ist die dem benannten spitzen Winkel gegenüber liegende andere Cathete* AB *in dem ersten Dreiecke mehr als m mal so grofs, als die Cathete* DE *in dem andern. m kann jede beliebige ganze, gebrochene, oder irrationale Zahl seyn.*

Beweis. In (Fig. 110. IV.) sey AMB ein beliebiger Winkel. Alle die Winkel BMC, CMD, DME etc. sollen dem Winkel AMB gleich seyn. Desgleichen soll $B_1M = AM$, und MAE und MB_1E_1 sollen rechte Winkel seyn. Alsdann ist das Dreieck C_1MB_1 dem Dreieck BMA gleich, weil zwei Winkel und eine Seite

in dem einen so grofs sind, als in dem andern. Also ist $B_1C_1 = AB$. Es sey Bc mit B_1C_1 und c_1C_1 mit BM parallel, so ist $Bc_1 = B_1C_1$, also $Bc > B_1C_1 > AB$ und weil BcC ein stumpfer Winkel ist, $BC > Bc$, also um so mehr $BC > AB$. Ferner sind die Dreiecke AMC und B_1MD_1 einander gleich, weil die Winkel A und B_1, AMC und B_1MD_1 und die Seiten AM und B_1M gleich sind. Also ist $B_1D_1 = AC$ und weil $B_1C_1 = AB$ war, $C_1D_1 = BC$. Es sey Cd mit C_1D_1 und d_1D_1 mit CM parallel, so ist $Cd_1 = C_1D_1$, also $Cd > CD_1 > BC$, und weil CdD ein stumpfer Winkel ist, $CD > Cd$, also um so mehr $CD > BC$ u. s. w. Es ist also

$$BC > AB,\quad CD > BC,\quad DE > CD \text{ etc.}$$

Hieraus folgt zunächst, dafs, wenn in einem rechtwinkligen Dreieck AME (Fig. IV.) eine Cathete AM so grofs ist, als in einem andern AMB, der Winkel AME aber ein beliebiges Vielfache von AMB ist, dafs dann die andere Cathete AE gröfser ist als das nemliche Vielfache von AB. Aber es folgt auch, auf ähnliche Art wie oben, dafs, wenn $AME = p.AMB$ ist,

$$AE > AD + \frac{AD}{p-1} > \frac{p-1+1}{p-1} AD > \frac{p}{p-1} AD, \text{ desgleichen}$$

$$AD > \frac{p-1}{p-2} AC, \text{ also um so mehr } AE > \frac{p}{p-1} \cdot \frac{p-1}{p-2} AC$$

$$> \frac{p}{p-2} AC$$ ist u. s. w.; überhaupt, dafs, wenn m einen beliebigen Bruch $\frac{p}{q}$ bedeutet und in (Fig. I. und II.) $C = mF$, $BC = EF$ ist, dafs dann $AB > mDE$ ist. Auf ähnliche Weise wie in (I.) wird bewiesen, dafs der Satz auch gilt, wenn m eine irrationale Zahl ist.

Also ist in allen Fällen $AB > m.DE$, sobald $C = mF$ und $BC = EF$ ist, m mag eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder irrational seyn.

Es ist übrigens zu bemerken, dafs in beiden Lehrsätzen (I. u. II.) nur von einem rechtwinkligen Dreiecke, also nur von dem Falle die Rede ist, wenn die Winkel C und F (Fig. I. und II.) kleiner als rechte sind.

181.

Lehrsatz. I. *Wenn zwei regelmäfsige Vielecke gleiche Halbmesser der Ecken haben, so ist*

der Umfang desjenigen der größere, welches die meisten Seiten hat.

Beweis. Es sey in (Fig.65.) AMB eines der Dreiecke am Mittelpunct eines regelmäſsigen Vielecks von p Seiten, und AMB_1 eines der Dreiecke am Mittelpuncte eines regelmäſsigen Vielecks von q Seiten, wo $q > p$ seyn wird, wenn der Winkel AMB gröſser ist als der Winkel AMB_1. Es sey ferner MP auf AB und MP_1 auf AB_1 senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke AMP, BMP und AMP_1, B_1MP_1 gleich, weil zwei Winkel und eine Seite in dem einen so groſs sind als in dem andern, nemlich $MAP = MBP$, $APM = BPM = \varrho$ und $AM = BM$, desgleichen $MAP_1 = MB_1P_1$, $MP_1A = MP_1B_1 = \varrho$ und $AM = B_1M$. Also sind AMP und AMP_1 die Hälften der Winkel AMB und AMB_1, folglich ist, weil $AMB = \frac{4\varrho}{p}$ und $AMB_1 = \frac{4\varrho}{q}$ (§.109.), $AMP = \frac{2\varrho}{p}$ und $AMP_1 = \frac{2\varrho}{q}$. Daraus folgt

$$AMP = \frac{q}{p}\, AMP_1.$$

Nun sind in den Dreiecken AMP und AMP_1 die Hypothenusen AM gleich groſs. Also ist nach (§. 180. I.) $AP < \frac{p}{q}\, AP_1$, folglich ist auch, weil $AB = 2AP$ und $AB_1 = 2AP_1$, $AB < \frac{q}{p}\, AB$. Nun hat das Vieleck, dessen Seiten AB sind, p solcher Seiten; also ist sein Umfang $p \cdot AB$. Das Vieleck dessen Seiten AB_1 sind hat q solcher Seiten; also ist sein Umfang $q . AB_1$. Es war aber $AB < \frac{q}{p} AB_1$, also ist $p . AB < p . \frac{q}{p} AB_1$, oder $p . AB < q . AB_1$, oder $q . AB_1 > p . AB$. Das heiſst: der Umfang des regelmäſsigen Vielecks mit der gröſsern Zahl Seiten ist gröſser als der Umfang des regelmäſsigen Vielecks, von gleichem Halbmesser der Ecken, mit der kleinern Seiten-Zahl.

II. *Wenn zwei regelmäſsige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Umfang desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Es sey in (Fig. 65.) AMB eines der Dreiecke am Mittel-Puncte eines regelmäſsigen Vielecks von p Seiten, und A_2MB_2 eines der Dreiecke am Mit-

tel-Puncte eines regelmäfsigen Vielecks von q Seiten, wo $q > p$ seyn wird, wenn der Winkel AMB gröfser als der Winkel A_2MB_2 ist. MP sey der Halbmesser beider Vielecke; so sind die Dreiecke MPA, MPB und MPA_2, MPB_2 einander gleich, weil die Dreiecke AMB und A_2MB_2 gleichschenklig und MP Perpendikel auf die Grundlinien sind. Also sind AMP und A_2MP die Hälften der Winkel AMB und A_2MB_2, folglich ist, weil $AMB = \frac{4\varrho}{p}$ und $A_2MB_2 = \frac{4\varrho}{q}$ (§. 109.), $AMP = \frac{2\varrho}{p}$ und $A_2MP = \frac{2\varrho}{q}$. Daraus folgt

$$AMP = \frac{q}{p}\,A_2MP.$$

Nun sind in den Dreiecken AMP und A_2MP die Catheten MP gleich grofs. Also ist nach (§. 180. II.) $AP > \frac{q}{p}\,A_2P$, folglich ist auch, weil $AB = 2AP$ und $A_2B_2 = 2A_2P$,

$$AB > \frac{q}{p}\,A_2B_2.$$

Nun hat das Vieleck, dessen Seiten AB sind, p solcher Seiten; also ist sein Umfang $p.AB$. Das Vieleck, dessen Seiten A_2B_2 sind, hat q solcher Seiten; also ist sein Umfang $q.A_2B_2$. Es war aber $AB > \frac{q}{p}A_2B_2$, also ist $p.AB > q.A_2B_2$, oder $q.A_2B_2 < p.AB$. Das heifst, der Umfang des regelmäfsigen Vielecks mit **mehr** Seiten ist **kleiner**, als der Umfang des regelmäfsigen Vielecks von gleichem Halbmesser der Seiten, mit weniger Seiten.

182.

Lehrsatz. *Wenn zwei regelmäfsige Vielecke gleich viele Seiten haben, so ist dasjenige das gröfsere, welches den gröfsten Halbmesser der Ecken oder den gröfsten Halbmesser der Seiten hat; und umgekehrt: wenn das eine gröfser ist, so hat es einen gröfsern Halbmesser der Ecken und einen gröfsern Halbmesser der Seiten, als das andere.*

Beweis. Wenn ein regelmäfsiges Vieleck (Fig. 66.) n Seiten hat, so ist der Inhalt jedes Dreiecks über einer einzelnen Seite, wie z. B. AMB, der $n$te Theil der

Fläche des Vielecks; denn alle die Dreiecke *AMB*, *BMC*, *CMD* etc. sind einander gleich.

Hat nun ein anderes regelmäßsiges Vieleck gleich viel Seiten, aber einen gröſsern Halbmesser der Ecken, oder einen gröſsern Halbmesser der Seiten, so sind zwar die Winkel der Dreiecke über den Seiten noch die nemlichen, weil die Dreiecke gleichschenklig sind und also der Winkel am Mittel-Punct immer $\frac{4\varrho}{n}$ ist, allein die Seiten der Dreiecke, wie A_2M und B_2M, oder die Perpendikel, wie P_2M, aus M auf die neuen Seiten, sind gröſser. Folglich sind die Dreiecke gröſser und folglich auch die ganzen Vielecke.

Sind umgekehrt die Vielecke gröſser, so sind auch jedes der n gleichwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke über den Seiten und mithin die Seiten und das Perpendikel dieser Dreiecke, das heiſst, die Halbmesser der Seiten und die Halbmesser der Ecken, gröſser.

183.

Lehrsatz. I. *Wenn zwei regelmäſsige Vielecke gleiche Halbmesser der Ecken haben, so ist der Halbmesser der Seiten desjenigen der gröſsere, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Der Halbmesser der Seiten eines regelmäſsigen Vielecks ist das Perpendikel aus dem Mittel-Punct auf die Seiten der gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das Vieleck besteht. Dieses Perpendikel ist in demjenigen Vieleck von gleichem Halbmesser der Ecken das gröſsere, welches die meisten Seiten hat, weil in demselben die Winkel der gleichschenkligen Dreiecke am Mittel-Punct die kleinern sind (§. 109. und §. 48. II.).

II. *Wenn zwei regelmäſsige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Halbmesser der Ecken desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Die Halbmesser der Ecken sind schräge Linien aus dem Mittel-Puncte der Vielecke nach den Seiten, und diese schrägen Linien sind um so kleiner, je kleiner die Seiten sind; die Seiten aber sind um so kleiner, je mehr das Vieleck ihrer bei gleichem Halbmesser der Seiten hat, weil alsdann die Winkel am Mittel-Punct über den Seiten um so kleiner sind.

184.

Lehrsatz. *Der Inhalt eines regelmäſsigen Vielecks ist gleich der Hälfte des Products seines Umfangs in den Halbmesser seiner Seiten, und das halbe Product des Umfangs eines regelmäſsigen Vielecks in seinen Halbmesser der Ecken ist gleich dem Inhalt eines Vielecks von der doppelten Seiten-Zahl.*

Wenn z. B. der Umfang des regelmäſsigen Vielecks $ABCD\ldots$ (Fig. 65.) durch p, der Halbmesser der Seiten PM durch r und der Halbmesser der Ecken AM durch R bezeichnet wird, so ist der Inhalt des Vielecks $ABCD\ldots = \frac{1}{2}pr$ und der Inhalt des Vielecks $AP_4BQC\ldots$, von der doppelten Seiten-Zahl, gleich $\frac{1}{2}pR$.

Beweis. Der Inhalt jedes Dreiecks über einer Seite des Vielecks, z. B. des Dreiecks AMB, ist $\frac{1}{2}AB.PM = \frac{1}{2}AB.r$. Nun ist der Umfang $p = n.AB$ und der Inhalt gleich $n(\frac{1}{2}AB.r)$, weil er aus n gleichen Dreiecken, jedes wie AMB, besteht; also ist der Inhalt des Vielecks gleich $\frac{1}{2}nAB.r = \frac{1}{2}pr$; welches das Erste war.

Ferner ist der Inhalt der beiden Dreiecke P_4MA und P_4MB gleich $\frac{1}{2}P_4M.AB$, oder, weil $P_4M = AM = R$ ist, gleich $\frac{1}{2}R.AB$. Nun ist der Umfang des Vielecks $ABCD\ldots$ gleich $n.AB = p$, der Inhalt des Vielecks $AP_4BQC\ldots$ von der doppelten Seitenzahl aber ist gleich $n(\frac{1}{2}R.AB) = \frac{1}{2}R.nAB$, weil er aus n Paaren von Dreiecken, wie P_4MA und P_4MB besteht. Also ist der Inhalt dieses Vielecks gleich $\frac{1}{2}R.p = \frac{1}{2}pR$; welches das Zweite war.

185.

Lehrsatz. I. *Wenn zwei regelmäſsige Vielecke gleiche Halbmesser der Ecken haben, so ist der Inhalt desjenigen der gröſsere, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Denn sein Umfang ist nach (§. 181. I.) und sein Halbmesser der Seiten nach (§. 183. I.) der gröſsere, und das halbe Product des Umfangs in den Halbmesser der Seiten ist der Inhalt (§. 184.).

II. *Wenn zwei regelmäſsige Vielecke gleiche Halbmesser der Seiten haben, so ist der Inhalt desjenigen der kleinere, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Denn sein Umfang ist der kleinere (§. 181. II.), der Halbmesser der Seiten ist in beiden der nemliche und das halbe Product des Umfangs in den Halbmesser der Seiten ist der Inhalt (§. 184.).

186.

Lehrsatz. *Unter allen regelmäfsigen Vielecken von gleichem Umfange ist dasjenige das gröfseste, welches die meisten Seiten hat.*

Beweis. Man nehme zwei regelmäfsige Vielecke V_1 und V_2 von gleichem Halbmesser der Seiten r an. Das Vieleck V_1 habe m und V_2, n Seiten, so ist nach (§. 181. II.) der Umfang desjenigen, welches die meisten Seiten hat, der kleinere; dasselbe sey V_1. Bezeichnet man diesen kleinern Umfang, also den Umfang von V_1 durch p und den gröfsern Umfang des andern Vielecks V_2, mit weniger Seiten, durch P, so ist nach (§. 184.) der Inhalt von V_1 gleich pr und von V_2 gleich Pr.

Nun nehme man ein drittes regelmäfsiges Vieleck V_3 mit der nemlichen gröfseren Seiten Zahl, also mit m Seiten an wie V_1, aber von eben so grofsem Umfange P wie das Vieleck V_2, so ist der Halbmesser der Seiten von V_3, nach (§. 182.), nothwendig gröfser als der Halbmesser r der beiden vorigen Vielecke, z. B. gleich R. Der Inhalt des Vielecks V_3 ist also gleich

$$P.R,$$

und dieser Inhalt ist gröfser als der Inhalt $P.r$ von V_2, weil R gröfser ist als r. Also ist der Inhalt des Vielecks V_3, welches denselben Umfang, wie das Vieleck V_2, aber mehr Seiten hat, gröfser.

187.

Lehrsatz. *Wenn der Inhalt eines beliebigen regelmäfsigen Vielecks durch* a, *der Inhalt eines andern regelmäfsigen Vielecks von eben so vielen Seiten, dessen Halbmesser der Seiten aber dem Halbmesser der Ecken des vorigen gleich ist, durch* b, *der Inhalt eines dritten regelmäfsigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten als das erste und mit dem nemlichen Halbmesser der Ecken, durch* α, *und der Inhalt eines vierten Vielecks von eben so vielen, also ebenfalls doppelt so vielen Seiten als das erste und zweite, und mit dem nemlichen Halbmesser der Seiten wie das zweite, durch* β *bezeichnet wird, so ist*

$$\alpha = \sqrt{(ab)} \text{ und } \beta = \frac{2ab}{a+\alpha}.$$

Beweis. Es sey C (Fig. 111.) der gemeinschaftliche Mittel-Punct der vier verschiedenen Vielecke. AB sey eine Seite des ersten Vielecks, die Zahl seiner Seiten n, also ACB eines der n gleichen gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das Vieleck zusammengesetzt ist; so ist die Fläche dieses Dreiecks gleich $\frac{a}{n}$, oder

$$1. \quad \triangle ACB = \frac{a}{n}.$$

Ferner sey $MC = AC$ und EF mit AB parallel, so ist ECF eines der n gleichen gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das zweite Vieleck zusammengesetzt ist. Also ist die Fläche dieses Dreiecks gleich $\frac{b}{n}$, oder

$$2. \quad \triangle ECF = \frac{b}{n}.$$

Nun halbirt das Perpendikel MC auf AB und EF den Winkel ACB (§. 59. III.); also sind ACM und BCM zwei von den gleichen gleichschenkligen $2n$ Dreiecken, aus welchen das dritte Vieleck von doppelt so vielen Seiten und gleichem Halbmesser der Ecken, wie das erste, zusammengesetzt ist. Mithin ist die Fläche jedes dieser Dreiecke gleich $\frac{\alpha}{2n}$, folglich

$$3. \quad \triangle ACM = \frac{\alpha}{2n}.$$

Endlich halbire PC den Winkel ECM und QC den Winkel FCM, so daſs PCQ die Hälfte des Winkels ECF ist, so ist PCQ eines von den $2n$ gleichen gleichschenkligen Dreiecken, aus welchen das vierte Vieleck von doppelt so vielen Seiten und gleichem Halbmesser der Seiten, wie das zweite, besteht. Mithin ist die Fläche dieses Dreiecks gleich $\frac{\beta}{2n}$, folglich ist

$$4. \quad \triangle PCQ = \frac{\beta}{2n}.$$

Nun haben die Dreiecke ACD und ACM über den Grundlinien CD und CM gleiche Höhe AD, also ist

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle ACM} = \frac{CD}{CM}.$$

Aber ACD ist die Hälfte des Dreiecks ACB, und folglich seine Fläche gleich $\frac{a}{2n}$ (1.). Also ist (1. und 3.)

$$5. \quad \frac{a}{2n} : \frac{\alpha}{2n} = \frac{CD}{CM}, \text{ oder } \frac{a}{\alpha} = \frac{CD}{CM}.$$

Die Dreiecke ACM und ECM haben ebenfalls über den Grundlinien AC und EC gleiche Höhe; denn sie haben M zum gemeinschaftlichen Scheitel. Also ist

$$\frac{\triangle ACM}{\triangle ECM} = \frac{AC}{EC}.$$

Aber ECM ist die Hälfte des Dreiecks ECF, und folglich seine Fläche gleich $\frac{b}{2n}$ (2.). Also ist (3. und 2.)

$$6. \quad \frac{\alpha}{2n} : \frac{b}{2n} = \frac{AC}{EC}, \text{ oder } \frac{\alpha}{b} = \frac{AC}{EC}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke ADC und EMC sind aber, wegen der Parallelen AD und EM, gleichwinklig. Also ist $\frac{CD}{CM} = \frac{AC}{EC}$, folglich ist vermöge (5. und 6.)

$$7. \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{\alpha}{b}.$$

woraus $ab = \alpha^2$ und mithin

$$8.\quad \alpha = \sqrt{(ab)}$$

folgt; welches das Erste war.

Die Dreiecke CMP und CPE haben über den Grundlinien MP und PE gleiche Höhe CM. Also ist

$$9.\quad \frac{\triangle CMP}{\triangle CPE} = \frac{MP}{PE}.$$

Nun halbirt die Linie CP den Winkel MCE, also ist vermöge (§. 145. I.) $CE \,.\, MP = PE \,.\, CM$, oder

$$\frac{MP}{PE} = \frac{CM}{CE}.$$

Wegen der Gleichwinkligkeit der Dreiecke ADC und EMC ist aber $\frac{CM}{CE} = \frac{CD}{CA}$, oder, weil $CA = CM$, $\frac{CM}{CE} = \frac{CD}{CM}$. Also ist

$$\frac{MP}{PE} = \frac{CD}{CM},$$

und folglich vermöge (9.)

$$10.\quad \frac{\triangle CMP}{\triangle CPE} = \frac{CD}{CM}.$$

Da aber in (5.) $\frac{CD}{CM} = \frac{a}{\alpha}$ war, so ist

$$\frac{\triangle CMP}{\triangle CPE} = \frac{a}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\triangle CPE}{\triangle CMP} = \frac{\alpha}{a},$$

oder auch $1 + \frac{\triangle CPE}{\triangle CMP} = 1 + \frac{\alpha}{a}$, oder

$$11.\quad \frac{\triangle CMP + \triangle CPE}{\triangle CMP} = \frac{a + \alpha}{a}.$$

Nun ist $\triangle CMP + \triangle CPE = \triangle ECM = \frac{1}{2} \triangle ECF = \frac{b}{2n}$ (2.) und $\triangle CMP = \frac{1}{4} \triangle PCQ = \frac{\beta}{4n}$ (4.). Also ist

$$\frac{b}{2n} : \frac{\beta}{4n} = \frac{a + \alpha}{a},$$

oder $\frac{2b}{\beta} = \frac{a + \alpha}{a}$, oder

$$12.\quad \beta = \frac{2ab}{a + \alpha};$$

welches das Zweite war.

Berechnung des Inhalts beliebiger gradliniger Figuren.

188.

Anmerkung. Den Inhalt beliebiger vielseitiger Figuren findet man häufig am besten, wenn man erst die Figuren in andere theilt, deren Inhalt sich leicht berechnen läſst. Am natürlichsten ist die ***Eintheilung in Dreiecke****, etwa durch* ***Diagonalen die sich nicht kreuzen****, z. B. wie* (Fig. 112.), *in die Dreiecke* IHG, IGL, IKL, GLF, FLC *etc. Man kann alsdann den Inhalt je*

zweier Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, zugleich berechnen, wodurch man immer für zwei Dreiecke eine Multiplication erspart. Z. B. den Inhalt der beiden Dreiecke *ABL* und *BLC* findet man, wenn man etwa die halbe Diagonal *LB* mit der Summe der Perpendikel *AX* und *CY* aus *A* und *C* auf *LB*, multiplicirt. Den Inhalt von *CFD* und *EFD* findet man, wenn man die halbe Diagonal *FD* mit der Summe der Perpendikel *EW* und *CZ* aus *E* und *C* auf *FD*, multiplicirt; den Inhalt von *LFC* und *GLF*, wenn man die halbe Diagonale *LF* mit der Summe der Perpendikel *GM* und *CN* aus *G* und *C* auf *LF*, multiplicirt; u. s. w. Die Summe aller dieser Producte ist der Inhalt der Figur. Ist die Zahl der Dreiecke, in welche man die Figur getheilt hat, ungerade, so bleibt zuletzt ein einzelnes Dreieck übrig, welches man für sich berechnen muſs.

Man kann auch vielseitige Figuren, um ihren Inhalt zu finden, durch Parallelen mit irgend einer Seite, die durch die Ecken gehen, in Trapeze theilen und die Trapeze nach (§. 167.) berechnen. Z. B. man kann in der obigen Figur die Linien *PCQ, OLR, IS, TFU, HV* durch die Ecken *C, L, I, F* und *H* legen, und die dadurch entstehenden Trapeze, nebst den übrig bleibenden Dreiecken *CQD, OKL, FEU* und *HGV* berechnen. *Da aber der Inhalt eines Trapezes nicht weniger Rechnung erfordert, als der Inhalt zweier an einander liegender Dreiecke, so ist bei dieser Rechnung gegen die vorige kein wesentlicher Vortheil, im Gegentheil Nachtheil, weil in der Ausübung nicht so leicht zwei Parallelen gezogen, als gegebene Puncte mit einander durch grade Linien verbunden werden können.*

Weiterhin werden sich Mittel zeigen, den Inhalt einer Figur aus den Seiten und Winkeln zu berechnen.

Ist eine Figur durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Ecken gegeben (§. 64.), so läſst sich die Berechnung des Inhalts der Figur aus den Coordinaten vermittelst folgenden Lehrsatzes abkürzen.

189.

Lehrsatz. *Wenn die rechtwinkligen Coordinaten der Ecken einer beliebigen Figur gegeben sind, so findet man den Inhalt der Figur, wo auch der Anfangs-Punct der Coordinaten liegen mag, wenn man die Ordinate jeder Ecke auf eine der Axen, von der Ordinate der dritten*

darauf folgenden Ecke abzieht, den Rest mit der Ordinate auf der andern Axe der ***dazwischen liegenden*** *Ecke multiplicirt, alle diese Producte zusammenrechnet und von der Summe die Hälfte nimmt.*

Es ist gleichviel ob die Ordinaten und die durch das Abziehen gefundenen Factoren ***positiv*** *oder* ***negativ*** *sind, nur mufs man die allgemeine Rechnungs-Regeln der Zeichen überall richtig beobachten.*

Z. B. der Inhalt der Figur $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_9$ (Fig. 113.) ist

$$C_1C_3 . B_2C_2 + C_2C_4 . B_3C_3 + C_3C_5 . B_4C_4$$
$$+ C_4C_6 . B_5C_5 + C_5C_7 . B_6C_6 - C_6C_8 . B_7C_7$$
$$- C_7C_9 . B_8C_8 - C_8C_1 . B_9C_9 - C_9C_2 . B_1C_1,$$

oder

$$- D_1D_3 . B_2D_2 - D_2D_4 . B_3D_3 + D_3D_5 . B_4D_4$$
$$+ D_4D_6 . B_5D_5 + D_5D_7 . B_6D_6 + D_6D_8 . B_7D_7$$
$$- D_7D_9 . B_8D_8 - D_8D_1 . B_9D_9 - D_9D_2 . B_1D_1.$$

Beweis. Wenn AP und AQ die rechtwinkligen Coordinaten-Axen und B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 etc. Perpendikel aus den auf einander folgenden Ecken der Figur auf AP sind, so sey

$$AC_1 = p_1, \quad C_1B_1 = q_1,$$
$$AC_2 = p_2, \quad C_2B_2 = q_2,$$
$$AC_3 = p_3, \quad C_3B_3 = q_3,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Nun ist der Inhalt des Trapezes $B_1B_2C_1C_2$ nach (§. 167.) gleich $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1)$; denn $\frac{1}{2}(q_2 + q_1)$ ist die halbe Summe der parallelen Seiten B_1C_1 und B_2C_2, und $p_2 - p_1$ ist die Höhe C_1C_2. Ferner ist der Inhalt des Trapezes $B_2B_3C_2C_3$, auf dieselbe Weise, gleich $\frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2)$, und es ist leicht zu sehen, dafs man ihn aus dem Inhalt des vorigen Trapezes $\frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1)$ findet, **wenn man die Zeiger aller Buchstaben um 1 weiter rückt.** Nimmt man diese beiden Trapeze zusammen, so erhält man den Inhalt der Figur $B_1B_2B_3C_3C_1$. Der Inhalt des Trapezes $B_3B_4C_3C_4$ ist nach derselben Regel gleich $\frac{1}{2}(p_4 - p_3)(q_4 + q_3)$. Man findet ihn wieder aus dem vorigen $\frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2)$, **wenn man die Zeiger aller Buchstaben um 1 weiter rückt.** Thut man den Inhalt zu dem vorigen hinzu, so erhält man die Figur $B_1B_2B_3B_4C_4C_1$. Nimmt man den Inhalt des folgenden Trapezes nach derselben Regel, nemlich durch **Weiterrücken der Zeiger** der Buchstaben, so erhält man $\frac{1}{2}(p_5 - p_4)(q_5 + q_4)$, welches

aber der Inhalt negativ ist, weil p_4 gröfser ist als p_5. Man thue diesen negativen Inhalt hinzu, so ist es soviel, als wenn man ihn von der vorigen Figur abzieht. Man bekommt also die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 C_5 C_1$. Der Inhalt des folgenden Trapezes $B_5 B_6 C_5 C_6$, immer nach derselben Regel genommen, ist wieder positiv, und wenn man ihn hinzuthut, so bekommt man die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 C_6 C_1$. Der Inhalt des hierauf folgenden Trapezes $B_6 B_7 C_6 C_7$, nach derselben Regel genommen, ist negativ. Thut man ihn als negativ hinzu, welches soviel ist, als dafs man ihn abzieht, so bekommt man die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 C_7 C_1$. Der Inhalt des folgenden Trapezes $B_7 B_8 C_7 C_8$ ist wieder negativ, und wenn man ihn hinzuthut, so bekommt man die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 C_8 C_1$. Der Inhalt des folgenden Trapezes $B_8 B_9 C_8 C_9$ ist wieder positiv und man bekommt, wenn man ihn hinzuthut, die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 C_9 C_1$. Der Inhalt des letzten Trapezes $B_9 B_1 C_9 C_1$ endlich ist negativ, und man bekommt, wenn man ihn hinzuthut, die Figur $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9$, das heifst: *die Figur selbst, deren Inhalt man verlangt.* Alles was aufserhalb derselben liegt, hat sich von selbst aufgehoben und es bleibt nur die Figur allein übrig. Es ist leicht zu sehen, dafs das Verfahren immer das nemliche bleibt, wie viel Seiten auch die gegebene Figur haben mag und wie auch die Winkel aus- oder einspringen mögen.

Man findet also den Inhalt der ganzen Figur, wenn man die folgenden, nach einer und derselben Regel, nemlich durch Weiterrücken der Zeiger der Buchstaben, ausgedrückten Inhalte der einzelnen Trapeze zusammennimmt, nemlich:

Trapez $B_1 B_2 C_1 C_2 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(q_2 + q_1) = \frac{1}{2}(p_2 q_2 + p_2 q_1 - p_1 q_2 - p_1 q_1)$
Trapez $B_2 B_3 C_2 C_3 = \frac{1}{2}(p_3 - p_2)(q_3 + q_2) = \frac{1}{2}(p_3 q_3 + p_3 q_2 - p_2 q_3 - p_2 q_2)$
Trapez $B_3 B_4 C_3 C_4 = \frac{1}{2}(p_4 - p_3)(q_4 + q_3) = \frac{1}{2}(p_4 q_4 + p_4 q_3 - p_3 q_4 - p_3 q_3)$
Trapez $B_4 B_5 C_4 C_5 = \frac{1}{2}(p_5 - p_4)(q_5 + q_4) = \frac{1}{2}(p_5 q_5 + p_5 q_4 - p_4 q_5 - p_4 q_4)$
Trapez $B_5 B_6 C_5 C_6 = \frac{1}{2}(p_6 - p_5)(q_6 + q_5) = \frac{1}{2}(p_6 q_6 + p_6 q_5 - p_5 q_6 - p_5 q_5)$
Trapez $B_6 B_7 C_6 C_7 = \frac{1}{2}(p_7 - p_6)(q_7 + q_6) = \frac{1}{2}(p_7 q_7 + p_7 q_6 - p_6 q_7 - p_6 q_6)$
Trapez $B_7 B_8 C_7 C_8 = \frac{1}{2}(p_8 - p_7)(q_8 + q_7) = \frac{1}{2}(p_8 q_8 + p_8 q_7 - p_7 q_8 - p_7 q_7)$
Trapez $B_8 B_9 C_8 C_9 = \frac{1}{2}(p_9 - p_8)(q_9 + q_8) = \frac{1}{2}(p_9 q_9 + p_9 q_8 - p_8 q_9 - p_8 q_8)$
Trapez $B_9 B_1 C_9 C_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p_9)(q_1 + q_9) = \frac{1}{2}(p_1 q_1 + p_1 q_9 - p_9 q_1 - p_9 q_9)$

Nun ist leicht zu sehen, dafs, wenn man die, rechter hand, durch wirkliches in einander multipliciren ent-

wickelten Ausdrücke der einzelnen Trapeze zusammenrechnet, alle vorderen Glieder mit den hinteren sich aufheben und nur die mittleren Glieder übrig bleiben, deren Summe, wie ebenfalls leicht zu sehen,

$$\tfrac{1}{2}[(p_3-p_1)q_2+(p_4-p_2)q_3+(p_5-p_3)q_4+(p_6-p_4)q_5+(p_7-p_5)q_6 +(p_8-p_6)q_7+(p_9-p_7)q_8+(p_1-p_8)q_9+(p_2-p_9)q_1],$$

oder auch

$$\tfrac{1}{2}[(q_1-q_3)p_2+(q_2-q_4)p_3+(q_3-q_5)p_4+(q_4-q_6)p_5+(q_5-q_7)p_6 +(q_6-q_8)p_7+(q_7-q_9)p_8+(q_8-q_1)p_9+(q_9-q_2)p_1]$$

ist.

In dem ersten Ausdruck ist p_3-p_1 die Grundlinie C_1C_3 und q_2 ist die Höhe B_2C_2, p_4-p_2 ist die Grundlinie C_2C_4 und q_3 ist die Höhe B_3C_3 u. s. w.

In dem zweiten Ausdruck ist q_1-q_3 die Grundlinie D_1D_3 und p_2 ist die Höhe B_2D_2, q_4-q_2 ist die Grundlinie D_2D_4 und p_3 ist die Höhe B_3D_3 u. s. w.; welches der Satz ist.

Es ist ganz gleichgültig, wo der Anfangs-Punct der Coordinaten liegt, sey es in A oder vielleicht in einer der Ecken der Figur, z. B. in B_9, oder vielleicht innerhalb der Figur, z. B. in A_2 u. s. w. Man darf nur Acht haben, daſs man die Coordinaten, welche rechterhand und oberhalb der Axen fallen, positiv, und die Coordinaten, welche linkerhand und unterhalb der Axen fallen, negativ nimmt, und beim Abziehen der, nach der Aufeinanderfolge der Zeiger, das heiſst, nach der Aufeinanderfolge der Ecken der Figur geordneten Abscissen und Ordinaten, die allgemeinen Rechnungs-Regeln für die Zeichen richtig beobachtet.

190.

Zusatz. *Die obigen Ausdrücke des Inhalts eines Vielecks haben so viele Glieder, als das Vieleck Ecken oder Seiten. Hat daher die Figur nur* **drei** *Seiten und ist also ein* **Dreieck**, *so ist der Inhalt*

$$\triangle = p_1(q_3-q_2)+p_2(q_1-q_3)+p_3(q_2-q_1),$$

oder

$$\triangle = q_1(p_3-p_2)+q_2(p_1-p_3)+q_3(p_2-p_1),$$

wo q *und* p *die rechtwinkligen Coordinaten für beliebige aufeinander senkrechte Axen sind.*

Dritter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit umschlossener Figuren und dem was sich darauf bezieht.

Von der Möglichkeit ähnlicher Figuren.

191.

Lehrsatz. Es sind unzählige Dreiecke von verschiedener Gröfse möglich, deren Winkel die nemlichen, und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

Beweis. In (§. 169.) ist bewiesen worden, dafs, wenn z. B. die Seiten eines beliebigen Dreiecks Gleichvielfache von den Seiten eines andern sind, die Winkel beider Dreiecke nothwendig gleich sein müssen (§. 169. IV.). Nun kann man nicht allein mit beliebigen Seiten, sondern mit beliebigen, vielfach längern oder kürzern Seiten Dreiecke einschliefsen. Also sind unzählige Dreiecke möglich, welche alle die nemlichen Winkel haben, und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

192.

Lehrsatz. Es sind unzählige Figuren von verschiedener Gröfse möglich, deren Winkel die nemlichen und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

Beweis. Denn setzt man Figuren aus Dreiecken zusammen, deren Winkel die nemlichen und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind, wie dergleichen nach (§. 191.) allemal statt finden, so haben sie diese Eigenschaft.

Wenn z. B. die Seiten der Dreiecke ABC ACD, ADE, AEF und AFG (Fig. 114. I.) Gleichvielfache von den Seiten der Dreiecke abc, acd, ade, aef und afg (Fig. 114. II.) sind, welches allemal möglich ist, so sind alle Seiten der Figur $ABCDEFG$ Gleichvielfache von den Seiten der Figur $abcdefg$. Die Winkel der einzelnen Dreiecke sind aber, nach (§. 169. IV.) in beiden Figuren die nemlichen; also sind auch die Winkel A, B, C ...., a, b, c ..... der beiden Figuren selbst, weil sie Summen der Winkel der einzelnen Dreiecke sind, in

beiden Figuren die nemlichen. Folglich sind die Seiten der beiden Figuren Gleichvielfache und ihre Winkel die nemlichen. Und da man nun die Seiten beliebig vielfach annehmen kann, so sind unzählige Figuren möglich, welche alle die nemlichen Winkel haben und deren Seiten von einander Gleichvielfache sind.

Erklärung der Aehnlichkeit.

193.

Erklärung. *Wenn die Winkel einer ebenen Figur den Winkeln einer andern ebenen Figur, in derselben Aufeinanderfolge, gleich, und die Seiten der ersten Figur, in eben der Aufeinanderfolge, Gleichvielfache von den Seiten der andern sind, welches zwischen unzähligen Figuren möglich ist (§. 192.), so sollen die Figuren* **gleichgestaltet** *oder* **ähnlich** *heifsen* *).

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

194.

Lehrsatz. *Dreiecke sind ähnlich, wenn von ihren bestimmenden Stücken (§. 56.) die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind.*

Die bestimmenden Stücke sind:
Eine Seite und zwei oder drei Winkel,
Zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel.
Zwei Seiten und der der gröfseren gegenüberliegende Winkel.
Alle drei Seiten (§. 56.).

Also sind Dreiecke ähnlich:

1. *Wenn sie* **gleichwinklig** *sind. Denn die eine Seite in einem Dreiecke kann ein beliebiges Vielfache von der einen Seite im Andern seyn.*

---

*) Man giebt diese Erklärung der Aehnlichkeit der Figuren zuweilen, ohne dafs die **Möglichkeit** solcher Figuren vorher gezeigt wird. Die Möglichkeit von Dingen, von welchen Dieses oder Jenes, wovon die Möglichkeit abhängt, behauptet wird, läfst sich zwar allerdings auch **voraussetzen**; allein dann mufs wenigstens bemerkt werden, dafs man die Möglichkeit voraussetze. Besser möchte es seyn, hier vorher die Möglichkeit, wie oben, zu beweisen.

2. *Wenn ein Winkel in dem einen so grofs ist, als in dem andern, und die Seiten, welche diesen Winkel einschliefsen sind in dem einen Dreieck Gleichvielfache von den, den nemlichen Winkel einschliefsenden Seiten im andern.*
3. *Wenn zwei Seiten des einen Dreiecks Gleichvielfache von zwei Seiten des andern sind, und der, der gröfsern Seite gegenüber liegende Winkel ist in dem einen Dreieck so grofs, als in dem andern.*
4. *Wenn die drei Seiten des einen Dreieks Gleichvielfache sind von den drei Seiten des andern.*

Beweis.

In (§. 169. I.) ist bewiesen, dafs, wenn zwei Dreiecke gleichwinklig sind, die Seiten des einen Gleichvielfache sind von den Seiten des andern.

In (§. 169. II.) ist bewiesen, dafs, wenn ein Winkel eines Dreiecks so grofs ist, als ein Winkel eines andern, und die Seiten, welche diesen Winkel im ersten Dreieck einschliefsen, sind Gleichvielfache von den Seiten, welche den gleichen Winkel im andern einschliefsen, dafs dann auch die beiden andern Winkel im ersten Dreieck so grofs sind, als im andern, und dafs auch die anderen Seiten in beiden Dreiecken Gleichvielfache sind.

In (§. 169. III.) ist bewiesen, dafs, wenn zwei Seiten eines Dreiecks Gleichvielfache von zwei Seiten eines andern sind, und der der gröfsern gegenüberliegende Winkel ist im ersten Dreieck so grofs als im zweiten, dafs auch die übrigen Winkel in beiden Dreiecken die nemlichen und die übrigen Seiten in dem einen, Gleichvielfache von den übrigen Seiten im andern sind.

In (§. 169. IV.) ist dewiesen, dafs, wenn die drei Seiten eines Dreiecks Gleichvielfache von den drei Seiten eines andern sind, dafs dann die beiden Dreiecke die nemlichen Winkel haben.

In allen vier Fällen haben also die Dreiecke die nemlichen Winkel und gleichvielfache Seiten und sind folglich ähnlich.

195.

Zusatz. Es sind auch Dreiecke ähnlich, wenn die Seiten des einen mit den Seiten des andern gleiche Win-

kel machen. Denn die Dreiecke sind alsdann gleichwinklig (§. 57.) *).

Von der Aehnlichkeit beliebiger Figuren.

196.

Lehrsatz. Vielecke sind ähnlich, wenn von ihren bestimmenden Stücken (§. 96. II.) *die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind.*

Beweis. Wenn z. B. P_1 und P_2 zwei Vielecke bezeichnen, von deren bestimmenden Stücken die Winkel die nemlichen und die Seiten Gleichvielfache sind, so soll bewiesen werden, dafs P_1 und P_2 ähnlich sind, dafs heifst, dafs nicht blos die bestimmenden Winkel von P_1 und P_2 gleich grofs und die bestimmenden Seiten von P_1 Gleichvielfache von den bestimmenden Seiten von P_2 sind, sondern dafs alle Winkel von P_1 und P_2 gleich grofs, und alle Seiten von P_1 und P_2 Gleichvielache sind.

Man nehme ein drittes Vieleck P_3 an, von der Art, dafs alle Winkel von P_1 und P_3 gleich und alle Seiten von P_1 Gleichvielfache von den Seiten des Vielecks P_3 und zwar die nemlichen Gleichvielfachen sind, wie die bestimmenden Seiten in P_1 von denen in P_2, welches allemal möglich ist (§. 191.). Alsdann sind die Vielecke P_1 und P_3 *ähnlich* (§. 193.). Nun sind aber unter allen Winkeln und allen Seiten auch die bestimmenden Winkel und Seiten mit enthalten. Also sind die bestimmenden Winkel und die bestimmenden Seiten von P_2 denen von P_3 *gleich*; denn die bestimmenden Winkel sind in allen drei Vielecken die nemlichen; die bestimmenden Seiten des Vielecks P_1 aber sind, nach der Voraussetzung, die nemlichen Gleichvielfachen von P_3 wie von P_2. Also sind die Vielecke P_2 und P_3 einander *gleich*. Nun sind P_1 und P_3 ähnlich; also sind auch P_1 und P_2 ähnlich; was zu beweisen war.

197.

Erklärung. Aehnlichliegende Linien *in ähnlichen Figuren sollen diejenigen heifsen, welche mit*

---

*) Man findet diesen Fall zuweilen, als einen besondern fünften Fall der Aehnlichkeit aufgeführt. Er ist aber kein neuer Fall, da er blos auf der Aehnlichkeit gleichwinkliger Dreiecke beruht.

ähnlichliegenden Seiten oder Diagonalen, oder auch mit andern ähnlichliegenden Linien ähnliche Vielecke einschliefsen.

Z. B. *BE* und *βε* (Fig. 116. I. und II.) sind ähnlichliegende Diagonalen, wenn die Vielecke *BAFE* und *βαφε*, welche sie mit den Seiten *AB*, *αβ* etc. der gegebenen Vielecke einschliefsen, einander ähnlich sind. Eben so sind *KL* und *κλ* ähnlichliegende Linien, wenn z. B. die Vielecke *KAFEL* und *καφελ* ähnlich sind, woraus sich auch, nach den Sätzen von den bestimmenden Seiten und Winkeln der Vielecke (§. 96.), findet, in wie fern die Abstände *AK*, *ακ* *EL* und *ελ*, oder die Winkel bei *K*, *L*, *κ* und *λ*, von welchen die Lage der Linien *KL* und *κλ* abhängen würde, unter den bestimmenden Stücken der von ihnen abgeschnittenen Vielecke seyn können und müssen.

Eben so, wenn ähnlichliegende Linien nicht blos mit Seiten der gegebenen Figuren, sondern vielleicht mit einander oder mit Diagonalen zusammentreffen, wie z. B. die Linien *MNSTE* und *μνστε*. Sie heifsen ähnlichliegend, wenn die Figuren *AMNSTEF* und *αμνστεφ*, welche sie abschneiden, einander ähnlich sind.

198.

Lehrsatz. In ähnlichen Vielecken sind auch alle ähnlichliegenden Diagonalen und alle andere beliebige ähnlichliegende Linien Gleichvielfache und die ähnlichliegenden Winkel, welche sie mit den Seiten der Vielecke und mit einander einschliefsen, sind gleich grofs.

Beweis. Aehnlichliegende Diagonalen und andere beliebige ähnlichliegende Linien sind diejenigen, welche mit den Seiten der gegebenen Vielecke und mit einander ähnliche Vielecke einschliefsen (§. 197.). Also sind sie Seiten, und die Winkel zwischen ihnen Winkel *ähnlicher* Vielecke und die ersten sind Gleichvielfache, die letzten einander gleich (§. 193.).

199.

Anmerkung. Es ist nicht nöthig die Fälle der Aehnlichkeit von Vielecken besonders aufzuzählen. Da unter bestimmenden Stücken von Figuren mit mehr als

drei Seiten, wenigstens zwei Seiten seyn müssen, weil nur zwei Seiten fehlen können, so findet man die Fälle ähnlicher Vielecke unmittelbar aus den Fällen gleicher Vielecke, wenn man blos statt gleiche *Seiten,* gleichvielfache *Seiten setzt.*

Sind die Seiten von einander Einfache, also einander gleich, so geht die Aehnlichkeit in die Gleichheit über und die Figuren decken sich alsdann.

200.

Lehrsatz. *Regelmäſsige Vielecke von beliebigen Halbmessern, wenn sie gleich viele Seiten haben, sind ähnliche Figuren.*

Beweis. Die Winkel regelmäſsiger Vielecke richten sich nur allein nach der Zahl der Seiten und sind unter einander gleich. Also sind die Winkel regelmäſsiger Vielecke von ungleichen Halbmessern, aber gleich vielen Seiten, gleich groſs.

Die Seiten regelmäſsiger Vielecke sind unter einander gleich. Das nemliche Vielfache also, welches eine Seite eines regelmäſsigen Vielecks von einer Seite eines andern ist, ist jede andere Seite von jeder im andern Vieleck. Also sind die Seiten in zwei regelmäſsigen Vielecken von einander Gleichvielfache.

Folglich sind in zwei regelmäſsigen Vielecken von gleich vielen Seiten die Winkel gleich und die Seiten Gleichvielfache. Mithin sind die Vielecke ähnlich (§. 193.).

Vom Inhalte ähnlicher Figuren.

201.

Lehrsatz. *Die Inhalte von Dreiecken, welche einen gleich groſsen Winkel haben, und die Producte aus den Seiten, welche die gleichen Winkel einschlieſsen, oder die Rechtecke unter denselben, sind Gleichvielfache.*

Z. B. es ist in (Fig. 116.)

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}.$$

Beweis. Die Dreiecke ADE und ABE sind, über den Grundlinien AD und AB, gleich hoch; also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien Gleichvielfache (§. 164.) d. h., es ist

$$1. \quad \frac{\triangle ABE}{\triangle ADE} = \frac{AB}{AD}.$$

Eben so verhält es sich mit den Dreiecken ABC und ABE. Sie sind, über den Grundlinien AC und AE, gleich hoch. Also ist

$$2.\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1 und 2.) mit einander, so erhält man

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE},$$

wie behauptet wird.

202.

Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke und die Quadrate über ähnlichliegenden Seiten derselben sind Gleichvielfache.

Z. B. wenn ABC und $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 117.) ähnliche Dreiecke sind, so ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2} = \frac{BC^2}{\beta\gamma^2} = \frac{CA^2}{\gamma\alpha^2}.$$

Beweis. Es sey $BD = \beta\alpha$, und $BE = \beta\gamma$. Es ist $\beta = B$, indem ähnliche Dreiecke gleichwinklig sind; also sind die Dreiecke BDE und $\beta\alpha\gamma$ gleich. Nun ist nach (§. 201.)

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DBE} = \frac{AB \cdot CB}{DB \cdot EB},$$

also ist auch

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{AB \cdot CB}{\alpha\beta \cdot \gamma\beta} = \frac{AB}{\alpha\beta} \cdot \frac{CB}{\gamma\beta}.$$

In ähnlichen Dreiecken aber ist $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{CB}{\gamma\beta}$; also ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{AB}{\alpha\beta} \cdot \frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

und auch, weil in gleichwinkligen Dreiecken $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{BC}{\beta\gamma} = \frac{CA}{\gamma\alpha}$ ist,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle \alpha\beta\gamma} = \frac{AB^2}{\alpha\beta^2} = \frac{BC^2}{\beta\gamma^2} = \frac{CA^2}{\gamma\alpha^2};$$

wie behauptet wird.

203.

Lehrsatz. Wenn ein rechtwinkliges Dreieck mit einem gleichschenkligen den Winkel zwischen den gleichen Seiten des letzten gemein hat, und die beiden Dreiecke sind gleich grofs, so sind die Producte der Seiten um den gleichen

Winkel in beiden Dreiecken gleich, und das doppelte Quadrat des Perpendikels im gleichschenkligen Dreieck, zwischen den gleichen Seiten, ist so grofs, als das Product der Summe der Seiten, welche im rechtwinkligen Dreiecke den gemeinschaftlichen Winkel einschliefsen und der an demselben liegenden Cathete.

Z. B. wenn das in A rechtwinklige Dreieck BAC (Fig. 118.) so grofs ist, als das um C gleichschenklige Dreieck DCE, so ist

$$AC.BC = DC.EC;$$

und wenn CF auf DE senkrecht ist, so ist

$$2\,CF^2 = AC\,(AC + CB).$$

Beweis. Zufolge (§. 201.) ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DCE} = \frac{AC.BC}{DC.EC}.$$

Nun soll aber $\triangle ABC = \triangle DCE$ seyn, also ist

$$1 = \frac{AC.BC}{DC.EC}, \text{ oder}$$

$$1. \quad AC.BC = DC.EC;$$

welches das Erste war.

Ferner ist, weil der Perpendikel CF den Winkel DCE, also die Linie CG den Winkel ACB halbirt, vermöge (§. 143. I.), $AG.CB = BG.CA$, oder auch

$$AG.CB + AG.CA = BG.CA + AG.CA, \text{ oder}$$
$$AG(CB + CA) = CA\,(BG + AG),$$

oder, weil $BG + AG = AB$ ist,

$$2. \quad AG.(CB + CA) = AC.AB.$$

Nun ist für die Dreiecke ACG und ACB über der Grundlinie AC

$$\frac{AB}{AG} = \frac{\triangle ACB}{\triangle ACG},$$

oder, weil $\triangle ACB = \triangle DCE = 2\,\triangle CDF$ ist,

$$3. \quad \frac{AB}{AG} = \frac{2\,\triangle CDF}{\triangle ACG}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke CDF und ACG sind aber, weil sie den Winkel C gemein haben, ähnlich. Also ist zu Folge (§. 202.), $\frac{\triangle CDF}{\triangle ACG} = \frac{CF^2}{AC^2}$. Also ist in (3.)

$$4. \quad \frac{AB}{AG} = \frac{2\,CF^2}{AC^2}.$$

Es folgt aber aus (2.) $\frac{AB}{AG} = \frac{CB + CA}{AC}$. Also ist aus (4.)

$$\frac{AC + CB}{AC} = \frac{2\,CF^2}{AC^2}, \text{ oder}$$

$$5. \quad 2\,CF^2 = AC\,(AC + CB);$$

welches das Zweite war.

204.

Lehrsatz. Wenn zwei regelmäfsige Vielecke gleich grofs sind und das zweite hat doppelt so viel Seiten als das erste, so ist das Quadrat des Halbmessers der Ecken des zweiten, gleich dem Producte der Halbmesser der Ecken

und der Seiten des ersten; und das doppelte Quadrat des Halbmessers der Seiten des zweiten gleich dem Producte des Halbmessers der Seiten des ersten und der Summe seiner Halbmesser der Seiten und der Ecken.

Z. B. Wenn die Halbmesser der Ecken und Seiten eines regelmäſsigen Vielecks von n Seiten, a und b, und die Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich groſsen regelmäſsigen Vielecks von $2n$ Seiten, α und β sind, so ist

$$\alpha^2 = ab \text{ und } 2\beta^2 = b(a+b), \text{ oder}$$

$$\alpha = \sqrt{(ab)} \text{ und } \beta = \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}}.$$

Beweis. Man stelle sich vor, das rechtwinklige Dreieck ACB (Fig. 118.) sey die Hälfte eines der n gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das erste regelmäſsige Vieleck von n Seiten zusammengesetzt ist, so daſs C der Mittel-Punct des Vielecks, und folglich ACB der halbe Winkel über den Seiten des n Ecks am Mittelpuncte ist, so ist das gleich groſse, gleichschenklige Dreieck DCE ein ganzes von den $2n$ Dreiecken, aus welchen das zweite regelmäſsige Vieleck besteht. Da die Dreiecke ACB und DCE gleich groſs sind, so sind auch die ganzen Vielecke gleich groſs, denn auf das erste gehen $2n$ Dreiecke wie ACB und auf das zweite $2n$ Dreiecke wie DCE. Nun ist aber zu Folge (§. 203.)

$$AC.BC = DC.EC \text{ und}$$

$$2CF^2 = AC(AC+CB)$$

und BC und AC sind die Halbmesser a und b der Ecken und Seiten des n Ecks, $DC = EC$ und CF hingegen sind die Halbmesser α und β der Ecken und Seiten des $2n$ Ecks. Also ist $b.a = \alpha.\alpha$ und $2\beta^2 = b(b+a)$, oder

$$\alpha^2 = ab \text{ und } 2\beta^2 = b(a+b);$$

wie behauptet wurde.

205.

Lehrsatz. *Die Inhalte ähnlicher Vielecke und die Quadrate über ähnlich-liegenden Seiten, Diagonalen oder andern ähnlich-liegenden Linien in denselben, sind Gleich-Vielfache.*

Beweis. Die ähnlichen Vielecke sind aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt. Die Inhalte dieser Dreiecke, und die Quadrate ihrer ähnlichliegenden Seiten sind nach (§. 202.) Gleichvielfache. Die ähnlichliegenden Seiten, oder Diagonalen, oder andere ähnlichliegende Linien sind aber von einander Gleichvielfache (§. 198.). Also sind die Inhalte aller einzelnen Dreiecke und die Quadrate zweier beliebigen, ähnlichliegenden Seiten, Diagonalen oder anderer ähnlich-liegenden Seiten, Gleichvielfache, folglich auch die Summen der Inhalte der Dreiecke, d. h. die Inhalte der Vielecke selbst.

Wenn z. B. $ABCDE$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 119.) ähnliche Vielecke sind, so sind die Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$, ACD

und $\alpha\gamma\delta$ und ADE und $\alpha\delta\varepsilon$ ähnlich; folglich ist nach (§. 202.) z. B.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle\alpha\beta\gamma}=\frac{AB^2}{\alpha\beta^2},\ \frac{\triangle ACD}{\triangle\alpha\gamma\delta}=\frac{AC^2}{\alpha\gamma^2},\ \frac{\triangle ADE}{\triangle\alpha\delta\varepsilon}=\frac{AD^2}{\alpha\delta^2}.$$

Da aber AB, AC, AD und $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ ähnlichliegende Seiten und Diagonalen sind, so ist

$$\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{AC}{\alpha\gamma}=\frac{AD}{\alpha\delta},$$

und folglich

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle\alpha\beta\gamma}=\frac{\triangle ACD}{\triangle\alpha\gamma\delta}=\frac{\triangle ADE}{\triangle\alpha\delta\varepsilon}=\frac{AB^2}{\alpha\beta^2}.$$

Also ist

$$\triangle ABC=\triangle\alpha\beta\gamma\,.\,\frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

$$\triangle ACD=\triangle\alpha\gamma\delta\,.\,\frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

$$\triangle ADE=\triangle\alpha\delta\varepsilon\,.\,\frac{AB^2}{\alpha\beta^2};$$

folglich auch

$$\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE=(\triangle\alpha\beta\gamma+\triangle\alpha\gamma\delta+\triangle\alpha\delta\varepsilon)\frac{AB^2}{\alpha\beta^2},$$

oder

$$\frac{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}{\triangle\alpha\beta\gamma+\triangle\alpha\gamma\delta+\triangle\alpha\delta\varepsilon}=\frac{AB^2}{\alpha\beta^2}.$$

Eben so verhält es sich, wenn mehrere Dreiecke vorhanden sind, oder die Quadrate von andern ähnlichliegenden Seiten oder Diagonalen, oder beliebigen, ähnlichliegenden Linien genommen werden.

206.

Lehrsatz. Die Inhalte von Quadraten über gleichvielfachen graden Linien sind Gleichvielfache.

Beweis. Wenn zwei beliebige grade Linien a und b, und die Gleichvielfachen davon ma und mb sind, so sind die Inhalte der Quadrate über diesen vier Linien a^2, b^2, m^2a^2 und m^2b^2. Es ist aber

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{m^2a^2}{m^2b^2}.$$

Also sind die Quadrate über ma und mb und die Quadrate über a und b selbst, folglich die Quadrate über den gleichvielfachen Linien a, b, ma und mb Gleichvielfache.

207.

Lehrsatz. Die Inhalte zweier beliebigen ähnlichen Figuren und die Inhalte zweier beliebigen anderen ähnlichen Figuren, wenn auch die ersten den zweiten nicht ähnlich sind, sind Gleichvielfache, in so fern ähnlichliegende Linien der beiden ersten und der beiden andern Gleichvielfache sind.

Z. B. wenn A und B (Fig. 120.) zwei einander ähnliche Figuren sind, und C und D sind zwei andere ähnliche Figuren, die aber vielleicht den vorigen nicht ähnlich sind; wenn ferner P und p zwei ähnlichliegende Linien in A und B, Q und q zwei ähnlichliegende Linien in C und D sind und man bezeichnet die Inhalte der vier Figuren durch A, B, C, D, so ist, im Fall $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$ ist, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Beweis. Es ist

$$\frac{A}{B} = \frac{P^2}{p^2} \text{ und } \frac{C}{D} = \frac{Q^2}{q^2} \text{ (§. 206.)}.$$

Da nun nach der Voraussetzung $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$ ist, so ist auch

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

wie behauptet wird.

208.

Anmerkung. Der Lehrsatz (§. 207.) drückt die Vergleichung der Inhalte ähnlicher Figuren am allgemeinsten aus.

Ist irgend eine Linie in A (Fig. 120.) einer Linie in C, also die ähnlichliegende Linie in B auch der ähnlichliegenden Linie in D gleich, so ist der Satz schon weniger allgemein. Er heifst alsdann:

Die Inhalte beliebiger ähnlicher Figuren über ähnlichliegenden Linien (z. B. Seiten) sind Gleichvielfache.

Sind zwei von den ähnlichen Figuren Quadrate, so entsteht der noch mehr besondere Satz (§. 206.).

209.

Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren und ähnlichliegende Linien in den Figuren sind Gleichvielfache.

Beweis. Alle Seiten und die ähnlichliegenden Linien in den beiden Figuren sind Gleichvielfache. Also

sind es auch die Summen der Seiten, oder die Umfänge der Figuren.

Wenn z. B. $ABCDE$ und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ (Fig. 119.) ähnliche Figuren sind, und irgend eine Linie in $ABCDE$ ist das $m$fache von einer ähnlichliegenden Linie in $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, so ist auch $AB = m.\alpha\beta$, $BC = m.\beta\gamma$, $CD = m.\gamma\delta$, $DE = m.\delta\varepsilon$ und $EA = m.\varepsilon\alpha$, folglich auch
$AB + BC + CD + DE + EA = m(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha)$;
welches den Satz ausdrückt.

210.

Lehrsatz. Die Umfänge zweier einander ungleichen und unähnlichen Figuren und die Umfänge zweier ihnen ähnlichen Figuren, sind Gleichvielfache, in so fern es ähnlichliegende Linien in den ähnlichen Figuren sind.

Wenn z. B. A und C (Fig. 120.) zwei ungleiche und unähnliche, B und D aber zwei den vorigen ähnliche Figuren sind: wenn ferner P und p zwei ähnlichliegende Linien in A und B, und Q und q zwei ähnlichliegende Linien in C und D sind, und man bezeichnet die Umfänge von A, B, C, D durch α, β, γ, δ, so ist, im Fall $\frac{P}{p} = \frac{Q}{q}$ ist, $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$.

Beweis. Es ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{P}{p} \text{ und } \frac{\gamma}{\delta} = \frac{Q}{q} \text{ (§. 209.)}.$$

Also ist $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, folglich auch

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta};$$

wie behauptet wird.

Von den Transversalen.

211.

Lehrsatz. Die Stücke, welche Parallelen und beliebige grade Linien aus einem Puncte von einander abschneiden, sind Gleichvielfache.

Z. B. Wenn sämmtliche Linien in (Fig. 121.) grade und BO, CP und DQ Parallelen sind, so ist

$$\frac{BC}{DC} = \frac{EF}{GF} = \frac{HI}{KI} = \frac{LM}{NM} \text{ etc. und}$$

$$\frac{CF}{BE} = \frac{FI}{EH} = \frac{IM}{HL} = \frac{MP}{LO} \text{ etc.}$$

Beweis. Wegen der Parallelen sind die Dreiecke ABE, ACF und ADG, die Dreiecke AEH, AFI und AGK, die Dreiecke AHL, AIM und AKN etc. gleichwinklig und folglich ähnlich.

Also ist z. B. in den Dreiecken ABE, ACF und ADG, $\frac{DA}{CA}=\frac{GA}{FA}$, oder, weil $DA=CA+DC$ und $GA=FA+GF$, $\frac{CA+DC}{CA}=\frac{FA+GF}{FA}$, oder

$1+\frac{DC}{CA}=1+\frac{GF}{FA}$; also

$$1.\quad \frac{DC}{CA}=\frac{GF}{FA}.$$

In den nemlichen drei Dreiecken ist $\frac{BA}{CA}=\frac{EA}{FA}$, oder, weil $BA=CA-BC$ und $EA=FA-EF$, $\frac{CA-BC}{CA}=\frac{FA-EF}{FA}$, oder $1-\frac{BC}{CA}=1-\frac{EF}{FA}$; also

$$2.\quad \frac{BC}{CA}=\frac{EF}{FA}.$$

Dividirt man (2.) durch (1.), so erhält man

$$3.\quad \frac{BC}{DC}=\frac{EF}{GF}.$$

Auf dieselbe Weise ist in den drei Dreiecken AEH, AFI und AGK,

$$4.\quad \frac{EF}{GF}=\frac{HI}{KI};$$

und so fort, in den folgenden Dreiecken. Also ist überhaupt

$$5.\quad \frac{BC}{DC}=\frac{EF}{GF}=\frac{HI}{KI}=\frac{LM}{NM}\text{ etc.};$$

welches der erste Theil der Behauptung ist.

Ferner ist in den beiden ähnlichen Dreiecken ABE und ACF, $\frac{AF}{AE}=\frac{CF}{BE}$. Hingegen in den beiden ähnlichen Dreiecken AEH und AFI ist $\frac{AF}{AE}=\frac{FI}{EH}$. Also ist $\frac{CF}{BE}=\frac{FI}{EH}$. Eben so ist für die an der Linie AHL

grenzenden Dreiecke $\frac{FI}{FH} = \frac{IM}{HL}$ u. s. w. Also ist überhaupt

$$6.\quad \frac{CF}{BE} = \frac{FI}{EH} = \frac{IM}{HL} = \frac{MP}{LO}\ etc.;$$

welches der zweite Theil der Behauptung ist.

212.

Lehrsatz. I. *Die Producte der Stücke, welche nicht parallele grade Linien von einander abschneiden, zu dreien und vieren, sind gleich.*

Z. B. Wenn sämmtliche Linien in (Fig. 122.) grade sind, so ist

$$1.\quad AD.BE.CF = AF.BD.CE,$$
$$2.\quad AF.BC.DE = AC.BE.DF \text{ und}$$
$$3.\quad AC.BD.FE = AB.DE.CF;$$

desgleichen

$$4.\quad AD.CF.BC.DE = AC.BD.CE.DF,$$
$$5.\quad AD.BE.AC.FE = AF.AB.CE.DE,$$
$$6.\quad AF.BC.BD.FE = BE.CF.DE.DF.$$

Beweis. α) Es sey BP mit AF parallel, so sind die Dreiecke DBP und DAF und die Dreiecke ECF und EBP gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{BP}{DB} = \frac{AF}{AD} \text{ und } \frac{BE}{BP} = \frac{CE}{CF}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BE}{DB} = \frac{AF.CE}{AD.CF}, \text{ also}$$

$$1.\quad AD.BE.CF = AF.BD.CE.$$

β) Es sey CS mit ED parallel, so sind die Dreiecke ASC und ADF und die Dreiecke BSC und BDE gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{CS}{CB} = \frac{DE}{BE} \text{ und } \frac{AC}{CS} = \frac{AF}{DF}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE.AF}{BE.DF}, \text{ also}$$

$$2.\quad AF.BC.DE = AC.BE.DF.$$

γ) Es sey FW mit AD parallel, so sind die Dreiecke EFW und EDB und die Dreiecke CFW und CAB gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{FW}{FE} = \frac{BD}{DE} \text{ und } \frac{FC}{FW} = \frac{AC}{AB}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{FC}{FE} = \frac{AC.BD}{AB.DE}, \text{ also}$$

$$3.\quad AC.BD.FE = AB.DE.CF.$$

δ)

δ) Es sey DT mit BE parallel, so sind die Dreiecke ADT und ABC und die Dreiecke DFT und EFC gleichwinklig und folglich ähnlich. Also ist

$$\frac{DT}{DA} = \frac{BC}{AB} \text{ und } \frac{DF}{DT} = \frac{FE}{CE}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{DF}{DA} = \frac{BC.FE}{AB.CE}, \text{ also}$$

$$4. \quad AD.BC.FE = AB.CE.DF.$$

ε) Man kann auch noch CR mit AD, FQ mit BE, DV mit AF und BU mit DE parallel ziehen; allein die Gleichungen, welche man daraus findet sind nur die vorigen. Die Linien CR und BP, FQ und CS, DV und FW und BU und DT geben die nemlichen Gleichungen, weil die Dreiecke RCF und DBP, DQF und SBC, VDB und CFW und BCU und DTF ähnlich sind.

ζ) Die obigen vier Gleichungen (1. 2. 3. 4.) nemlich

$$AD.BE.CF = AF.BD.CE$$
$$AF.BC.DE = AC.BE.DF$$
$$AC.BD.FE = AB.DE.CF$$
$$AD.BC.FE = AB.CE.DF$$

sind übrigens nur so viel als drei. Denn man multiplicire z. B. die drei ersten in einander, so erhält man

$$AD.BE.CF.AF.BC.DE.AC.BD.FE$$
$$= AF.BD.CE.AC.BE.DF.AB.DE.CF,$$

oder

$$AD.BC.FE = AB.CE.DF,$$

welches die vierte Gleichung ist, so daſs also drei Gleichungen die vierte einschlieſslich schon mit enthalten. Daher giebt es nur die drei wesentlich verschiedenen Gleichungen des Lehrsatzes.

η) Multiplicirt man diese drei wesentlich verschiedenen Gleichungen Paarweise mit einander, so erhält man

$$AD.BE.CF.AF.BC.DE = AF.BD.CE.AC.BE.DF,$$
$$AD.BE.CF.AC.BD.FE = AF.BD.CE.AB.DE.CF,$$
$$AF.BC.DE.AC.BD.FE = AC.BE.DF.AB.DE.CF;$$

oder

$$AD.CF.BC.DE = AC.BD.CE.DF,$$
$$AD.BE.AC.FE = AF.AB.CE.DE,$$
$$AF.BC.BD.FE = BE.CF.DE.DF;$$

wie im Lehrsatze*).

II. *Wenn die im Lehrsatz genannten Producte gleich sind, so sind die Linien, welche sich schneiden, nothwendig grade.*

Beweis. Es liege z. B., wenn es möglich ist, den Punct F nicht in grader Linie mit D und E, sondern z. B. in G, so daſs statt AF, $AF + FG$ und statt CF, $CF + FG$ vorausgesetzt wird. Alsdann müſste, der ersten Gleichung (I.) zu Folge,

$$AD.BE.(CF + FG) = (AF + FG) BD.CE, \text{ oder}$$
$$AD.BE.CF + AD.BE.FG = AF.BD.CE + FG.BD.CE$$

seyn. Es ist aber für die grade Linie DFE, nach (I.)

*) Von diesem Lehrsatze geht die sogenannte Theorie der Transversalen aus, welche eine Menge merkwürdiger Sätze enthält. Man sehe darüber auch Carnot: Memoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points etc. 4. 1806. und Einiges hier weiter unten.

$$AD.BE.CF = AF.BD.CE:$$

es müfste also auch

$$AD.BE.FG = FG.BD.CE,$$

oder

$$AD.BE = BD.CE$$

seyn, welches nicht nothwendig der Fall ist. Also gilt die Gleichung (1.) nur für die grade Linie DFE, nicht für die Linie DGE. Und so für die andern Linien.

Die sich schneidenden Linien sind also nothwendig grade, wenn die Gleichungen des Lehrsatzes (I.) Statt finden.

213.

Lehrsatz. *Grade Linien durch die drei Scheitel-Puncte eines Dreiecks, schneiden sich in einem und demselben Puncte, wenn von den Stücken, welche sie von den gegenüber liegenden Seiten abschneiden, das Product derjenigen drei, die nicht zusammenstofsen, dem Producte der andern drei Stücke gleich ist.*

Z. B. die graden Linien AD, BE und CF (Fig. 123. I. und II.) schneiden sich in einem und demselben Puncte M, wenn

$$AF.BD.CE = BF.CD.AE$$

ist.

Beweis. Die Gleichung (3. §. 212.) giebt für das von CF geschnittene Dreieck ABD,

$$AM.BF.CD = AF.BC.DM,$$

und für das von BE geschnittene Dreieck ACD,

$$AM.CE.BD = AE.BC.DM.$$

Dividirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BF.CD}{CE.BD} = \frac{AF}{AE}, \text{ oder}$$

$$AF.BD.CE = BF.CD.AE;$$

wie behauptet wird.

214.

Zusatz. Aus (§. 213.) folgt, dafs für alle die Stücke, welche die unzähligen, durch die Scheitel eines Dreiecks gehenden graden Linien, die in einem und demselben Puncte sich treffen können, von den gegenüber liegenden Seiten abschneiden, eine und dieselbe Bedingung Statt findet. Diese Bedingung enthält also eine grofse Menge verschiedener Sätze.

Wenn z. B.

I. Die Scheitel-Linien AD, BE, CF (Fig. 123. I.) auf den gegenüber liegenden Seiten eines Dreiecks senkrecht stehen, so sind die Winkel bei D, E und F rechte und folglich sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke BEC und ADC ähnlich; denn sie haben aufser dem rechten Winkel noch einen gleichen Winkel, nemlich den gemeinschaftlichen Winkel C. Also ist alsdann $\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{DC}$, und eben so

$$\frac{CA}{FA} = \frac{BA}{EA} \text{ und } \frac{AB}{DB} = \frac{CB}{FB}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen in einander, so erhält man

$$\frac{BC.CA.AB}{EC.FA.DB} = \frac{AC.BA.CB}{DC.EA.FB},$$

oder

$$AF.BD.CE = BF.CD.AE;$$

welches die Bedingungs-Gleichung für das Zusammentreffen der Scheitel-Linien in einem Puncte ist.

Die Perpendikel aus den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten erfüllen also die allgemeine Bedingung des Zusammentreffens in einem und demselben Punct. Folglich schneiden sie sich an einem und demselben Orte; welches mit (§. 71.) übereinstimmt.

II. Halbiren die Scheitel-Linien die Winkel des Dreiecks, A, B und C, so sey z. B. BH und CG auf AD senkrecht. Alsdann sind die rechtwinkligen Dreiecke AGC, AHB ähnlich; denn, außer dem rechten Winkel, sind die Winkel bei A in dem einen so groß, als in dem andern. Also ist $\frac{GC}{BH} = \frac{AC}{AB}$. Es sind aber auch die rechtwinkligen Dreiecke DGC und DHB, wegen der Scheitel-Winkel bei D, ähnlich; also ist $\frac{GC}{BH} = \frac{DC}{DB}$, folglich

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}.$$

Eben so ist

$$\frac{BA}{BC} = \frac{EA}{EC} \text{ und } \frac{CB}{CA} = \frac{FB}{FA}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AC.BA.CB}{AB.BC.CA} = \frac{DC.EA.FB}{DB.EC.FA}, \text{ oder}$$

$$AF.BD.CE = BF.CD.AE;$$

welches wiederum die Bedingung des Zusammentreffens der Scheitel-Linien in einem Puncte ist.

Die Scheitel-Linien, welche die Winkel eines beliebigen Dreiecks halbiren, schneiden sich also ebenfalls in einem und demselben Puncte; welches mit (§. 75. I.) übereinstimmt.

III. Halbiren die Scheitel-Linien die gegenüber liegenden Seiten des Dreiecks, so daß $AF = BF$, $BD = CD$ und $CE = AE$ ist, so folgt unmittelbar, daß auch in diesem Fall die Bedingungs-Gleichung des Schneidens erfüllt wird; denn die Factoren sind alsdann gleich.

Also auch die Scheitel-Linien, welche die Seiten eines Dreiecks halbiren, treffen sich in einem und demselben Orte.

Die drei Scheitel-Linien, welche die Seiten eines Dreiecks halbiren schneiden den dritten Theil von einander ab. Denn wenn in (Fig. 123. I.) $AF = \frac{1}{2}AB$ und $AE = \frac{1}{2}AC$, so ist FE mit BC parallel, $AL = \frac{1}{2}AD$ und $FL = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}DC$. Ferner sind z. B. die Dreiecke FML und CMD, wegen der gleichen Scheitel- und Wechselswinkel bei M, F und C ähnlich. Also ist $LM = \frac{1}{2}DM$, weil $FL = \frac{1}{2}DC$ war; folglich ist auch $LM = \frac{1}{2}LA = \frac{1}{3}MA$ und folglich $MA = 2MD$, oder $MD = \frac{1}{3}AD$. Eben so ist $ME = \frac{1}{3}BE$ und $MC = \frac{1}{3}CF$.

Es giebt dergleichen Sätze von Scheitel-Linien noch mehrere*).

*) Weiteres über diesen Gegenstand findet man in einer kleinen Schrift des Verfassers, unter dem Titel: Ueber einige Eigenschaften des gradlinigen Dreiecks etc. Berlin, bei Maurer, 1816. Auch noch Einiges hier weiter unten.

215.

Lehrsatz. *Die Durchschnitts-Puncte je zweier Seiten eines beliebigen, nach den Ecken centrischen Sechsecks, verlängert, wenn es nöthig ist, und zwar diejenigen, zwischen welchen immer zwei andere liegen, sind in grader Linie.*

Wenn z. B. das Sechseck *ABCDEF* (Fig. 124.) centrisch nach den Ecken ist, so schneiden sich *ABM* und *EDM*, *BCN* und *FEN*, *CDP* und *AFP* in einer und derselben graden Linie *MNP*.

Beweis. α) Es sey *K* der Mittelpunct der Ecken des Sechsecks *ABCDEF*, und *EKL* ein Durchmesser desselben, also $KL = KE$. Da *K* der Mittelpunct der Ecken der beiden Dreiecke *EAL* und *EAB*, über derselben Grundlinie *EA* ist, so sind die Winkel *ELA* und *EBA* gleich (§. 70. II.). Nun sey *ES* auf *AB* senkrecht, so ist das Dreieck *ESB* in *S* rechtwinklig. Aber auch das Dreieck *EAL* ist in *A* rechtwinklig, weil *EL* ein Durchmesser ist (§. 69. I.). Folglich sind zwei Winkel der beiden Dreiecke *ESB* und *EAL* gleich, nemlich $L = B$ und $A = S = \varrho$; folglich sind diese Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{BE}{ME}$ eben so viel als $\frac{ES}{ME} : \frac{ES}{BE}$, $\frac{ES}{BE}$ aber ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *ESB* und *EAL*, gleich $\frac{EA}{EL}$. Also ist $\frac{BE}{ME} = \frac{ES}{ME} : \frac{EA}{EL}$, oder

$$1. \quad \frac{BE}{ME} = \frac{ES.EL}{ME.EA}.$$

β) Es sey ferner *DKU* ein Durchmesser, oder $KU = KD$. Da *K* der Mittelpunct der Ecken der beiden Dreiecke *DBU* und *DBA*, über derselben Grundlinie *DB* ist, so sind, wie in (I.) die Winkel *DAB* und *DUB* gleich. Nun sey *DT* auf *AM* senkrecht, so ist das Dreieck *DAT* in *T* rechtwinklig. Aber auch das Dreieck *DUB* ist in *B* rechtwinklig, weil *DU* ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der beiden Dreiecke *DAT* und *DUB* gleich, nemlich $A = U$ und $T = B = \varrho$; folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{MD}{AD}$ so viel als $\frac{DT}{AD} : \frac{DT}{MD}$. Aber $\frac{DT}{AD}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke *DAB* und *DUB*, gleich $\frac{DB}{DU}$, oder, weil die Durchmesser *DU* und *EL* gleich sind, gleich $\frac{DB}{EL}$. Also ist $\frac{MD}{AD} = \frac{DB}{EL} : \frac{DT}{MD}$, oder

$$\frac{MD}{AD} = \frac{DB.MD}{EL.DT}.$$

Da die Perpendikel *DT* und *ES* auf *AM*, parallel und folglich die Dreiecke *MDT* und *MES* ähnlich sind, so ist auch $\frac{MD}{DT} = \frac{ME}{ES}$, also auch

$$2. \quad \frac{MD}{AD} = \frac{DB.ME}{EL.ES}.$$

γ) Die Dreiecke *EBC* und *ELC* haben einerlei Mittelpunct der Ecken; folglich sind die Winkel *EBC* und *ELC*, über der gemeinschaftlichen Grundlinie *EC*, einander gleich. Nun sey *EQ* auf *BN*

senkrecht, so ist das Dreieck EBQ in Q rechtwinklig. Aber auch das Dreieck ELC ist in C rechtwinklig, weil EL ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke EBQ und ELC gleich, nemlich $L = B$ und $C = Q = \varrho$; folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{NE}{BE}$ so viel als $\frac{EQ}{BE} : \frac{EQ}{NE}$. Aber $\frac{EQ}{BE}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke EBQ und ELC, gleich $\frac{EC}{EL}$. Also ist $\frac{NE}{BE} = \frac{EC}{EL} : \frac{EQ}{NE}$, oder

$$3. \quad \frac{NE}{BE} = \frac{EC \cdot NE}{EL \cdot EQ}.$$

δ) Wenn, wie vorhin, DKU ein Durchmesser ist, so ist das Viereck $BCDU$ centrisch nach den Ecken. Also ist der Winkel DUB das Supplement des Winkels DCB (§. 86. I.) und folglich dem Winkel RCV gleich. Ist nun RV auf NC senkrecht, so ist das Dreieck RCV bei V rechtwinklig. Aber auch das Dreieck DUB ist bei B rechtwinklig, weil DU ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke RCV und DUB gleich, nemlich $U = C$ und $B = V = \varrho$, und folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{CR}{NR}$ so viel als $\frac{RV}{NR} : \frac{RV}{CR}$, und $\frac{RV}{CR}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke RCV und DUB, gleich $\frac{DB}{DU}$, oder, weil die Durchmesser DU und EL gleich sind, gleich $\frac{DB}{EL}$. Also ist $\frac{CR}{NR} = \frac{RV}{NR} : \frac{DB}{EL}$, oder

$$\frac{CR}{NR} = \frac{RV \cdot EL}{NR \cdot DB}.$$

Da die Perpendikel RV und EQ auf BN, parallel, und folglich die Dreiecke NRV und NEQ ähnlich sind, so ist auch $\frac{RV}{NR} = \frac{EQ}{NE}$, also

$$4. \quad \frac{CR}{NR} = \frac{EQ \cdot EL}{NE \cdot DB}.$$

ε) Die Dreiecke DFA und DFU haben einerlei Mittelpunct der Ecken, folglich sind die Winkel DAF und DUF, über der gemeinschaftlichen Grundlinie DF, einander gleich. Nun sey DW auf AP senkrecht, so ist das Dreieck DWA in W rechtwinklig. Aber auch das Dreieck DFU ist in F rechtwinklig, weil DU ein Durchmesser ist. Also sind zwei Winkel der Dreiecke DWA und DFU gleich, nemlich $A = U$ und $W = F = \varrho$, folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{AD}{DP}$ so viel als $\frac{DW}{DP} : \frac{DW}{AD}$. Aber $\frac{DW}{AD}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DWA und DFU, gleich $\frac{DF}{DU}$, oder, weil die Durchmesser DU und EL gleich sind, gleich $\frac{DF}{EL}$. Also ist $\frac{AD}{DP} = \frac{DW}{DP} : \frac{DF}{EL}$, oder

$$5. \quad \frac{AD}{DP} = \frac{DW \cdot EL}{DP \cdot DF}.$$

ζ) Wenn wie vorhin EKL ein Durchmesser ist, so ist das Viereck $EFAL$ centrisch nach den Ecken. Also ist der Winkel ALE das Supplement des Winkels EFA, und folglich dem Winkel RFP gleich. Ist nun RX auf FP senkrecht, so ist das Dreieck RXF bei X rechtwinklig. Aber auch das Dreieck EAL ist bei A rechtwinklig, weil EL ein Durchmesser ist. Folglich sind zwei Winkel der Dreiecke RXF und EAL gleich, nemlich $F = L$ und $X = A = \varrho$, und folglich sind die Dreiecke ähnlich.

Nun ist $\frac{RP}{RF}$ so viel als $\frac{RX}{RF} : \frac{RX}{RP}$. Aber $\frac{RX}{RF}$ ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke RXF und EAL, gleich $\frac{EA}{EL}$. Also ist $\frac{RP}{RF} = \frac{EA}{EL} : \frac{RX}{RP}$, oder

$$\frac{RP}{RF} = \frac{EA.RP}{EL.RX}.$$

Da die Perpendikel RX und DW auf AP, parallel, und folglich die Dreiecke RPX und DPW ähnlich sind, so ist auch $\frac{RP}{RX} = \frac{DP}{DW}$, und folglich

$$6.\quad \frac{RP}{RF} = \frac{EA.DP}{EL.DW}.$$

η) Man multiplicire die 6 Gleichungen (1. 2. 3. 4. 5. 6.) in einander, so erhält man,

$$\frac{BE.MD.NE.CR.AD.RP}{ME.AD.BE.NR.DP.RF} = \frac{ES.EL.DB.ME.EC.NE.EQ.EL.DW.EL.EA.DP}{ME.EA.EL.ES.EL.EQ.NE.DB.DP.DF.EL.DW},$$

oder

$$7.\quad \frac{MD.NE.CR.RP}{ME.NR.DP.RF} = \frac{EC}{DF}.$$

ϑ) Nun haben die Dreiecke EFC und ELC einerlei Mittel-Puncte der Ecken. Folglich sind die Winkel EFC oder RFC und ELC, über der gemeinschaftlichen Grundlinie EC, gleich. Es sey RZ auf FC senkrecht, so sind die rechtwinkligen Dreiecke RFZ und ELC ähnlich, weil die Winkel EFC oder RFZ und ELC gleich sind. Also ist

$$8.\quad \frac{RZ}{RF} = \frac{EC}{EL}.$$

Eben so haben die Dreiecke DCF und DUF einerlei Mittel-Puncte der Ecken. Folglich sind die Winkel DCF oder RCF, und DUF, über der gemeinschaftlichen Grundlinie DF, gleich. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke RCZ und DUF ähnlich, weil die Winkel RCF und DUF gleich sind. Also ist $\frac{CR}{RZ} = \frac{DU}{DF}$, oder, weil die Durchmesser DU und EL gleich sind,

$$9.\quad \frac{CR}{RZ} = \frac{EL}{DF}.$$

ι) Multiplicirt man die Gleichungen (8. und 9.), so erhält man $\frac{RZ.CR}{RF.RZ} = \frac{EC.EL}{EL.DF}$, oder

$$10.\quad \frac{CR}{RF} = \frac{EC}{DF}.$$

Dieses in (7.) gesetzt giebt

$$\frac{MD.NE.CR.RP}{ME.NR.DP.RF} = \frac{CR}{RF}, \text{ oder}$$

$$\frac{MD.NE.RP}{ME.NR.DP} = 1, \text{ oder}$$

$$11.\quad MD.NE.PR = ME.NR.DP.$$

*) Dieses ist nach (§. 212. II) die Bedingung, unter welcher *MNP* eine grade Linie ist. Denn es sey *DY* mit *RN* parallel, so ist in den ähnlichen Dreiecken *MDY*, *MEN* und *PDY*, *PRN*,

$$\frac{MD}{DY} = \frac{ME}{NE} \text{ und } \frac{DY}{DP} = \frac{NR}{RP}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{MD}{DP} = \frac{ME.NR}{NE.RP}, \text{ oder}$$

$$12.\quad MD.NE.PR = ME.NR.DP;$$

wie (11.).

Also schneiden sich die graden Linien *ABM* und *EDM*, *BCN* und *FEN*, *CDP* und *AFP* in einer und derselben graden Linie *MNP*; wie behauptet wurde.

216.

Erklärung. *Wenn die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks* FGHL (Fig. 125.) *nicht parallel sind, so können nicht allein die anliegenden, sondern auch die gegenüber liegenden Seiten, verlängert, aufserhalb des Vierecks sich schneiden; z. B. in* P *und* Q. *Versteht man nun unter* Diagonalen im allgemeinen Sinne, *die graden Linien, welche die Durchschnitts-Puncte der Seiten einer Figur verbinden, so ist noch die* Diagonal PQ *möglich, und das Viereck hat also dann eigentlich* drei *Diagonalen:* FH, GL *und* PQ.

Ein Viereck auf diese Weise, also als die Figur FQHP *betrachtet, heifst* vollständiges Viereck.

217.

Lehrsatz. *Die Stücke, welche die drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks von einander abschneiden, sind Gleichvielfache.*

Z. B. in dem Viereck *FGHL* (Fig. 125.), nachdem es durch Verlängerung der Seiten bis *Q* und *P* vervollständigt worden, ist

$$1.\quad \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN},$$

$$2.\quad \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM} \text{ und}$$

$$3.\quad \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN}.$$

Beweis. Man nehme zu dem Puncte, in welchem sich die drei graden Linien *GL*, *QHL* und *FLP* durch die drei Scheitel *G*, *H*, *F*, des Dreiecks *FGH* schneiden, den Punct *L*, so sind die Stücke, welche sie von den Seiten abschneiden:

für die Seite $FG: FQ$ und GQ,
für die Seite $GH: GP$ und HP,
für die Seite $FH: HK$ und FK;

also ist zu Folge (§. 212.)

$$1.\quad GQ.HP.FK = FQ.GP.HK.$$

Nun sey GR mit FN parallel, so sind die Dreiecke QGR, QFN und PGR, PHN ähnlich. Also ist

$$\frac{FQ}{GQ} = \frac{FN}{GR} \text{ und } \frac{GP}{HP} = \frac{GR}{HN}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{FQ.GP}{GQ.HP} = \frac{FN}{HN}, \text{ oder}$$

$$2.\quad FQ.GP.HN = FN.GQ.HP.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1. und 2.) mit einander, so erhält man

$$GQ.HP.FK.FQ.GP.HN = FQ.GP.HK.FN.GQ.HP,$$

oder

$$FK.HN = HK.FN,$$

oder

$$3.\quad \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN};$$

welches die erste Gleichung des Lehrsatzes ist.

Diese Gleichung bezieht sich auf den Durchschnitt der Diagonalen FKN und LGM in K, und auf den Durchschnitt der Diagonalen FN und PNM in N.

Nun gilt aber von je zwei andern Diagonalen, wie sich auf dieselbe Art beweisen läſst, das Nemliche. Also ist auch für die Durchschnitte der Diagonalen LGM und FHN in K, und LGM und PQM in M, auf dieselbe Weise,

$$4.\quad \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM},$$

und für die Durchschnitte der Diagonalen PQM und LGM in M, und PQM und FHN in N,

$$5.\quad \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN};$$

welches die andern beiden Gleichungen des Lehrsatzes sind.

218.

Lehrsatz. Wenn sich beliebige grade Linien aus einem Puncte, mit beliebigen andern geraden Linien aus einem andern Puncte, schneiden, so liegen die Durchschnitte derjenigen graden Linien, welche die Durchschnitte der sich schneidenden verbinden, sämmtlich in einer graden Linie.

Z. B. wenn die graden Linien FQ und FP (Fig. 125.) von beliebigen graden Linien MP, ML, ML_1, ML_2 etc. geschnitten werden, so liegen die Durchschnitte H, H_1, H_2 etc. der graden Linien GP und LQ; G_1P und L_1Q; G_2P und L_2Q etc., welche die Durchschnitte Q, G, G_1 etc. P, L, L_1 .... der schneidenden Linien aus F und M verbinden, in einer und derselben graden Linie FH_2H_1HN.

Beweis. Wenn FHN die grade Linie ist, welche durch F und durch den Durchschnitts-Punct H der Linien GP und LQ geht,

die die Durchschnitte G, Q und P der Linien FQ, FP, ML, MP verbinden, so ist, zu Folge (§. 217. 5.),

$$\frac{QM}{PM}=\frac{QN}{PN},$$

oder

$$\frac{QM}{PM}=\frac{QP-PN}{PN}=\frac{QP}{PN}-1.$$

Nun sey FH_1N_1 die grade Linie, welche durch F und den Durchschnittspunct H_1 der Linien G_1P und L_1Q, für eine andere schneidende MG_1L_1, geht, so ist, nach dem nemlichen Satze,

$$\frac{QM}{PM}=\frac{QN_1}{PN_1},$$

oder

$$\frac{QM}{PM}=\frac{QP-PN_1}{PN_1}=\frac{QP}{PN_1}-1.$$

Es war aber vorhin

$$\frac{QM}{PM}=\frac{QP}{PN}-1;$$

Also ist $\frac{QP}{PN_1}-1=\frac{QP}{PN}-1$, oder $\frac{QP}{PN_1}=\frac{QP}{PN}$, und folglich

$$PN_1=PN.$$

Also fällt N_1 in N und mithin die Linie FH_1N_1 in die Linie FHN; und folglich liegen F, H_1H und N in grader Linie. Das Nemliche gilt für jede andere schneidende MG_2L_2, und für beliebige andere geschnittene FQ_1 FP_1 etc.

So wie aber die Durchschnittspuncte H und H_1 von GP, LQ und G_1P, L_1Q, bewiesenermaafsen mit F in grader Linie liegen, so liegen auch nothwendig, wenn man L_1G_1M statt PQM zur untersten Linie nimmt, die Durchschnittspuncte H_3 und H_1 von L_1G, G_1L und L_1Q, G_1P mit F in grader Linie. Also liegen H_1 und H_3 beide in der graden Linie FH, folglich liegen alle vier Puncte F, H_3, H_1 und H in einer graden Linie; und eben so für beliebige, mehrere, sich schneidende Linien.

Von dem Mittelpuncte der Entfernungen.

219.

Lehrsatz. *Wenn die senkrechten Coordinaten beliebiger Puncte, z. B. der Ecken eines beliebigen Vielecks* B_1, B_2, B_3, *etc.* (Fig. 113.), *oder die Entfernungen der Puncte* B_1, B_2, B_3, *etc. von zwei beliebigen, auf einander senkrechten Axen* AP *und* AQ, *wie in* (§. 189.) *durch* p_1, p_2, p_3 .... q_1, q_2, q_3 .... *bezeichnet werden, so dafs z. B.*

$$AC_1=p_1,\quad C_1B_1=q_1,$$
$$AC_2=p_2,\quad C_2B_2=q_2,$$
$$AC_3=p_3,\quad C_3B_3=q_3,$$
$$\text{etc.}\qquad \text{etc.}$$

ist, und man nimmt zwei beliebige andere, auf einander senkrechte Axen AU *und* AV *an, die sich aber in dem nemlichen Puncte* A *schneiden, und bezeichnet die Coordinaten der Ecken der Figur für diese neue Axen durch* u_1, u_2, u_3 .... *und* v_1, v_2, v_3 .... *so dafs*

$$AE_1 = u_1, \quad F_1B_1 = v_1,$$
$$AF_2 = u_2, \quad F_2B_2 = v_2,$$
$$AF_3 = u_3, \quad F_3B_3 = v_3,$$
etc. *etc.*

ist, so können $u_1, u_2, u_3 \ldots v_1, v_2, v_3 \ldots$ *wie folgt durch* $p_1, p_2, p_3 \ldots q_1, q_2, q_3 \ldots$ *ausgedrückt werden,*

$$u_1 = mp_1 - nq_1, \quad v_1 = mq_1 + np_1,$$
$$u_2 = mp_2 - nq_2, \quad v_2 = mq_2 + np_2,$$
$$u_3 = mp_3 - nq_3, \quad v_3 = mq_3 + np_3,$$
etc. *etc.*

wo m *und* n *Zahlen sind, welche von dem Winkel* $PAU = QAV$ *zwischen den neuen und den vorigen Axen abhängen. Diese Zahlen* m *und* n *sind für alle* u *und für alle* v *die nemlichen, und es ist*

$$m^2 + n^2 = 1.$$

Die Lage der Coordinaten-Axen und ihres Durchschnitts gegen die Figur ist ganz willkührlich.

Beweis. Es mögen C_1G_1, C_2G_2, C_3G_3 etc. auf AV senkrecht seyn, so sind die Winkel G_1C_1A, G_2C_2A, G_3C_3A etc. unter einander und den Winkeln QAV und PAU gleich.

Nun setze man

1. $G_1C_1 = m \cdot AC_1 = mp_1$ und
2. $AG_1 = n \cdot AC_1 = np_1$,

wo m und n auf irgend eine Weise von den Winkeln $G_1C_1A = QAV = PAU$ abhängen werden, so ist auch, weil die rechtwinkligen Dreiecke AC_1G_1 und $C_1H_1B_1$ ähnlich sind,

3. $B_1H_1 = m \cdot B_1C_1 = mq_1$ und
4. $H_1C_1 = n \cdot B_1C_1 = nq_1$.

Es ist aber

AF_1 oder u_1 gleich $G_1C_1 - H_1C_1$ und
F_1B_1 oder v_1 gleich $B_1H_1 + AG_1$,

also ist vermöge (1. und 4.) für den Punct B_1,

5. $u_1 = mp_1 - nq_1$ und

vermöge (2. und 3.)

6. $v_1 = mq_1 + np_1$.

Es sind aber auch, für einen andern Punct des Vielecks, z. B. für B_2, auf dieselbe Weise, und zwar, weil die rechtwinkligen Dreiecke G_2C_2A, G_1C_1A und $C_2H_2B_2$ ähnlich, also ihre Seiten von einander Gleichvielfache sind, mit den nemlichen m und n,

7. $G_2C_2 = m \cdot AC_2 = mp_2$,
8. $AG_2 = n \cdot AC_2 = np_2$,
9. $B_2H_2 = m \cdot B_2C_2 = mq_2$,
10. $H_2C_2 = n \cdot B_2C_2 = nq_2$.

Also ist auch, weil

AF_2, oder u_2, gleich $G_2C_2 - H_2C_2$ und
F_2B_2, oder v_2, gleich $B_2H_2 + AG_2$

ist,

11. $u_2 = mp_2 - nq_2$,
12. $v_2 = mq_2 + np_2$.

So verhält es sich für jeden andern Eck-Punct B_3, B_4 etc. des Vielecks, und es ist also zusammengenommen:

$$u_1 = mp_1 - nq_1, \quad v_1 = mq_1 + np_1,$$
$$u_2 = mp_2 - nq_2, \quad v_2 = mq_2 + np_2,$$
$$u_3 = mp_3 - nq_3, \quad v_3 = mq_3 + np_3;$$
etc. *etc.*

wie behauptet wurde.

Da ferner $G_1C_1 = mp_1$ und $AG_1 = np_1$ gesetzt wurde, und in dem rechtwinkligen Dreieck AC_1G_1,
$G_1C_1^2 + AG_1^2 = AC_1^2 = p_1^2$ ist, so ist $m^2 p_1^2 + n^2 p_1^2 = p_1^2$, also

$$m^2 + n^2 = 1.$$

220.

Zusatz. *Also wenn die Summen der Entfernungen beliebiger Puncte, z. B. der Ecken eines Vielecks von zwei aufeinander senkrechten Axen durch*

$$s = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots \text{ und}$$
$$t = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots$$

bezeichnet werden, so sind die Summen der Entfernungen der nemlichen Puncte von zwei beliebigen andern, auf einander senkrechten Axen, die sich aber in dem nemlichen Puncte schneiden, nemlich:

$$s_1 = u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots \text{ und}$$
$$t_1 = v_1 + v_2 + v_3 \ldots\ldots$$

zu Folge (§. 219.)

$$s_1 = m(p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots) - n(q_1 + q_2 + q_3 \ldots\ldots) \text{ und}$$
$$t_1 = m(q_1 + q_2 + q_3 \ldots\ldots) + n(p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots),$$

oder

$$s_1 = ms - nt \text{ und}$$
$$t_1 = mt + ns.$$

221.

Lehrsatz. *Wenn die rechtwinkligen Coordinaten beliebiger Puncte, z. B. der Ecken eines Vielecks, wie vorhin, durch* $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots$, *ferner, die Entfernungen der Eck-Puncte der Figur von dem Anfangs-Punct der Coordinaten durch* $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$, *also z. B.* AB_1 (Fig. 113.) *durch* r_1, AB_2 *durch* r_2, AB_3 *durch* r_3 *etc. bezeichnet werden, und man nimmt in den Axen willkührlich zwei andere Puncte* Y *und* Z *an, in den Entfernungen*

$$AY = \varkappa \text{ und } AZ = \lambda$$

von dem Anfangspunct der Coordinaten A, *so sind die Entfernungen der Eck-Puncte der Figur* $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots$ *von diesen Puncten* Y *und* Z, *der Reihe nach,*

$$B_1Y = \sqrt{(r_1^2 + \varkappa^2 - 2p_1\varkappa)}, \quad B_1Z = \sqrt{(r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1\lambda)},$$
$$B_2Y = \sqrt{(r_2^2 + \varkappa^2 - 2p_2\varkappa)}, \quad B_2Z = \sqrt{(r_2^2 + \lambda^2 - 2q_2\lambda)},$$
$$B_3Y = \sqrt{(r_3^2 + \varkappa^2 - 2p_3\varkappa)}, \quad B_3Z = \sqrt{(r_3^2 + \lambda^2 - 2q_3\lambda)},$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

die Axen mögen liegen wie man will: neben der Figur hin, oder durch die Figur hindurch.

Beweis. In dem Dreieck B_1AY z. B. ist die Seite $B_1A = r_1$, die Seite $AY = \varkappa$, die Entfernung des Perpendikels B_1C_1 auf AY von A gleich p_1 und der Winkel B_1AY, in dem Falle der Figur, kleiner als ein rechter. Also ist zu Folge (§. 125. I.)

$$B_1Y^2 = r_1^2 + \varkappa^2 - 2p_1\varkappa,$$

und folglich

$$B_1Y = \sqrt{(r_1^2 + \varkappa^2 - 2p_1\varkappa)}.$$

In dem Dreieck B_1AZ ist die Seite $B_1A = r_1$, die Seite $AZ = \lambda$,

die Entfernung des Perpendikels B_1D_1 auf AZ von A, gleich r_1 und der Winkel B_1AZ kleiner als ein rechter. Also ist zu Folge (§. 123. I.)

$$B_1Z^2 = r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1\lambda,$$

und folglich

$$B_1Z = \sqrt{(r_1^2 + \lambda^2 - 2q_1\lambda)}.$$

Ganz auf dieselbe Weise verhält es sich mit den andern Eck-Puncten der Figur B_2, B_3 ....., wenn man der Reihe nach r_2, r_3 .... statt r_1; p_2, p_3 ..... statt p_1, und q_2, q_3 ..... statt q_1 setzt. Also ist

$$B_2Y = \sqrt{(r_2^2 + x^2 - 2p_2x)} \text{ und } B_2Z = \sqrt{(r_2^2 + \lambda^2 - 2q_2\lambda)}$$

u. s. w.; wie behauptet wurde.

So lange die Figur B_1, B_2, B_3 .... ganz auf der rechten Seite der Axe AQ und über der Axe AP liegt, sind die Winkel B_1AY, B_2AY, B_3AY etc. und B_1AZ, B_2AZ, B_3AZ etc. sämmtlich kleiner als rechte. Also ist das dritte Glied der Ausdrücke von B_1Y, B_2Y etc. B_1Z, B_2Z etc. negativ. Gesetzt, die Figur B_1, B_2, B_3 ..... fiele nun zwar noch oberhalb der Axe AP, aber irgend einer oder mehrere Eck-Puncte der Figur fielen linkerhand der andern Axe QA, oder mit andern Worten: es werde statt der Axe QA eine Axe, welche durch die Figur geht, wie z. B. Q_1S_1 angenommen, so sind zwar die Winkel zwischen den Linien aus denjenigen Puncten, welche linkerhand der neuen Axe fallen und dieser Axe, z. B. die Winkel $B_1A_1Y_1$, $B_2A_1Y_1$ etc. grösser als rechte, und das dritte Glied der Ausdrücke von B_1Y_1, B_2Y_1 etc. ist alsdann positiv (§. 123. II.). Allein auch die Abstände $C_1A_1 = p_1$, $C_2A_1 = p_2$ etc. der Puncte B_1, B_2 .... von der neuen Axe wechseln das Zeichen, weil die Puncte B_1, B_2.... nunmehr auf die andere Seite der Axe fallen. Also bleibt das Zeichen des dritten Gliedes der Ausdrücke. Eben so verhält es sich mit den Ausdrücken, wenn etwa auch die andere Axe durch die Figur geht. Also gelten die Ausdrücke des Lehrsatzes für alle Fälle, die Axen mögen neben die Figur hin, oder durch die Figur gehen, und folglich liegen wie man will.

222.

Lehrsatz. Für beliebige Puncte in der Ebene, also, wenn man will, für die Eck-Puncte jedes beliebigen Vielecks, giebt es unzählige Paare aufeinander senkrechter, durch die Figur hindurchgehender, nicht-paralleler Axen, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe der Entfernungen der Eck-Puncte der Figur von ihnen, auf jeder Seite jeder Axe gleich grofs, oder, was das nemliche ist, dass die Summe der Entfernungen aller Eck-Puncte zusammen, von jeder Axe, nach der Lage der Puncte positiv und negativ genommen, gleich Null ist.

Alle diese Axen aber schneiden sich in einem und demselben Puncte.

Beweis. Die Summe der Entfernungen aller Eck-Puncte der Figur $B_1B_2B_3$ .... (Fig. 113.) z. B. von der Axe QS ist

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \dots.$$

Nun sey irgend eine andere Axe Q_1S_1 mit der vorigen parallel, und von derselben um $AA_1 = e$ entfernt, so ist offenbar jeder Abstand von der neuen Axe um e kleiner; also ist die Summe der Abstände der Eck-Puncte der Figur, wenn ihrer z. B. n sind, von

der neuen Axe, um ne kleiner. Man kann aber e so grofs annehmen als man will, also auch so grofs, dafs gerade

$$ne \text{ gleich } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \ldots$$

ist. Alsdann ist die Summe der Abstände von der neuen Axe, gegen die Summe der Abstände von der vorigen, grade um so viel kleiner, als sie selbst beträgt und folglich ist die Summe der *neuen* Abstände gleich Null. Eben so verhält es sich mit irgend einer andern, auf der vorigen senkrechten Axe. Folglich sind zunächst zwei auf einander senkrechte Axen möglich, für welche die Summe der Abstände der Eck-Puncte der Figur Null ist.

Aber keine anderen, damit parallelen Axen sind mehr möglich; denn für jede parallele Axe ist die Summe der Abstände nothwendig um den $n$fachen Abstand der parallelen Axen von einander gröfser oder kleiner, und folglich nicht mehr gleich Null.

Wenn nun AU und AV zwei andere Axen sind, die mit den Axen AP und AQ durch einen und denselben Punct A gehen und mit demselben einen beliebigen Winkel machen, so können zu Folge (§. 220.) die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von den neuen Axen durch

$$s_1 = ms - nt \quad \text{und}$$
$$t_1 = ns + mt$$

ausgedrückt werden, wenn s und t die Summen der Abstände von den anfänglichen Axen bezeichnen. Sind nun die anfänglichen Axen solche, für welche die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von ihnen Null sind, dergleichen es, wie vorhin bewiesen, immer giebt, so sind s und t gleich Null. Da nun $s_1 = ms - nt$ und $t_1 = ns + mt$ ist, so sind, wenn s und t Null sind, auch s_1 und t_1 gleich Null, das heifst: auch die Summen der Abstände der Eck-Puncte der Figur von den neuen Axen sind gleich Null, wenn die neuen Axen in demselben Punct sich schneiden, wie die vorigen, sie mögen übrigens mit ihnen einen Winkel machen, welchen man will. Und da es nun parallele Axen, wie vorhin bewiesen, nicht giebt, für welche aufserdem die Summe der Abstände Null wäre, so giebt es unter gleichem Winkel mit den vorigen Axen nur ein Axen-Paar, für welches die Summe der Abstände Null ist. Eben so für jeden andern Winkel nur eins; und folglich sind zwar unzählige Paare von Axen möglich, für welche die Summen der Abstände der Eck-Puncte Null sind, aber alle schneiden sich in einem und demselben Puncte.

223.

Erklärung. *Alle auf einander senkrechte Axen, welche die Eigenschaft haben; dafs die Summen der Entfernungen beliebiger Puncte in der Ebene von ihnen, z. B. der Eck-Puncte einer beliebigen vielseitigen Figur, Null sind, heifsen* Axen der mittleren Entfernung *der Puncte, oder der Ecken der Figur.*

Der Punct, in welchem sich, wie in (§. 222.) bewiesen, alle diese verschiedenen Paare von Axen der mittleren Entfernung, für ein und dasselbe System von Puncten, oder für die Ecken einer und derselben Figur schneiden, heifst Mittel-Punct der Entfernungen *der gegebenen Puncte, oder der Ecken der gegebenen Figur.*

der um x vom Anfang-Puncte der Coordinaten A entfernt liegt, zu Folge (§. 221.)

$$B_1Y^2 = r_1^2 + x^2 - 2p_1x,$$
$$B_2Y^2 = r_2^2 + x^2 - 2p_2x,$$
$$B_3Y^2 = r_3^2 + x^2 - 2p_3x,$$
etc.

Die Summe dieser Quadrate ist, wenn n Puncte $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_n$ vorhanden sind,

$$B_1Y^2 + B_2Y^2 + B_3Y^2 \ldots\ldots + B_nY^2$$
$$= (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \ldots\ldots + r_n^2) + nx^2 - 2x(p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots + p_n).$$

Nun lege man den Anfangs-Punct der Coordinaten A in den Mittel-Punct der Entfernungen der n Puncte $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_n$, so dafs AP nunmehr eine Axe der mittleren Entfernung ist, so ist vermöge der Eigenschaft dieser Axen (§. 222.) die Summe der Abstände $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots p_n$ gleich Null. Also ist alsdann die Summe der Quadrate der Entfernungen der Puncte $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_n$ von dem Puncte Y, in der Axe AP, nur noch

$$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \ldots\ldots + r_n^2) + nx^2.$$

In dieser Summe mag die Entfernung x des Puncts Y von dem Mittel-Puncte der Entfernung seyn was man will, positiv oder negativ: immer ist die Summe gröfser als $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \ldots\ldots + r_n$, oder gröfser als die Summe der Quadrate der Entfernungen der Puncte $B_1, B_2, B_3 \ldots\ldots B_n$ von dem Mittel-Puncte der Entfernungen, weil das Quadrat x^2 immer positiv ist. Der Punct Y liegt zwar grade in der Axe der mittleren Entfernung AP; allein da diese Axe durch den Mittel-Punct der Entfernungen jede beliebige Richtung haben kann (§. 222.), so kann der Punct Y überall liegen, wo man will.

Es folgt also, dafs die Summe der Quadrate der Entfernungen beliebiger Puncte von ihrem Mittel-Puncte der Entfernungen kleiner ist, als die Summe der Quadrate der Entfernungen der nemlichen Puncte von jedem andern Puncte; wie behauptet wurde *).

Von

*) Der Mittel-Punct der Entfernungen beliebiger Puncte ist der nemliche, welcher in der Mechanik Schwer-Punct von Puncten, oder Mittel-Punct gleicher, auf die Puncte, mit einander parallel wirkender Kräfte heifst.

Es giebt auch bekanntlich, wie von Puncten, so von Linien, Flächen und Körpern, Schwerpuncte, und man hält zuweilen dafür, dafs auch die Lehre vom Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körper in die Geometrie gehöre. Es scheint aber, dafs sich, ohne den Begriff des Moments zu Hülfe zu nehmen, von dem Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körper kein deutlicher Begriff geben lasse. Der Begriff des Moments aber beruht wesentlich auf dem Principe des Hebels oder der virtuellen Geschwindigkeiten und findet daher ohne rein mechanische Vorstellungen, nemlich ohne die Vorstellung von Kräften und ihren Wirkungen nicht Statt. Aus diesem Grunde scheint die Lehre von dem Schwerpuncte der Linien, Flächen und Körpern nicht wohl in die Geo-

Von dem Puncte kleinster Entfernung.

227.

Erklärung. *Je nachdem ein Punct gegen beliebige andere Puncte, z. B. gegen die Eck-Puncte einer beliebigen vielseitigen Figur, diese oder jene Lage hat, werden seine Entfernungen von den andern Puncten, folglich auch die Summen der Entfernungen, verschieden seyn.*

Es läfst sich also voraussetzen, dafs es einen oder mehrere Puncte giebt, deren Entfernungen von den gegebenen Puncten zusammengenommen kleiner sind, als die Summen der Entfernungen aller andern, um sie herum liegenden Puncte, von den gegebenen.

Dergleichen Puncte sollen Puncte der kleinsten Entfernung für gegebene Puncte heifsen.

228.

Lehrsatz. *Jeder Punct kleinster Entfernung hat die Eigenschaft, dafs er von allen Puncten, die in graden Linien durch ihn und die gegebenen Puncte liegen und gleich weit von ihm entfernt sind, der Mittel-Punct der Entfernungen (§. 223.) ist, und umgekehrt.*

Geometrie, sondern wirklich, sammt ihrem geometrischen Theile, in die Mechanik zu gehören. Mit der Lehre vom Schwerpuncte von Puncten, oder von dem Mittel-Puncte der Entfernungen, von welcher das Obige die Elemente enthält, ist es anders. Diese Lehre ist rein-geometrisch, weil die, auf Puncte, in parallelen Richtungen wirkenden Kräfte gleich grofs angenommen werden und deshalb nicht selbst weiter in Betracht kommen, daher denn auch der Schwer-Punct von Puncten als Mittel-Punct der Entfernungen betrachtet werden kann und als solcher ein rein-geometrischer Gegenstand ist.

Der Fall ist ein anderer, wie bei Gegenständen, die sonst wohl zuweilen die Geometrie unrichtigerweise der Analysis abnimmt, z. B. den sogenannten Winkel-Functionen. Diese sogenannten Winkel-Functionen sind wesentlich unmögliche Logarithmen, und können ohne alle geometrische Vorstellungen, rein analytisch erklärt und abgehandelt werden. (Man sehe in der Rechenkunst, den zehnten Abschnitt.) Sie finden sich in der Geometrie deshalb wieder, weil daselbst Anwendungen davon auf geometrische Gegenstände gemacht werden, nicht aber haben sie etwa aus diesen Anwendungen ihren Ursprung. Die Lehre vom Schwer-Puncte der Linien, Flächen und Körper dagegen beruht wesentlich auf mechanischen Vorstellungen, und daher nimmt nicht etwa die Mechanik diesen Gegenstand der Geometrie ab, wie z. B. die Geometrie der Analysis die Winkel-Functionen, sondern die Lehre vom Schwer-Puncte der Linien, Flächen und Körper ist wirklich der Mechanik eigen, weil diese Schwer-Puncte ohne sie keine bestimmte geometrische Bedeutung haben.

(Diese Anmerkung ist nicht für die Lernenden bestimmt, sondern für Diejenigen, welche den Gegenstand schon kennen.)

Wenn z. B. M der Punct der kleinsten Entfernung für die Puncte $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ (Fig. 128.) ist und man nimmt auf den graden Linien MB_1, MB_2, MB_3 etc., in beliebigen gleichen Entfernungen, $ME_1 = ME_2 = ME_3$ etc. die Puncte E_1, E_2, E_3 etc., so ist M zugleich der Mittel-Punct der Entfernungen der Puncte E_1, E_2, E_3 etc.

Beweis. Wenn AP und AQ zwei beliebige, auf einander senkrechte Coordinaten-Axen sind, und man bezeichnet, wie in (§. 219.), die Coordinaten der Puncte B_1, B_2, B_3 etc., nemlich B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3 .... und B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 .... durch p_1, p_2, p_3 .... und q_1, q_2, q_3 ...., ihre Entfernungen AB_1, AB_2, AB_3 .... vom Anfangs-Puncte der Coordinaten A, durch r_1, r_2, r_3 .... und die Entfernung AY irgend eines Punctes Y in der Axe AP von A, durch x, so sind zu Folge (§. 221.) die Ausdrücke der Entfernungen der Puncte B_1, B_2, B_3, ... von dem Puncte Y folgende:

$$1.\quad \begin{cases} B_1Y = \sqrt{(r_1^2 + x^2 - 2p_1x)}, \\ B_2Y = \sqrt{(r_2^2 + x^2 - 2p_2x)}, \\ B_3Y = \sqrt{(r_3^2 + x^2 - 2p_3x)}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder

$$B_1Y = r_1\sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_1 - x)}{r_1^2}\right)},$$

$$B_2Y = r_2\sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_2 - x)}{r_2^2}\right)},$$

$$B_3Y = r_3\sqrt{\left(1 - \frac{x(2p_3 - x)}{r_3^2}\right)},$$

etc.

oder, wenn man der Kürze wegen

$$2.\quad \begin{cases} \frac{x(2p_1 - x)}{r_1^2} = e_1, \\ \frac{x(2p_2 - x)}{r_2^2} = e_2, \\ \frac{x(2p_3 - x)}{r_3^2} = e_3, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

setzt,

$$3.\quad \begin{cases} B_1Y = r_1\sqrt{(1-e_1)} = r_1(1-e_1)^{\frac{1}{2}}, \\ B_2Y = r_2\sqrt{(1-e_2)} = r_2(1-e_2)^{\frac{1}{2}}, \\ B_3Y = r_3\sqrt{(1-e_3)} = r_3(1-e_3)^{\frac{1}{2}}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Entwickelt man die Wurzel-Gröfsen $(1-e_1)^{\frac{1}{2}}$, $(1-e_2)^{\frac{1}{2}}$, $(1-e_3)^{\frac{1}{2}}$ etc. nach dem binomischen Lehrsatze (Rechenkunst, §. 224.), so erhält man

$$4.\quad \begin{cases} B_1Y = r_1(1 - \tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{1}{8}e_1^2 - \tfrac{1}{16}e_1^3 - \tfrac{5}{128}e_1^4 \ldots\ldots), \\ B_2Y = r_2(1 - \tfrac{1}{2}e_2 - \tfrac{1}{8}e_2^2 - \tfrac{1}{16}e_2^3 - \tfrac{5}{128}e_2^4 \ldots\ldots), \\ B_3Y = r_3(1 - \tfrac{1}{2}e_3 - \tfrac{1}{8}e_3^2 - \tfrac{1}{16}e_3^3 - \tfrac{5}{128}e_3^4 \ldots\ldots), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man hierin wieder die Werthe von e_1, e_2, e_3 etc. (2.), so erhält man

$$5.\quad\begin{cases} B_1Y = r_1\left(1 - \frac{x(2p_1 - x)}{2r_1^2} - \frac{x^2(2p_1 - x)^2}{8r_1^4} - \ldots\ldots\right), \\ B_2Y = r_2\left(1 - \frac{x(2p_2 - x)}{2r_2^2} - \frac{x^2(2p_2 - x)^2}{8r_2^4} - \ldots\ldots\right), \\ B_3Y = r_3\left(1 - \frac{x(2p_3 - x)}{2r_3^2} - \frac{x^2(2p_3 - x)^2}{8r_3^4} - \ldots\ldots\right), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder, wenn man die Glieder welche gleiche Potestäten von x enthalten zusammennimmt,

$$B_1Y = r_1\left(1 - x\frac{p_1}{r_1^2} + x^2\left(\frac{1}{2r_1^2} - \frac{p_1^2}{2r_1^4}\right)\ldots\ldots\right),$$

$$B_2Y = r_2\left(1 - x\frac{p_2}{r_2^2} + x^2\left(\frac{1}{2r_2^2} - \frac{p_2^2}{2r_2^4}\right)\ldots\ldots\right),$$

$$B_3Y = r_3\left(1 - x\frac{p_3}{r_3^2} + x^2\left(\frac{1}{2r_3^2} - \frac{p_3^2}{2r_3^4}\right)\ldots\ldots\right),$$

etc., oder auch

$$6.\quad\begin{cases} B_1Y = r_1 - x\frac{p_1}{r_1} + x^2\left(1 - \frac{p_1^2}{r_1^2}\right)\frac{1}{2r_1} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots, \\ B_2Y = r_2 - x\frac{p_2}{r_2} + x^2\left(1 - \frac{p_2^2}{r_2^2}\right)\frac{1}{2r_2} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots, \\ B_3Y = r_3 - x\frac{p_3}{r_3} + x^2\left(1 - \frac{p_3^2}{r_3^2}\right)\frac{1}{2r_3} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

oder, weil z. B. $AB_1^2 = AC_1^2 + C_1B_1^2$, das heifst, $r_1^2 = p_1^2 + q_1^2$, und eben so $r_2^2 = p_2^2 + q_2^2$, $r_3^2 = p_3^2 + q_3^2$ etc., also $1 - \frac{p_1^2}{r_1^2} = 1 - \frac{p_1^2}{p_1^2 + q_1^2} = \frac{q_1^2}{p_1^2 + q_1^2} = \frac{q_1^2}{r_1^2}$ und eben so $1 - \frac{p_2^2}{r_2^2} = \frac{q_2^2}{r_2^2}$, $1 - \frac{p_3^2}{r_3^2} = \frac{q_3^2}{r_3^2}$ etc. ist,

$$B_1Y = r_1 - x\frac{p_1}{r_1} + x^2\frac{q_1^2}{r_1^2}\cdot\frac{1}{2r_1} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots,$$

$$B_2Y = r_2 - x\frac{p_2}{r_2} + x^2\frac{q_2^2}{r_2^2}\cdot\frac{1}{2r_2} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots,$$

$$B_3Y = r_3 - x\frac{p_3}{r_3} + x^2\frac{q_3^2}{r_3^2}\cdot\frac{1}{2r_3} + x^3(\ldots.)\ldots\ldots,$$

etc.

Dieses sind die Ausdrücke der Entfernungen der Puncte $B_1, B_2, B_3\ldots$ von einem beliebigen Puncte Y, in Reihen nach den steigenden Potestäten von $x = AY$ entwickelt. Aus (5.) ist leicht zu sehen, dafs in diesen Reihen die folgenden Glieder immer höhere Potestäten von x enthalten.

Die Summe der Entfernungen B_1Y, B_2Y, B_3Y etc. ist also, weil $r_1 = B_1A$, $r_2 = B_2A$, $r_3 = B_3A$ etc. ist,

$$7.\quad\begin{cases} B_1Y + B_2Y + B_3Y\ldots., \\ = B_1A + B_2A + B_3A\ldots.. \\ \qquad - x\left(\frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3}\ldots..\right) \\ \qquad + x^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{q_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{q_3^2}{r_3^2}\ldots..\right) \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Soll nun A ein Punct seyn, dessen Entfernungen von den Puncten B_1, B_2, B_3 ....., zusammengenommen kleiner sind, als die Summe der Entfernungen B_1Y, B_2Y, B_3Y etc. jedes andern Puncts Y von B_1, B_2, B_3 ....., so mufs für jede Entfernung x des Puncts Y von A,

8. $B_1Y + B_2Y + B_3Y \ldots\ldots$ gröfser als $B_1A + B_2A + B_3A \ldots\ldots$ und folglich

$$9. \begin{cases} -x\left(\frac{p_1}{r_1}+\frac{p_2}{r_2}+\frac{p_3}{r_3}\ldots\ldots\right) \\ +x^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{q_1^2}{r_1^2}+\frac{1}{2r_2}\cdot\frac{q_2^2}{r_2^2}+\frac{1}{2r_3}\cdot\frac{q_3^2}{r_3^2}\ldots\ldots\right) \\ +x^3(\ldots\ldots)\ldots\ldots \end{cases}$$

immer positiv seyn, was auch x seyn mag.

Da man nun aber x allemal so klein annehmen kann, dafs das erste Glied $-x\left(\frac{p_1}{r_1}+\frac{p_2}{r_2}+\frac{p_3}{r_3}\ldots\ldots\right)$ gröfser ist als alle übrigen zusammengenommen, so ist es nicht anders möglich, dafs die Gröfse (9.) immer positiv ist, als wenn der Coefficient $\frac{p_1}{r_1}+\frac{p_2}{r_2}+\frac{p_3}{r_3}\ldots\ldots$ von x Null ist. Alsdann kann die Gröfse (9.) für jedes beliebige positive und negative x positiv seyn; denn x^2 im zweiten Gliede ist, als Quadrat, immer positiv, die Quadrate q_1^2, q_2^2, q_3^2 ...., r_1^2, r_2^2, r_3^2 ..... sind ebenfalls immer positiv und alle die Entfernungen r_1, r_2, r_3 ..... können positiv angenommen werden, so dafs der Coefficient von x^2, nemlich $\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{q_1^2}{r_1^2}+\frac{1}{2r_2}\cdot\frac{q_2^2}{r_2^2}+\frac{1}{2r_3}\cdot\frac{q_3^2}{r_3^2}\ldots\ldots$ immer positiv ist. Also kann die Gröfse (9.) für jedes beliebige positive und negative x, wenn es nur klein genug ist, immer positiv seyn; denn man kann x wiederum immer so klein annehmen, dafs das zweite positive Glied $x^2(\ldots\ldots)$ gröfser ist, als alle übrigen zusammengenommen. Es ist also nunmehr möglich, dafs die Entfernungen des Punctes A von den Puncten B_1, B_2, B_3 ..... zusammengenommen kleiner sind als die Summe der Entfernungen aller andern Puncte Y, die dem Puncte A nahe genug liegen, denn obgleich Y grade in der Axe AP liegt, so ist doch die Lage dieser Axe willkührlich und x drückt eben sowohl die Entfernung jedes andern Puncts Y von A, rund um A, aus. Zwar kann für gröfsere x, die nach dem Verschwinden des ersten Gliedes übrig bleibende Gröfse (9.) wiederum negativ, und folglich können weiter von A entfernte Puncte Y wiederum den Puncten B_1, B_2, B_3 ..... zusammen genommen näher seyn, als der Punct A, weil theils für negative x das dritte, fünfte etc. Glied mit x^3, x^5 ..... zusammen genommen gröfser seyn können, als das zweite, vierte etc. Glied mit x^2, x^4 ....., wenn auch alle Coefficienten von x^3, x^4, x^5 etc. positiv sind, theils weil die Coefficienten von x^3, x^4, x^5 etc. selbst negativ seyn können; indessen wird es doch unter den weiter von A entfernten Puncten Y, weil die Summen ihrer Entfernungen von B_1, B_2, B_3 .... ungleich sind, nothwendig wiederum einzelne geben, deren Entfernungen von B_1, B_2, B_3 ..... zusammen genommen kleiner sind, als die Summen der Entfernungen aller andern in ihrer Nähe. Diese Puncte sind dann selbst ebenfalls Puncte der kleinsten Entfernung.

In jedem Falle ist die allgemeine Bedingung für alle Puncte der kleinsten Entfernungen die, dafs der Coefficient des ersten Gliedes der Gröfse (9.) Null ist, also dafs

$$10.\quad \frac{p_1}{r_1}+\frac{p_2}{r_2}+\frac{p_3}{r_3}\ldots\ldots=0$$

ist.

Nimmt man statt des Puncts Y in der Axe AP, irgend einen Punct Z in der Axe AQ an, so treten $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots$ an die Stelle von $p_1, p_2, p_3 \ldots\ldots$ und man findet noch folgende zweite Bedingungs-Gleichung für alle Puncte der kleinsten Entfernung:

$$11.\quad \frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}\ldots\ldots=0.$$

Diese Bedingungs-Gleichungen (10. und 11.) müssen alle Puncte der kleinsten Entfernung erfüllen.

Nun nehme man in den graden Linien AB_1, AB_2, AB_3 etc. beliebige Puncte F_1, F_2, F_3, ..., in beliebigen, gleichen Entfernungen $AF_1=AF_2=AF_3$ etc. von A an, bezeichne die gleichen Entfernungen dieser Puncte von A durch r und ihre Coordinaten durch ${}^1p$, ${}^1q$; ${}^2p$, ${}^2q$; ${}^3p$, ${}^3q$ etc., so ist, weil z. B. AF_1G_1, AB_1C_1 und AF_1H_1, AB_1D_1 ähnliche, rechtwinklige Dreiecke sind,

$$\frac{B_1C_1}{AB_1}=\frac{F_1G_1}{AF_1} \text{ und } \frac{B_1D_1}{AB_1}=\frac{F_1H_1}{AF_1},$$

das heifst,

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{p_1}{r_1}=\dfrac{{}^1p}{r},\quad \dfrac{q_1}{r_1}=\dfrac{{}^1q}{r}; \\ \text{Eben so ist} \\ \dfrac{p_2}{r_2}=\dfrac{{}^2p}{r},\quad \dfrac{q_2}{r_2}=\dfrac{{}^2q}{r}, \\ \dfrac{p_3}{r_3}=\dfrac{{}^3p}{r},\quad \dfrac{q_3}{r_3}=\dfrac{{}^3q}{r}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Also sind jetzt die Bedingungs-Gleichungen (10. und 11.) folgende:

$$\frac{{}^1p}{r}+\frac{{}^2p}{r}+\frac{{}^3p}{r}\ldots\ldots=0 \text{ und}$$

$$\frac{{}^1q}{r}+\frac{{}^2q}{r}+\frac{{}^3q}{r}\ldots\ldots=0,$$

oder, wenn man mit r multiplicirt,

$$13.\quad {}^1p+{}^2p+{}^3p\ldots\ldots=0,$$
$$14.\quad {}^1q+{}^2q+{}^3q\ldots\ldots=0,$$

wo ${}^1p$, ${}^2p$, ${}^3p$ ..... ${}^1q$, ${}^2q$, ${}^3q$ ..... die Coordinaten der Puncte F_1, F_2, F_3 ..... sind.

Diese Bedingungs-Gleichungen (13. und 14.) sind aber die eines Mittel-Punots der Entfernung der Puncte F_1, F_2, F_3 ..... (§. 222.). Verlegt man daher den Anfangs-Punct der Coordinaten A etwa nach M und nimmt in MB_1, MB_2, MB_3 etc. beliebige, von M gleich weit entfernte Puncte E_1, E_2, E_3 etc. an, so folgt, dafs der Punct M, wenn er ein Punct kleinster Entfernung von B_1, B_2, B_3 etc. ist, nothwendig zugleich der Mittel-Punct der Entfernungen von E_1, E_2, E_3 etc. seyn mufs; wie behauptet wird.

Umgekehrt, wenn der Punct M der Mittel-Punct der Entfernungen gleich weit von ihm entfernter Puncte E_1, E_2, E_3 .... ist, so muss

$$^1p + ^2p + ^3p \ldots\ldots = 0 \text{ und } ^1q + ^2q + ^3q \ldots\ldots = 0$$

seyn (§. 222.). Also ist auch

$$\frac{^1p}{r} + \frac{^2p}{r} + \frac{^3p}{r} \ldots\ldots = 0 \text{ und } \frac{^1q}{r} + \frac{^2q}{r} + \frac{^3q}{r} \ldots\ldots = 0.$$

Nun ist für beliebige Puncte B_1, B_2, B_3 etc., die in den Linien ME_1, ME_2, ME_3 ..... liegen, wenn ihre Coordinaten p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3 etc. sind, zu Folge (12.) $\frac{p_1}{r_1} = \frac{^1p}{r}$, $\frac{q_1}{r_1} = \frac{^1q}{r}$, $\frac{p_2}{r_2} = \frac{^2p}{r}$ etc.; also ist alsdann für diese Puncte B_1, B_2, B_3 etc.

$$\frac{p_1}{r_1} + \frac{p_2}{r_2} + \frac{p_3}{r_3} \ldots\ldots = 0 \text{ und}$$

$$\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} \ldots\ldots = 0.$$

Dieses sind die Bedingungs-Gleichungen (10. und 11.) für einen Punct kleinster Entfernung. Also ist der Punct M, wenn er der Mittel-Punct der Entfernungen für gleich weit von ihm abstehende Puncte E_1, E_2, E_3 ..... ist, allemal zugleich der Punct kleinster Entfernung für beliebige, in den Linien ME_1, ME_2, ME_3 etc. liegende Puncte B_1, B_2, B_3 etc.; welches der umgekehrte Satz ist.

229.

Zusätze. I. *Ein Punct kleinster Entfernung für die Eck-Puncte eines beliebigen Vielecks ist zugleich der Punct kleinster Entfernung für die Ecken jedes andern beliebigen Vielecks, in so fern seine Ecken nur mit den vorigen und ihrem Puncte kleinster Entfernung in graden Linien liegen.* Z. B. wenn M in (Fig. 128.) für die Ecken B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 der Punct kleinster Entfernung ist, so ist er es auch für die Puncte $_1B$, $_2B$, $_3B$, $_4B$, $_5B$ und $_6B$. Denn diese zweiten Puncte erfüllen die nemlichen Bedingungen wie die ersten.

II. *Wenn in einem Vieleck ein Punct möglich ist, aus welchem Linien nach den Ecken mit einander gleich grosse Winkel machen, so ist dieser Punct ein Punct kleinster Entfernung der Ecken.*

Denn nimmt man alsdann in den Linien nach den Ecken, z. B. MB_1, MB_2 etc. (Fig. 128.) gleich grosse Entfernungen $ME_1 = ME_2 = ME_3$ etc. an, so sind E_1, E_2, E_3 etc. die Ecken eines regelmässigen Vielecks, weil dann die Dreiecke E_1ME_2, E_2ME_3 etc. alle gleich sind. Für dieses regelmässige Vieleck $E_1E_2E_3$ etc. ist aber der Punct M der Mittel-Punct der Entfernungen, weil er der Mittelpunct der Ecken und Seiten ist (§. 225. II.); also ist M auch der Punct kleinster Entfernung von B_1, B_2, B_3 etc. (§. 228.).

III. *Der Punct kleinster Entfernung für die Ecken eines regelmässigen Vielecks liegt in dem Mittel-Punct der Ecken und Seiten. Denn dieser letztere ist zugleich der Mittel-Punct der Entfernungen der Ecken* (§. 225. II.).

230.

Lehrsatz. *In jedem Dreieck, dessen Winkel alle kleiner sind als $\frac{4}{3}\varrho$, ist ein Punct, und nur einer möglich, welchem grade Linien nach den Ecken des Dreiecks, mit einander gleiche Winkel machen.*

Beweis. ABC (Fig. 129.) sey das Dreieck. Ueber einer seiner Seiten sey $DM = DE = \frac{1}{2}BM$ und $BD = DC$, so ist $BM = CE = EB = ME$. Also sind die Dreiecke BME und CME gleich und gleichseitig; folglich sind die Winkel DMC und D... jeder gleich $\frac{2}{3}\varrho$, und folglich ist der Winkel BMC gleich $\frac{4}{3}\varrho$. ... mögen die Dreiecke BMC, BM_1C, BM_2C etc. sämmtlich e... und denselben Mittel-Punct der Ecken haben, so sind alle Winkel BMC, BM_1C, BM_2C etc. einander gleich, und nur (§. 70.). Sie sind also sämmtlich gleich $\frac{4}{3}\varrho$. Nun ist der Wi... AMC, wenn M_1 in B fällt, gleich ABC und wenn M in C ... gleich 2ϱ, also wächst der Winkel AMC, so wie M die Pu... M_1, M_2 etc. von B bis C durchläuft, von ABC bis 2ϱ. Ist ABC nicht größer als $\frac{4}{3}\varrho$, so ist nothwendig irgend ein P... M vorhanden, und nur einer, für welchen der Winkel A... gleich $\frac{4}{3}\varrho$ ist, und in diesem Falle ist auch der dritte Wi... AMB gleich $\frac{4}{3}\varrho$, weil die drei Winkel um M zusammen vier re... ausmachen. Da nun Alles dieses über jeder Dreiecks-Seite S... findet, so folgt, daſs es, so lange kein Winkel des Dreiecks grö... ist als $\frac{4}{3}\varrho$, allemal, innerhalb des Dreiecks, einen Punct M g... und nur einen, um welchen die drei Winkel AMC, BMA BMC gleich $\frac{4}{3}\varrho$ und folglich einander gleich sind.

231.

Lehrsatz. *In jedem Dreiecke, dessen Winkel alle kleiner sind als $\frac{4}{3}\varrho$, liegt der Punct kleinster Entfern... der Ecken innerhalb, und zwar machen die graden Li... aus ihm nach den Ecken mit einander gleiche Winkel. ... giebt es nur einen solchen Punct. Ist ein Winkel des Drei... gleich $\frac{4}{3}\varrho$, oder größer als $\frac{4}{3}\varrho$, so liegt der Punct kleinster En... nung der Ecken in dem Scheitel-Punct des stumpfen Winkels.*

Beweis. Zu Folge (§. 230.) giebt es in jedem Dreiecke, ...sen Winkel alle drei kleiner sind als $\frac{4}{3}\varrho$, einen Punct, aus welc... die graden Linien nach den Ecken, mit einander gleiche Wi... machen. Ein solcher Punct ist aber ein Punct kleinster E... fernung der Ecken (§. 229. II.); welches das Erste war.

Gäbe es einen zweiten Punct kleinster Entfernung, so wü... die graden Linien aus ihm nach den Ecken mit einander ni... gleiche Winkel machen; denn der Puncte, aus welchen die Li... nach den Ecken mit einander gleiche Winkel machen, giebt es einen (§. 230.). Ein Punct, aus welchem die Linien nach den E... mit einander nicht gleiche Winkel machen, kann aber nicht Mittel-Punct der Entfernung von Puncten in jenen Linien seyn gleich weit von ihm entfernt sind; denn man lege eine der Co... naten-Axen in eine der Linien, z. B. die Axe MZ (Fig. 129 BM, so daſs BMZ eine grade Linie ist, so sind die Winkel ... und CMZ ungleich, weil es nach der Voraussetzung die W... AMB und CMB sind. Also können Puncte in MA und MC gleich weit von M entfernt sind, nicht gleich weit von MZ a... hen, und folglich kann M nicht der Mittel-Punct der Entfernu...

von Puncten in MA, MB und MC seyn, die von M gleich weit abstehen. Folglich kann auch M nicht der Punct kleinster Entfernung für die Ecken A, B und C seyn (§. 228.). Mithin giebt es aufser demjenigen Punct kleinster Entfernung, aus welchem die graden Linien nach den Ecken des Dreiecks mit einander gleiche Winkel machen, keinen andern; welches das Zweite war.

Ist ein Winkel des Dreiecks gröfser als $\frac{4}{3}\varrho$, so giebt es nach (§. 230.) innerhalb des Dreiecks keinen Punct, aus welchem die graden Linien nach den Ecken mit einander gleiche Winkel machen. Also kann auch der Punct kleinster Entfernung der Ecken nicht innerhalb des Dreiecks liegen. Aber auch nicht aufserhalb. Denn wo auch der Punct M (Fig. 130.) liegen mag: nie kann der gröfste Winkel BMA, welchen zwei grade Linien nach den Ecken einschliefsen, gröfser als zwei rechte seyn, weil sonst M innerhalb des Dreiecks liegen müfste. Ein solcher Punct aber kann nie der Mittel-Punct der Entfernungen gleich weit von ihm abstehender Puncte in den Linien nach den Ecken seyn; denn ist z. B. BMZ eine der Coordinaten Axen, so fallen die beiden andern Linien MC und AM auf einerlei Seite der Axe, und folglich kann die Summe der Abstände von Puncten in MA und MC, die gleich weit von M entfernt sind, nie Null seyn. Also kann der Punct kleinster Entfernung nur in einer Ecke des Dreiecks liegen, und zwar in der stumpfen, weil die Summe der Entfernungen zweier Ecken von einer spitzen Ecke, wie leicht zu sehen, gröfser ist, als die der Entfernung zweier Ecken von der stumpfen; welches das Dritte war.

232.

Lehrsatz. Ein Punct kleinster Entfernung der Ecken eines Vierecks ist der Durchschnitts-Punct der Diagonalen.

Beweis. Denn dieser Punct ist der Mittel-Punct der Entfernungen von gleich weit von ihm abstehenden Puncten in den Diagonalen, wie leicht zu sehen, wenn man eine der Coordinaten-Axen in die eine Diagonal legt*).

Von den *Gleichungen* der Linien, besonders der *graden* und ihrer Durchschnitte.

Von den Gleichungen der Linien im Allgemeinen.

233.

Erklärung. Wenn die Lage beliebiger Puncte gegen feste Coordinaten-Axen, das heifst, gegen grade Linien, die sich unter einem bestimmten Winkel schneiden, und die für alle die Puncte, welche man in Betracht ziehen will, die nemlichen sind, durch Coordinaten unter dem Winkel der Axen (§. 64.), *z. B. durch recht-*

*) Die Sätze von dem Puncte kleinster Entfernung finden öfter Anwendung. Wenn man z. B. denjenigen Ort sucht, aus welchem die Summe der Wege nach gegebenen Orten die möglich-kleinste ist, so sucht man den Punct kleinster Entfernung dieser Orte.

winklige Coordinaten, gegeben ist, so sollen die verschiedenen Puncte, um sie von einander zu unterscheiden, durch ihre Coordinaten selbst bezeichnet werden. Z. B. wenn die rechtwinkligen Coordinaten des Puncts M (Fig. 131.) AB = CM = x *und* BM = AC = y *sind, so soll der Punct* M *durch Punct* (xy) *bezeichnet werden. Sind die Coordinaten des Puncts* N, AD = EN = p *und* DN = AE = q, *so soll der Punct* N *durch Punct* (pq) *bezeichnet werden u. s. w.*

234.

Erklärung. Da einzelne Puncte ganze Linien bestimmen, z. B. zwei Puncte eine grade Linie, indem durch zwei Puncte nur eine grade Linie möglich ist (§. 11.), *so sind Linien gegeben, wenn man die Lage derjenigen Zahl von Puncten kennt, durch welche nur eine solche Linie möglich ist.*

Wenn aber umgekehrt die Lage von Linien gegeben ist, so sind die Coordinaten aller Puncte der Linien unter einander in einem gewissen gleichförmigen Zusammenhange, der sich nach der Gestalt und den Eigenschaften der Linien richtet. Die Gleichung, welche diesen wechselseitigen Zusammenhang der Coordinaten aller Puncte einer gegebenen Linie ausdrückt, heifst Gleichung der Linie. *Die Zeichen für die Coordinaten, welche darin nothwendig vorkommen, können jeden beliebigen Werth haben, während vielleicht andere Linien, die sich mit den Coordinaten nicht ändern, immer denselben Werth behalten. Die Coordinaten sind also alsdann* veränderliche, *die gleichbleibenden Linien* unveränderliche, *oder* beständige Gröfsen. *Letztere heifsen auch, in so fern von ihnen nicht blos die Lage, sondern die unterscheidenden Eigenschaften der Linie abhängen,* Parameter. *Der Grad der Gleichung wird nach den veränderlichen Gröfsen, also nach den Coordinaten, nicht nach den beständigen Linien, oder Parametern gemessen. Kommen also die Coordinaten nicht mit einander oder mit sich selbst multiplicirt vor, so heifst die Gleichung der Linie* vom ersten *Grade. Kommen die zweiten Potestäten der Coordinaten und ihre Producte zu zweien vor, so heifst die Gleichung der Linie vom* zweiten *Grade. Kommen die Coordinaten als drei Factoren vor, so heifst die Gleichung der Linie vom* dritten *Grade u. s. w.*

Die Linien selbst heifsen, je nachdem ihre Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten etc. Grade sind, von der ersten, zweiten, dritten *etc.* Ordnung.

Von den Gleichungen der graden Linie insbesondere.

235.

Lehrsatz. Die Gleichung jeder graden Linie ist vom ersten Grade und folglich von der Form

$$x + my = a, \text{ oder}$$
$$y + kx = b.$$

Die rechtwinkligen Coordinaten beliebiger Puncte der graden Linie bezeichnen x *und* y; m *und* k *sind Zahlen, die sich nach der Neigung der graden Linie gegen die Axen richten, und welche gleich Null sind, je nachdem die Linie mit einer oder der andern Axe*

parallel läuft; a und b sind die Entfernungen vom Anfangs-Puncte der Coordinaten, in welchen die grade Linie die Axen der x und der y schneiden kann. Schneidet sie beide Axen, so ist $m = \frac{a}{b}$ *und* $k = \frac{b}{a}$.

Beweis. Die durch eine Gleichung auszudrückende grade Linie kann gegen die Coordinaten-Axen verschiedene Lagen haben.

1. Sie kann beide Axen irgendwo, ausserhalb ihres Durchschnitts oder ausserhalb des Anfangs-Punctes der Coordinaten schneiden.

2. Sie kann eine Axe ausserhalb des Anfangs-Punctes der Coordinaten schneiden, also mit der andern Axe parallel seyn.

3. Oder sie kann durch den Durchschnitts-Punct der Axen, oder durch den Anfangs-Punct der Coordinaten gehen.

Von diesen drei Lagen sind wieder verschiedene Fälle möglich, die sich durch die Lage der Durchschnittspuncte der Linie und der Axen, oder auch durch die Neigung der Linie gegen die Axen unterscheiden.

Die Axe der Abscissen, oder der x, sey XAP (Fig 132.) die Axe der Ordinaten, oder der y, sey YAQ, die Entfernungen der Durchschnitts-Puncte der auszudrückenden graden Linie und der Axen der x und y, von dem Anfangs-Puncte der Coordinaten, sollen a und b seyn; was rechts von YAQ und über XAP liegt, soll positiv, was links von YAQ und unter XAP liegt, soll negativ seyn. Alsdann sind die Fälle folgende.

Erste Lage.

1ster Fall. Die auszudrückende grade Linie sey $B_1C_1D_1E_1$, so ist $AD_1 = a$ positiv und $AC_1 = b$ positiv.

2ter Fall. Die grade Linie sey $B_2C_2D_2E_2$, so ist $AD_2 = a$ negativ und $AC_2 = b$ positiv.

3ter Fall. Die grade Linie sey $B_3C_3D_3E_3$, so ist $AD_3 = a$ positiv und $AC_3 = b$ negativ.

4ter Fall. Die grade Linie sey $B_4C_4D_4E_4$, so ist $AD_4 = a$ negativ und A_4C_4 negativ.

Zweite Lage.

1ster Fall. Die grade Linie sey $B_5C_5E_5$, so ist a unendlich grofs, weil die Linie die mit ihr parallele Axe XAP nirgend erreicht, und $AC_5 = b$ ist positiv.

2ter Fall. Die grade Linie sey $B_6C_6E_6$, so ist wieder a unendlich grofs, und $AC_6 = b$ ist negativ.

3ter Fall. Die grade Linie sey $B_7D_7E_7$, so ist b unendlich grofs, und $AD_7 = a$ ist positiv.

4ter Fall. Die grade Linie sey $B_8D_8E_8$, so ist b unendlich grofs, und $AD_8 = a$ ist negativ.

Dritte Lage.

1ster Fall. Die grade Linie sey B_9AE_9, so ist $a = 0$ und $b = 0$.

2ter Fall. Die grade Linie sey $B_{10}AE_{10}$, so ist ebenfalls $a = 0$ und $b = 0$.

In einer dieser Lagen und in einem der verschiedenen Fälle mufs die auszudrückende grade Linie immer seyn.

Für alle Lagen und Fälle kann aber die Abhängigkeit der Coordinaten beliebiger Puncte der graden Linie, immer durch eine und dieselbe Gleichung ausgedrückt werden.

Man nehme den ersten Fall der ersten Lage, $B_1C_1D_1E_1$ und beliebige Puncte M_1, M_2, M_3, M_4 etc. der auszudrückenden Linie an. Sind aus diesen Puncten M_1P_1, M_2P_2 etc. auf XAP und M_1Q_1, M_2Q_2 etc. auf YAQ senkrecht, so sind alle die Dreiecke $M_1P_1D_1$, $M_2P_2D_1$, $M_3P_3D_1$, $M_4P_4D_1$ etc. und alle die Dreiecke $M_1Q_1C_1$, $M_2Q_2C_1$, $M_3Q_3C_1$, $M_4Q_4C_1$ etc. ähnlich. Also ist

$$\frac{M_1P_1}{D_1P_1} = \frac{M_2P_2}{D_1P_2} = \frac{M_3P_3}{D_1P_3} = \frac{M_4P_4}{D_1P_4} \ldots\ldots \text{ und}$$
$$\frac{M_1Q_1}{C_1Q_1} = \frac{M_2Q_2}{C_1Q_2} = \frac{M_3Q_3}{C_1Q_3} = \frac{M_4Q_4}{C_1Q_4} \ldots\ldots$$

Nun werden aber alle die Linien AP_1, AP_2, AP_3, AP_4 etc. durch das veränderliche x und alle die Linien AQ_1, AQ_2, AQ_3, AQ_4 etc. durch das veränderliche y ausgedrückt. Also werden alle die Linien D_1P_2, D_1P_3, D_1P_4 etc. durch $a - x$ und alle die Linien C_1Q_1, C_1Q_2, C_1Q_3, C_1Q_4 etc. durch $b - y$ ausgedrückt. Also haben die Quotienten

$$\frac{y}{a-x} \text{ und } \frac{x}{b-y}$$

für alle mögliche Puncte der auszudrückenden Linie die nemliche Gröſse. Bezeichnet man also $\frac{y}{a-x}$ etwa durch k und $\frac{x}{b-y}$ durch m; so ist für *alle* Puncte der Linie $B_1C_1D_1C_1$,

$$\frac{y}{a-x} = k \text{ und } \frac{x}{b-y} = m,$$

woraus $y = ak - xk$ und $x = bm - ym$, oder

$$x + my = a \text{ und}$$
$$y + kx = b$$

folgt.

Diese Gleichungen passen nun für jede Lage der auszudrückenden Linie.

Schneidet die Linie beide Axen, so ist blos, wie oben aufgezählt, a und b positiv oder negativ.

Schneidet die Linie nur die Axe der x, wie $B_7D_7E_7$, oder $B_8D_8E_8$, so ist $m = 0$, weil alsdann b unendlich groſs ist. Also ist blos

$$x = a;$$

wie es auch die Figur zeigt, denn die Perpendikel aus allen Puncten der Linie auf YAQ sind alsdann gleich a.

Schneidet die Linie nur die Axe der y, wie $B_5C_5E_5$, oder $B_6C_6E_6$, so ist $k = 0$, weil alsdann a unendlich groſs ist. Also ist alsdann blos

$$y = b;$$

wie es wiederum die Figur zeigt, weil alsdann die Perpendikel aus allen Puncten der Linie auf XAP, gleich b sind.

Geht die Linie durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, so sind a und b gleich Null, und es ist

$$x + my = 0 \text{ oder } y + kx = 0.$$

Dafs endlich $m = \frac{b}{a}$ und $k = \frac{a}{b}$ ist, wenn die Linie **beide Axen schneidet**, folgt, wenn man in die Gleichungen $x + my = a$ und $y + kx = b$ die Werthe $\frac{y}{a-x}$ von k und $\frac{x}{b-y}$ von m setzt. Dieses giebt $x + \frac{x}{b-y} \cdot y = a$ und $y + \frac{y}{a-x} \cdot x = b$, oder $bx - xy + xy = ab - ay$ und $ay - xy + xy = ab - bx$, oder $bx + ay = ab$ und $ay + bx = ab$, oder $x + \frac{a}{b} y = a$ und $y + \frac{b}{a} x = b$. Zieht man davon die Gleichungen $x + my = a$ und $y + kx = b$ ab, so findet man $\frac{a}{b} y - my = 0$ und $\frac{b}{a} x - kx = 0$, also

$$m = \frac{a}{b} \text{ und } k = \frac{b}{a}.$$

Auch folgt solches unmittelbar aus der Figur. Denn unter den gleichen Quotienten $\frac{M_1P_1}{D_1P_1}$, $\frac{M_2P_2}{D_2P_2}$ etc., oder $\frac{y}{a-x}$, und $\frac{M_1Q_1}{C_1Q_1}$, $\frac{M_2Q_2}{C_1Q_2}$ etc., oder $\frac{x}{b-y}$, welche gleich k und m gesetzt wurden, gehören auch die, $\frac{C_1A}{D_1A} = \frac{b}{a}$, für $y = b$ und $x = 0$, und $\frac{D_1A}{C_1A} = \frac{a}{b}$, für $x = a$ und $y = 0$; also ist auch $k = \frac{b}{a}$ und $m = \frac{a}{b}$; wie vorhin.

236.

Zusätze. I. *Wenn eine grade Linie beide Axen schneidet und also die Gleichung*

$$x + \frac{a}{b} y = a \text{ oder } y + \frac{b}{a} x = b$$

hat, ist diese Gleichung auch, wenn man mit b *oder* a *multiplicirt,*

$$bx + ay = ab.$$

Oder auch

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wenn man mit a *oder* b *dividirt.*

Schneidet aber die Linie nur eine Axe, oder geht sie durch den Anfangs-Punct der Coordinaten, so mufs man bei den Gleichungen $x + my = a$ *oder* $y + kx = b$, *welche allgemein, für alle Fälle passen, bleiben, weil alsdann* a *und* b *unendlich grofs oder Null, und also die Gleichungen in der Form* $bx + ay = ab$ *und* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ *unbestimmt sind.*

II. *Die Gröfsen* a *und* b, *so wie auch* k *und* m *in den Gleichungen einer graden Linie,*

$$x + my = a \text{ und } y + kx = b$$

waren diejenigen, welche für alle x *und* y, *oder für alle Puncte der Linie, wo sie immer liegen mögen, dieselben bleiben. Sie*

sind also unveränderliche Gröfsen von bestimmtem Werthe, im Gegensatz zu den veränderlichen Coordinaten x *und* y, *welche beliebige Werthe haben können.*

III. *Verschiedene grade Linien unterscheiden sich nur durch die unveränderlichen Gröfsen* a, b, k *und* m; *denn die Form der Gleichungen ist für alle dieselbe, und* x *und* y *können die Coordinaten, sowohl der einen als der andern, bezeichnen. Will man also verschiedene grade Linien durch Gleichungen ausdrücken, so kann solches etwa durch die Gleichungen*

$$x + m_1 y = a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1,$$
$$x + m_2 y = a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2,$$
$$x + m_3 y = a_3, \text{ oder } y + k_3 x = b_3,$$
$$\text{etc.}$$

geschehen, wo m_1, k_1, a_1, b_1; m_2, k_2, a_2, b_2 *etc. die unveränderlichen Gröfsen oder Parameter der verschiedenen Linien sind.*

237.

Lehrsatz. Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$x + m_1 y = a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und}$$
$$x + m_2 y = a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2$$

sind, mit einander parallel seyn sollen, so ist

$$m_1 = m_2 \text{ und } k_1 = k_2 \text{ und } a_2 b_1 = a_1 b_2.$$

Beweis. Die rechtwinkligen Dreiecke unter den beiden Linien für gleiche Coordinaten sind ähnlich, weil die Linien parallel seyn sollen, z. B. für die beiden parallelen Linien C_1D_1 und C_2D_2 (Fig. 133.) die Dreiecke $M_1P_1D_1$ und $M_2P_1D_2$. Also ist

$$\frac{y}{a_1 - x} = \frac{y}{a_2 - x}, \text{ oder } k_1 = k_2 \text{ und}$$

$$\frac{y}{b_1 - y} = \frac{x}{b_2 - y}, \text{ oder } m_1 = m_2;$$

oder auch, weil $k_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $k_2 = \frac{b_2}{a_2}$ und $m_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = \frac{a_2}{b_2}$ ist (§. 235. u. 236.), $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, oder $a_2 b_1 = a_1 b_2$.

238.

Lehrsatz, Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$x + m_1 y = a_1, \text{ oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und}$$
$$x + m_2 y = a_2, \text{ oder } y + k_2 x = b_2$$

sind, auf einander senkrecht stehen sollen, so ist

$$k_1 k_2 = -1, \quad m_1 m_2 = -1 \text{ und } a_1 a_2 = -b_1 b_2; \text{ auch}$$
$$m_1 - m_2 = k_1 - k_2$$

und ihre Gleichungen sind

$$y + m_1 y = a_1 \text{ und } x - k_1 y = a_2;$$
$$\text{oder } y + k_1 x = b_1 \text{ und } y - m_1 x = b_2.$$

Beweis. Die rechtwinkligen Dreiecke unter den beiden Linien, für gleiche Coordinaten, sind in entgegengesetzter Lage ähnlich, z. B. für die beiden auf einander senkrechten Linien C_1D_1 und M_3D_3 (Fig. 133.), die Dreiecke $M_1P_1D_1$ und $M_3P_3D_3$,

und zwar so, dafs $\frac{M_3P_3}{P_3D_1} = \frac{D_3P_3}{M_3P_3}$. Da nun $\frac{M_3P_3}{P_3D_1} = \frac{y}{a_1 - x} = k_1$ und $\frac{D_3P_3}{M_3P_3} = \frac{x - a_2}{y} = -\frac{a_2 - x}{y} = -\frac{1}{k_2}$ ist, so ist $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, oder $k_1k_2 = -1$. Eben so ist $m_1m_2 = -1$. Ferner ist, weil $k_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $k_2 = \frac{b_2}{a_2}$ (§. 235. 236.) und $k_1k_2 = -1$ war, $\frac{b_1b_1}{a_1a_2} = -1$; also $a_1a_2 = -b_1b_2$. Desgleichen ist

$$m_1 - m_2 = m_1 + \frac{1}{m_1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}$$

$$\text{und } k_1 - k_2 = k_1 + \frac{1}{k_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1}{b_1}.$$

Also ist $m_1 - m_2 = k_1 - k_2$. Nun ist wegen $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ und $k_1m_1 = 1$, $m_2 = -k_1$. Also wenn die Gleichung der ersten Linie $x + m_1y = a_1$ ist, so ist die Gleichung der zweiten, $x - k_1y = a_2$. Eben so, wenn die Gleichung der ersten Linie $y + k_1x = b_1$ ist, so ist die Gleichung der zweiten $y - m_1x = b_2$.

239.

Lehrsatz. Wenn zwei beliebige grade Linien, deren Gleichungen

$$x + m_1y = a_1, \text{ oder } y + k_1x = b_1 \text{ und}$$
$$x + m_2y = a_2, \text{ oder } y + k_2x = b_2$$

sind, einander unter beliebigem Winkel schneiden, und man bezeichnet die Coordinaten ihrer Durchschnitts-Puncte durch p *und* q, *so ist*

$$p = \frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2} \text{ und } q = \frac{a_1 - a_2}{m_1 - m_2}.$$

Stehen die Linien zugleich auf einander senkrecht, so ist

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}.$$

Beweis. In dem *Durchschnitts-Puncte* sind die Coordinaten zweier Linien *die nemlichen.* Also ist für diesen Punct, sowohl in den Gleichungen der ersten, als in den Gleichungen der zweiten Linie, $x = p$ und $y = q$; folglich ist

$$p + m_1q + a_1, \text{ oder } q + k_1p = b_1 \text{ und}$$
$$p + m_2q = a_2, \text{ oder } q + k_2p = b_2.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$(m_1 - m_2)q = a_1 - a_2 \text{ und } (k_1 - k_2)p = b_1 - b_2,$$

also

$$p = \frac{b_1 - b_2}{k_1 - k_2} \text{ und } q = \frac{a_1 - a_2}{m_1 - m_2};$$

welches das Erste war.

Es folgt daraus $\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{k_1 - k_2}$. Sollen nun die beiden Linien auf einander senkrecht stehen, so ist zu Folge (§. 238.) $m_1 - m_2 = k_1 - k_2$, also alsdann

$$\frac{p}{q} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2};$$

welches das Zweite war.

240.

Lehrsatz. Soll eine grade Linie, deren Gleichung

$$x + my = a, \text{ oder } y + kx = b$$

ist, durch einen bestimmten Punct gehen, dessen Coordinaten p *und* q *sind, so ist ihre Gleichung*

$$x - p + m(y - q) = 0, \text{ oder } y - q + k(x - p) = 0,$$

oder auch, wenn die Linie beide Axen schneidet,

$$(y - q)a + (x - p)b = 0,$$

und es folgt daraus, wie gehörig, daſs durch einen einzelnen Punct unzählige verschiedene grade Linien gehen können.

Beweis. Da der Punct (pq) in der Linie liegen soll, so ist auch für ihn, vermöge der Gleichung der Linie:

$$p + mq = a, \text{ oder } q + kp = b.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung der Linie ab, so findet man

$$x - p + m(y - q) = 0, \text{ oder } y - q + k(x - p) = 0,$$

oder auch, weil $k = \frac{b}{a}$ und $m = \frac{a}{b}$ ist,

$$x - p + \frac{a}{b}(y - q) = 0, \text{ oder } y - q + \frac{b}{a}(x - p) = 0, \text{ oder}$$

$$(y - q)a + (x - p)b = 0;$$

wie behauptet wird.

Da sich übrigens die zwey Gröſsen a und b, welche die Lage der Linie bestimmen, oder m und k, aus dieser einen Gleichung nicht finden lassen, so bleiben sie willkührlich, und folglich können unzählige verschiedene Linien, alle durch den Punct (pq) gehen.

241.

Lehrsatz. Soll eine grade Linie, deren Gleichung

$$x + my = a, \text{ oder } y + kx = b$$

ist, durch zwei bestimmte Puncte gehen, deren Coordinaten p_1q_1 *und* p_2q_2 *sind, so ist*

$$a = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1 - q_2}, \quad b = \frac{p_1q_2 - p_2q_1}{p_1 - p_2},$$

$$k = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}, \quad m = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1},$$

und die Gleichung der Linie ist

$$(p_1 - p_2)y + (q_2 - q_1)x = p_1q_2 - p_2q_1.$$

Da a, b, k, m *völlig durch* p_1q_1, p_2q_2 *bestimmt werden, so folgt daraus, wie gehörig, daſs durch zwei gegebene Puncte nur eine grade Linie gehen kann.*

Beweis. Da die beiden Puncte (p_1q_1) und (p_2q_2) in der Linie liegen sollen, so ist auch für sie, vermöge der Gleichung der Linie:

$$p_1 + mq_1 = a, \text{ oder } q_1 + kp_1 = b \text{ und}$$
$$p_2 + mq_2 = a, \text{ oder } q_2 + kp_2 = b.$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$p_1 - p_2 + m(q_1 - q_2) = 0 \text{ und } q_1 - q_2 + k(p_1 - p_2) = 0.$$

Daraus folgt

$k = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$, $m = \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1}$, wie oben. Ferner, weil z. B. $p_1 + mq_1 = a$ und $q_1 + kp_1 = b$ war,

$$p_1 + \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} q_1 = a \text{ und } q_1 + \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} p_1 = b,$$

oder

$$\frac{p_1 q_2 - p_1 q_1 + p_1 q_1 - p_2 q_1}{q_2 - q_1} = a \text{ und } \frac{q_1 p_1 - q_1 p_2 + q_2 p_1 - q_1 p_1}{p_1 - p_2} = b,$$

oder

$$\frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - q_2} = a \text{ und } \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{p_1 - p_2} = b, \text{ wie oben.}$$

Desgleichen, wenn man z. B. die Ausdrücke von m und a in die Gleichung der Linie $x + my = a$ setzt,

$$x + \frac{p_1 - p_2}{q_2 - q_1} \cdot y = \frac{p_2 q_1 - p_1 q_2}{q_1 - q_2}, \text{ oder}$$

$$(p_1 - p_2) y + (q_2 - q_1) x = p_1 q_2 - p_2 q_1, \text{ wie oben.}$$

242.

Zusätze. I. In (Fig. 134.) wo M_1 und M_2 die beiden gegebenen Puncte seyn mögen, durch welche die grade Linie $B_1 E_1$ gehen soll, ist die Fläche des Dreiecks $M_2 A M_1$ gleich

Dreieck $M_2 A P_2$ + Trapez $P_2 M_2 M_1 P_1$ − Dreieck $M_1 A P_1$, oder

$\triangle M_2 A M_1 = \frac{1}{2} p_2 q_2 + \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(q_1 + q_2) - \frac{1}{2} p_1 q_1$, oder

$\triangle M_2 A M_1 = \frac{1}{2}(p_2 q_2 + p_1 q_1 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_2 q_2 - p_1 q_1)$, oder

$\triangle M_2 A M_1 = \frac{1}{2}(p_1 q_2 - p_2 q_1)$.

Ferner ist das Rechteck $P_2 M_1 = (p_1 - p_2) y$ und das Rechteck $Q_1 M_2 = (q_2 - q_1) x$. Nun ist vermöge der Gleichung der Linie $B_1 E_1$,

$$(p_1 - p_2) y + (q_2 - q_1) x = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Also folgt, dass die Summe der Rechtecke $P_2 M_1$ und $Q_1 M_2$ für beliebige Puncte M_1 und M_2 doppelt so gross ist, als das Dreieck $M_2 A M_1$.

II. Wenn einer der Puncte, durch welchen eine grade Linie gehen soll, z. B. der Punct $(p_1 q_1)$ der Anfangs-Punct der Coordinaten ist, so ist $p_1 = 0$ und $q_1 = 0$. Also ist alsdann die Gleichung der Linie

$$q_2 x - p_2 y = 0.$$

Es folgt daraus wie gehörig

$$\frac{x}{y} = \frac{p_2}{q_2}.$$

III. Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punct, z. B. $(p_1 q_1)$ gehen und mit einer der Axen, z. B. mit der Axe der x parallel seyn, so ist es soviel als wenn sie durch zwei Puncte geht, deren Ordinaten q_1 und q_2 einander gleich sind. Man muss daher in die Gleichung der Linie (§. 241.) $q_1 = q_2$ setzen. *Dieses giebt* $(p_1 - p_2) y = (p_1 - p_2) q_2$, *also*

$$y = q_2,$$

wie gehörig, weil alle Ordinaten der Linie jetzt gleich q_2 *sind (wie in §. 235.).*

243.

243.

Lehrsatz. *Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punct (pq) gehen und zugleich auf einer andern, deren Gleichung*

$$x + m_2 y = a_2 \quad \textit{oder} \quad y + k_2 x = b_2$$

ist, senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung:

$$y - q = m_2 (x - p), \quad \text{oder} \quad x - p = k_2 (y - q).$$

Die Linie ist durch die Bestimmungs-Stücke m_2 und k_2 der andern Linie und durch die Coordinaten p und q des bestimmten Puncts gegeben, und folglich ist nur eine Linie möglich, welche durch einen bestimmten Punct (pq) geht und zugleich auf einer andern gegebenen Linie senkrecht steht.

Ist der bestimmte Punct (pq) der Anfangs-Punct der Coordinaten, so ist $p = 0$; $q = 0$; also ist alsdann die Gleichung der Linie:

$$y = m_2 x \quad \textit{oder} \quad x = k_2 y.$$

Beweis. Da die beiden Linien auf einander senkrecht seyn sollen, und die Gleichung der einen $x + m_2 y = a_2$ oder $y + k_2 x = b_2$ ist, so ist zu Folge (§. 238.) die Gleichung der andern:

$$x - k_2 y = a_1; \quad \text{oder} \quad y - m_2 x = b_1.$$

Nun soll aber diese andere Linie auch noch durch den Punct (pq) gehen, also ist auch für $x = p$, $y = q$,

$$p - k_2 q = a_1, \quad \text{oder} \quad q - m_2 p = b_1.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

$$x - p - k_2 (y - q) = 0 \quad \text{und} \quad y - q - m_2 (x - p) = 0, \quad \text{oder}$$

$$y - q = m_2 (x - p) \quad \text{und} \quad x - p = k_2 (y - q);$$

wie behauptet wird.

244.

Lehrsatz. *Soll eine grade Linie durch einen bestimmten Punct $(p_1 q_1)$ gehen und zugleich auf einer andern senkrecht stehen, die durch zwei bestimmte Puncte $(p_2 q_2)$ und $(p_3 q_3)$ geht, so ist ihre Gleichung:*

$$(y - q_1)(q_2 - q_3) = (p_1 - x)(p_2 - p_3).$$

Ist der Punct $(p_1 q_1)$ der Anfangs-Punct der Coordinaten, so ist $p_1 = 0$; $q_1 = 0$, also alsdann die Gleichung der Linie:

$$y (q_2 - q_3) = x (p_3 - p_2).$$

Ist einer der beiden andern Puncte, z. B. der Punct $(p_3 q_3)$ der Anfangs-Punct der Coordinaten, so ist $p_3 = 0$, $q_3 = 0$ und also die Gleichung der Linie in diesem Fall

$$(y - q_1) q_2 = (p_1 - x) p_2, \quad \text{oder}$$

$$y q_2 + x p_2 = p_1 p_2 + q_1 q_2.$$

Beweis. Die Gleichung der Linie, welche durch die beiden Puncte $(p_2 q_2)$ und $(p_3 q_3)$ gehen soll, ist zu Folge (§. 241.)

$$(p_2 - p_3) y + (q_3 - q_2) x = p_2 q_3 - p_3 q_2,$$

oder

$$y + \frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} x = \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_2 - p_3},$$

oder, wenn man einen Augenblick

$$\frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} = k_2 \quad \text{und} \quad \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{p_2 - p_3} = b_2$$

setzt,

$$y + k_2 x = b_2.$$

Soll nun die andere Linie, welche durch den bestimmten Punct $(p_1 q_1)$ geht, auf dieser senkrecht stehen, so ist ihre Gleichung zu Folge (§. 243.)

$$x - p_1 = k_2 (y - q_1),$$

also hier

$$x - p_1 = \frac{q_3 - q_2}{p_2 - p_3} (y - q_1),$$

oder $(y - q_1)(q_2 - q_3) = (p_1 - x)(p_2 - p_3)$;
wie behauptet wird.

245.

Lehrsatz. Die Länge P *eines Perpendikels aus einem gegebenen Puncte* (pq) *auf eine gegebene grade Linie, deren Gleichung*

$$x + my = a \text{ oder } y + kx = b$$

ist, ist

$$P = \frac{b - q - kp}{\sqrt{(1 + k^2)}} = \frac{a - p - mq}{\sqrt{(1 + m^2)}}.$$

Beweis. Der gegebene Punct (pq) sey M (Fig. 135.), so ist
der Inhalt des Dreiecks $AMD = \frac{1}{2} aq$,
der Inhalt des Dreiecks $AMC = \frac{1}{2} bp$,
der Inhalt des Dreiecks $CMD = \frac{1}{2} P \sqrt{(a^2 + b^2)}$,
der Inhalt des Dreiecks $CAD = \frac{1}{2} ab$.
Der Inhalt der drei ersten Dreiecke aber ist dem Inhalte des letzten gleich. Also ist

$$aq + bp + P\sqrt{(a^2 + b^2)} = ab.$$

Hieraus folgt

$$P = \frac{ab - aq - bp}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \frac{b - q - \frac{b}{a} p}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}} = \frac{a - p - \frac{a}{b} q}{\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}},$$

oder weil $\frac{a}{b} = m$, $\frac{b}{a} = k$ ist (§. 235.),

$$P = \frac{b - q - kp}{\sqrt{(1 + k^2)}} = \frac{a - p - mq}{\sqrt{(1 + m^2)}};$$

wie behauptet wird.

246.

Anmerkung. Diese Sätze reichen hin, die Abschnitte und die Lage sich schneidender grader Linien auch in andern Fällen durch Coordinaten zu finden.

Drittes Buch.

Vom Kreise.

247.

Erklärungen. I. *Die von einer* Kreislinie *umschlossene* Fläche *heifst* **Kreis** (*lat. Circulus*). *Die Kreis-Linie heifst auch* **Umfang** *des Kreises* (*Peripheria*). *Die gleichen Entfernungen aller Puncte der Kreislinie von ihrem Mittel-Puncte* M (Fig. 136.), *also die graden Linien* AM = BM = CM = DM *etc. heifsen* **Halbmesser** (*Radii*) *).

II. *Jede grade Linie durch den Mittelpunct eines Kreises, innerhalb des Kreises, die also dem zwiefachen Halbmesser gleich ist, heifst* **Durchmesser** (*Diameter*).

III. *Jedes Stück der Kreislinie, oder des Kreis-Umfanges, wie z. B.* AB, ABC, ABCP *etc. heifst* **Kreis-Bogen** (*Arcus*). *Der Bogen kann auch gröfser seyn als der ganze Umfang, und gröfser wie eine beliebige Zahl von Umfängen; ohne Ende. Dann enthält der Bogen einen oder mehrere Umfänge und noch ein Stück des Umfanges dazu, z. B. der Bogen* ABCPAQ *enthält einen ganzen Umfang und noch das Stück* AQ *von dem zweiten.*

IV. *Jede von einem Kreisbogen und den beiden, durch die Enden des Bogens gehenden Halbmessern eingeschlossene Fläche, wie z. B.* AMB *oder* BMC *etc. heifst* **Kreis-Ausschnitt** (*Sector*).

V. *Jede grade Linie, welche eine Kreislinie schneidet, wie* EFGH, IKLZ *etc. heifst* **Schneidende** (*Secans*).

---

*) Es ist nothwendig, wenigstens diejenigen lateinischen Benennungen beim Kreise zu merken, welche, zum Theil mit deutschen Biegungen, häufig auch statt der deutschen gebraucht werden.

Der **innerhalb** *des Kreises liegende Theil einer* **Secante**, *wie* FG, KL *etc. heifst* **Sehne** (*Chorda*). *Jede Sehne gehört zu* **zwei** *Bogen, die zusammen einen oder mehrere Umfänge ausmachen, z. B. die Sehne* FG *gehört zu den beiden Bogen* FNG *und* FKSG, *welche zusammen einen Umfang ausmachen, und zu jedem dieser Bogen kann man noch einen oder mehrere Umfänge hinzugethan sich vorstellen.*

Das Perpendikel aus dem Mittelpunct eines Kreises auf eine Sehne, wie MX, *heifst auch* **Apotome**.

VI. *Die von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen eingeschlossene Fläche, wie z. B. die Fläche* FNG, *oder die Fläche* FDPCG *heifst* **Kreis-Abschnitt** (*Segmentum*).

VII. *Flächen, welche von zwei Kreisbogen von gleichen oder ungleichen Halbmessern eingeschlossen werden, wie* YY_1Y_2CB, *heifsen* **Monden** (*Lunulae, Menisci*).

VIII. *Winkel, deren Schenkel zwei* **Halbmesser** *sind, und deren Scheitel also im Mittelpunct des Kreises liegen, wie z. B.* BMC, CMD *etc. heifsen* **Winkel am Mittelpuncte**.

IX. *Winkel, deren Schenkel zwei* **Sehnen** *sind, und deren Scheitel also im Umfange liegen, wie z. B.* QRS, *heifsen* **Winkel am Umfange**, *und man sagt, der Winkel* QRS **stehe auf dem Bogen** *QS*.

X. *Jede grade oder zweite Kreislinie, wie* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ *etc., zwischen welcher und einer Kreislinie keine grade Linie möglich ist, die die Kreislinie nicht zweimal schnitte, heifst* **Berührende** (*Tangens*), *auch wohl die* **grade Linie ausschliefslich Berührende** *oder* **Tangente**, *die zweite* **Kreislinie, berührende Kreislinie**.

XI. *Gradlinige Figuren, deren Endpuncte in einer Kreislinie liegen wie z. B.* abcd, *heifsen* **eingeschriebene** (*inscriptae*). *Der Halbmesser des Kreises ist also der* **Halbmesser der Ecken einer eingeschriebenen Figur**.

XII. *Gradlinige Figuren, wie* $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, *deren Seiten* **Tangenten** *einer und derselben Kreislinie sind, heifsen* **umschriebene** (*circumscriptae*). *Der Halbmesser des Kreises ist also der* **Halbmesser der Seiten** *einer* **umschriebenen** *Figur.*

I. Von gleichen Kreisen und dem was davon abhängt.

248.

Lehrsätze. I. *Wenn Kreise gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.*

Beweis. Man lege die Mittelpuncte der Kreise in einander, z. B. *N* in *M* (Fig. 137.), so fällt nothwendig irgend ein Punct *B* der Kreislinie (II.) in einen Punct *A* der Kreislinie (I.), weil die Halbmesser *BN* und *AM* gleich vorausgesetzt werden. Aber auch kein anderer Punct der Kreislinie (II.) kann aufserhalb der Kreislinie (I.) fallen. Denn gesetzt, der Punct *Q* fiele in *P*, aufserhalb der Kreislinie (I.), so wären die Entfernungen *MP* oder *QN* der Entfernung *AM* nicht gleich, weil die Entfernungen aller Puncte des Umfanges des Kreises (I.) gleich sind. Es wird aber $BN = AM$ vorausgesetzt, also auch, weil $QN = BN$ ist, $QN = AM$. Folglich können *MP* und *AM* nicht ungleich seyn, und folglich kann kein Punct der Kreislinie (II.) aufserhalb der Kreislinie (I.) fallen, sobald man die Mittelpuncte in einander legt, und folglich sind die Kreise gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

II. *Wenn Kreise gleich sind, so haben sie gleiche Halbmesser.*

Beweis. Man lege die Umfänge der gleichen Kreise, z. B. (II. und I.) (Fig. 137.) in einander. Gesetzt der Mittelpunct *N* des Kreises (II.) fiele nicht in den Mittelpunct *M* des Kreises (I.), sondern irgend wo anders hin, z. B. in *Z*, so sey *CMZK* eine grade Linie durch *M* und *Z*. Da nun alle Halbmesser beider Kreise gleich seyn müssen, so müfste $CM = MK$ und zugleich $CZ = ZK$ seyn. Dieses ist unmöglich; denn es ist $CZ = CM + MZ$ und $ZK = MK - MZ = CM - MZ$ und es kann nicht $CM + MZ = CM - MZ$ seyn. Also kann der Mittelpunct *N* nicht aufserhalb des Mittel-Puncts *M* fallen; die beiden Mittelpuncte müssen vielmehr in einander fallen. Dann aber sind die Halbmesser der beiden Kreise gleich; denn sie sind alsdann die Entfernungen einer und derselben Kreislinie von einem und demselben Puncte.

249.

Lehrsätze. I. *Wenn zwei Kreis-Ausschnitte gleiche Winkel am Mittelpuncte und gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.*

Z. B. die Ausschnitte *CME* und *EMG* (Fig. 137.), oder wenn *CM*=*DN*, die Ausschnitte *CME* und *DNF*, sind gleich, wenn die Winkel *CME* und *EMG*, oder *CME* und *DNF* gleich sind.

Beweis. Legt man den Winkel *DNF* oder *EMG* in den Winkel *CMG*, so fällt *D* in *C*, *F* in *E*, eben so wohl wie *E* in *C* und *G* in *E*. Dann aber müssen auch die Bogen, welche mit den Schenkeln der gleichen Winkel die Ausschnitte einschliefsen, in einander fallen. Denn da alle Halbmesser des Bogens *CE* gleich lang sind, so wäre, wenn irgend ein Punct der Bogen *EG* oder *DF* aufserhalb des Bogens *CE*, etwa in *P* fiele, der Halbmesser *MP* nach diesem Puncte, dem Halbmesser des Bogens *CE* nicht gleich, welches der Voraussetzung entgegen ist, indem auch die Halbmesser der Bogen *EG* und *DF* alle unter sich und dem Halbmesser des Bogens *CE* gleich sind.

Da nun die Schenkel des Winkels und die die Ausschnitte begrenzenden Bogen, also alle Grenzen der Ausschnitte in einander fallen, so sind die Ausschnitte gleich.

II. *Wenn zwei Kreis-Ausschnitte gleiche Bogen haben, so haben sie auch gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpuncte und sind gleich.*

Z. B. wenn in (Fig. 137.) die Bogen *DF* und *CE* gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser *DN* und *CM* und die Winkel am Mittelpunct *DNF* und *CME* gleich und die Ausschnitte *DNF* und *CME* selbst sind gleich.

Beweis. Man lege den Punct *D* in den Punct *C* und den Bogen *DF* in den Bogen *CE*, so fällt *F* in *E*, weil die Bogen gleich seyn sollen. Fiele nun der Mittelpunct *N* des Bogens *DF* nicht in den Mittelpunct *M* des Bogens *CE*, sondern irgend wo anders hin, z. B. in *Y*, so dafs *DN* in *CY*, *FN* in *EY* fiele, so wäre *CY*=*EY*, weil die Halbmesser *DN* und *FN* gleich sind. Da nun auch die Halbmesser *CM* und *EM* gleich sind, so wären in den beiden Dreiecken *CYM* und *EYM* alle drei Seiten gleich, nemlich

$$CY = EY,\ CM = EM \text{ und } YM = YM.$$

Dieses ist unmöglich, weil mit den nemlichen drei Sei-

ten nicht zwei verschiedene Dreiecke existiren. Also kann *N* nicht aufserhalb *M*, sondern mufs in *M* fallen. Daraus folgt, dafs die Halbmesser der beiden gleichen Bogen und ihre Winkel am Mittelpuncte, folglich auch die Ausschnitte *DNF* und *CME* gleich sind.

250.

Zusätze. I. *Also gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte gleiche Bogen von gleichen Halbmessern,*

II. *und zu gleichen Bogen gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpunct.*

III. *Jeder Durchmesser eines Kreises theilt ihn und und seinen Umfang in zwei gleiche Theile, oder in Halbe-Kreise and Halbe-Umfänge.*

Denn der Durchmesser besteht aus zwei Halbmessern, welche unter zwei rechten Winkeln zusammenstofsen. Die Theile vom Kreise zu beiden Seiten eines Durchmessers sind also gleiche Ausschnitte, deren Winkel am Mittelpuncte zwei rechte sind.

IV. *Jede grade Linie, die einen Kreis, und folglich seinen Umfang in zwei gleiche Theile theilt, ist ein Durchmesser und geht also durch den Mittelpunct.*

Denn zu dem gleichen Halbkreis-Bogen gehören gleiche Winkel am Mittelpuncte. Nun gehören zu dem ganzen Umfange vier rechte Winkel am Mittelpuncte, also zwei rechte zu dem Halbkreise. Also stofsen die Halbmesser aus dem Mittelpuncte nach den Endpuncten der Halbkreise unter zwei rechten Winkeln zusammen, und liegen folglich in einer graden Linie, und zwar im Durchmesser, weil der Mittelpunct in ihm liegt. Sie sind folglich die grade Linie selbst, welche den Kreis halbirt, weil zwischen den zwei End-Puncten der gleichen Halbkreisbogen nur eine grade Linie möglich ist (§. 11.). Die halbirende grade Linie ist also ein Durchmesser und geht folglich durch den Mittelpunct.

251.

Lehrsätze. I. *Wenn zwei Kreis-Abschnitte gleiche Sehnen und gleiche Halbmesser haben, so sind sie gleich.*

Z. B. wenn in (Fig. 137.) die Sehnen *CE* und *DF* und die Halbmesser *CM* und *DN* gleich sind, so sind die Kreis-Abschnitte *CUE* und *DVF* gleich.

Beweis. Weil $NF = DN$ und $EM = CM$ ist und $DN = CM$ seyn soll, so ist in den Dreiecken CME und DNF, $CM = DN$, $EM = FN$, desgleichen ist nach der Voraussetzung $CE = DF$. Also sind alle drei Seiten in dem einen Dreieck so groſs als in dem andern. Folglich sind die Dreiecke CME und DNF und mithin auch die Winkel am Mittelpuncte CME und DNF, für gleiche Halbmesser $CM = DN$, gleich. Zu solchen Winkeln aber gehören gleiche Bogen (§. 250. I.). Also fallen, wenn man die Sehnen CE und DF in einander legt, auch die Bogen CUE und DVF, mithin alle Grenzen der Kreis-Abschnitte CUE und DVF in einander und folglich sind die Abschnitte gleich.

II. *Wenn zwei Kreis-Abschnitte gleiche Bogen haben, so haben sie auch gleiche Sehnen und sind gleich. Desgleichen haben sie gleiche Halbmesser und gleiche Winkel am Mittelpuncte.*

Z. B. wenn die Bogen CUE und DVF gleich sind, so sind auch die Sehnen CE und DF, und die Abschnitte CUE und DVF gleich, und haben gleiche Halbmesser $CM = DN$ und gleiche Winkel am Mittelpuncte $CME = DNF$.

Beweis. Wenn die Bogen CUE und DVF gleich sind, so sind auch ihre Sehnen CE und DF gleich; denn legt man die Bogen in einander, so fallen ihre End-Puncte in einander und zwischen zwei Puncten ist nur eine grade Linie möglich (§. 11.). Da nun auf diese Weise alle Grenzen der Abschnitte in einander fallen, so sind die Abschnitte gleich. Die Halbmesser der Abschnitte und die Winkel am Mittelpuncte sind gleich, weil die Bogen gleich sind (§. 250. II.).

252.

Zusatz. I. *Also gehören zu gleichen Sehnen, für gleiche Halbmesser, gleiche Bogen,*

II. *und zu gleichen Bogen gleiche Sehnen.*

253.

Lehrsätze. I. *Wenn eine grade Linie auf einer Sehne senkrecht steht und sie halbirt, so halbirt sie auch die zu der Sehne gehörigen beiden Bogen und ist ein Durchmesser des Kreises.*

Z. B. wenn DE (Fig. 138.) auf AB senkrecht und $AC = CB$ ist, so sind auch die Bogen AD, BD und

ARE, *BSE* gleich und *DE* geht durch den Mittelpunct des Kreises *M*.

Beweis. Da $AC = CB$ vorausgesetzt wird und die graden Linien *DC* und *EC* sich selbst gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *ACD*, *BCD* und *ACE*, *BCE* gleich; folglich ist $AD = BD$ und $AE = BE$. Da auf diese Weise die Kreis-Abschnitte *APD*, *BQD* und *ARE*, *BSE* gleiche Sehnen, zugleich aber sämmtlich einen und denselben Halbmesser haben, so sind auch die Bogen *APD*, *BQD* und *ARE*, *BSE* gleich (§. 252. I,); welches das Erste war.

Es sind aber auch die Summen dieser Bogen *ERAPD* und *ESBQD* gleich. Dieselben sind also Halbkreise, und folglich ist das Perpendikel *DE* ein Durchmesser und geht also durch den Mittelpunct *M* (§. 250. IV.).

II. *Wenn eine grade Linie einen Kreisbogen und seine Sehne halbirt, so steht sie auf der Sehne senkrecht, halbirt auch den andern zu der Sehne gehörigen Bogen und ist ein Durchmesser.*

Z. B. wenn in (Fig. 158.) $AC = CB$ ist, und die Bogen *APD* und *BQD* sind gleich, so steht *DC* auf *AB* senkrecht; ferner sind auch die Bogen *ARE* und *BSE* gleich und die grade Linie *DCE* geht durch den Mittelpunct des Kreises *M*.

Beweis. Da die Bogen *APD* und *BQD* gleich seyn sollen, so sind auch ihre Sehnen gleich (§. 252. II.). Mithin sind in den beiden Dreiecken *ACD* und *BCD* alle drei Seiten in dem einen so grofs als in dem andern, nemlich $AC = BC$, $AD = BD$ und $DC = DC$, folglich sind diese Dreiecke gleich. Also sind die Winkel *DCA* und *DCB* gleich, und folglich, weil *ACB* eine grade Linie ist, rechte. Folglich steht *DC* auf *AB* senkrecht; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise *DCE* ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne *AB* ist, so sind auch, vermöge (I.) die Bogen *ARE* und *BSE* gleich und *DCE* ist ein Durchmesser; welches das Zweite und Dritte war.

III. *Wenn eine Sehne von einem Durchmesser halbirt wird, so steht dieser Durchmesser auf der Sehne senkrecht und halbirt die zu ihr gehörigen beiden Bogen.*

Z. B. wenn *DME* (Fig. 158.) ein Durchmesser und $AC = CB$ ist, so steht *DE* auf *AB* senkrecht und die Bogen *APD*, *BQD* und *ARE*, *BSE* sind gleich.

Beweis. Da die Linie *DE* ein Durchmesser ist, so geht sie durch den Mittelpunct *M*. Also sind *AM* und *BM* Halbmesser, und folglich gleich. Mithin sind in den Dreiecken *AMC* und *BMC* alle drei Seiten in dem einen so grofs als in dem andern, nemlich *AM* $= BM$, $AC = BC$, nach der Voraussetzung, und $CM = CM$. Folglich sind diese Dreiecke gleich, und folglich sind bei *C* rechte Winkel. Mithin steht *DE* auf *AB* senkrecht; welches das Erste war.

Da auf diese Weise *DE* ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne *AB* ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen *APD*, *BQD* und *ARE*, *BSE* gleich; welches das Zweite war.

IV. *Wenn eine grade Linie einen Kreis-Bogen halbirt und auf seiner Sehne senkrecht steht, so halbirt sie auch die Sehne und den andern zu ihr gehörigen Bogen und ist ein Durchmesser.*

Z. B. wenn die Bogen *APD* und *BQD* (Fig. 138.) gleich sind und die grade Linie *DCE* steht auf der Sehne *AB* senkrecht, so ist auch $AC = BC$, Bogen *ARE* = Bogen *BSE*, und *DCE* ist ein Durchmesser.

Beweis. Da die Bogen *APD* und *BQD* gleich seyn sollen, so sind auch ihre Sehnen *AD* und *BD* gleich (§. 262. II.). Also ist in den rechtwinkligen Dreiecken *ACD* und *BCD*, $AD = BD$ und $DC = DC$. Folglich sind die Dreiecke gleich und es ist $AC = BC$; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise *DCE* ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne *AB* ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen *ARE* und *BSE* gleich, und *DCE* ist ein Durchmesser.

V. *Wenn ein Durchmesser einen Kreisbogen halbirt, so halbirt er auch seine Sehne, steht auf ihr senkrecht und halbirt auch den andern, zu der Sehne gehörigen Bogen.*

Z. B. wenn die Bogen *APD* und *BQD* (Fig. 138.) gleich sind und die grade Linie *DCE* ist ein Durchmesser, so sind bei *C* rechte Winkel; ferner ist $AC = BC$, und auch die Bogen *ARE* und *BSE* sind gleich.

Beweis. Da der Durchmesser *DCE* den Umfang des Kreises halbirt (§. 250. III.), und die Bogen *APD* und *BQD* gleich seyn sollen, so sind auch die Bogen *ARE* und *BSE* gleich, wie behauptet wird.

Da die Bogen *APD* und *BQD* gleich sind, so sind auch ihre Sehnen *AD* und *BD* gleich (§. 252. II.). Eben so verhält es sich mit den Sehnen *AE* und *BE* der gleichen Bogen *ARE* und *BSE*. Also sind in den Dreiecken *ADE* und *BDE* alle drei Seiten in dem einen so grofs als in dem andern. Folglich sind die Dreiecke, und folglich die Winkel *ADE* und *BDE* gleich. Dann aber sind die Dreiecke *ADC* und *BDC* gleich, weil $AD = BD$, $DC = DC$ und die eingeschlossenen Winkel gleich sind. Also sind bei *C* rechte Winkel; welches das Zweite war.

Desgleichen ist $AC = BC$; welches das Dritte war.

VI. *Wenn ein Durchmesser eines Kreises auf einer Sehne senkrecht steht, so halbirt er sie und die zu ihr gehörigen Bogen.*

Z. B. wenn *DCE* (Fig 138.) ein Durchmesser ist und bei *C* rechte Winkel sind, so ist $AC = CB$ und die Bogen *APD*, *BDQ* und *ARE*, *BSE* sind gleich.

Beweis. Da *DCE* ein Durchmesser seyn soll, so sind *AM* und *BM* Halbmesser und folglich ist $AM = BM$. Mithin sind in den rechtwinkligen Dreiecken *AMC* und *BMC*, $AM = BM$, $CM = CM$. Also sind die Dreiecke gleich und folglich ist $AC = BC$; welches das Erste war.

Da nun auf diese Weise *DE* ein Perpendikel auf die Mitte der Sehne *AB* ist, so sind auch, vermöge (I.), die Bogen *APD*, *BQD* und *ARE*, *BSE* gleich; welches das Zweite war.

254.

Anmerkung. Die 6 Lehrsätze des vorigen Paragraphs kann man auf folgende Weise in Worten zusammenfassen.

Es kann eine grade Linie:

1) *die Sehne eines Kreises halbiren;*
2) *auf ihr senkrecht stehen;*
3) *den einen oder den andern, zu der Sehne gehörigen Bogen halbiren;*
4) *ein Durchmesser seyn.*

Ist sie in zwei von diesen Fällen, so ist sie auch in den beiden andern.

Da sich zwei Dinge aus vieren nicht öfter als sechs Mal auf verschiedene Weise nehmen lassen, so giebt es nicht mehr als die oben abgehandelten sechs Fälle.

255.

Lehrsatz. I. *Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpuncte gleich weit entfernt.*

Beweis. Die Sehne AB (Fig. 139.) sey der Sehne FG gleich. KM sey auf AB und LM auf FG senkrecht, so ist $AK = \frac{1}{2} AB$ und $FL = \frac{1}{2} FG$ (§. 253. VI.), weil die graden Linien KM und LM durch den Mittelpunct gehen und folglich Durchmesser sind. Da nun $AB = FG$ vorausgesetzt wird, so ist auch $AK = FL$. Nun sind auch die Halbmesser AM und FM gleich. Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken AMK und FML die Seiten AM, FM und AK, FL gleich. Folglich sind die Dreiecke gleich, und folglich ist $KM = LM$; das heifst: gleiche Sehnen sind vom Mittelpuncte gleich weit entfernt.

II. *Gleich weit vom Mittelpuncte entfernte Sehnen sind gleich.*

Beweis. Wenn die Sehnen AB und FG vom Mittelpuncte gleich weit entfernt, und die graden Linien MK und ML aus dem Mittelpuncte auf den Sehnen senkrecht sind, so wird vorausgesetzt $MK = ML$. Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken AMK, FML und BMK, GML die Seiten MK, ML so wie die Seiten MA, MF und MB, MG, als Halbmesser, gleich. Also sind die Dreiecke gleich. Und folglich ist $AK = FL$, $BK = GL$, folglich auch $AK + BK = FL + GL$, oder $AB = FG$; das heifst: gleich weit vom Mittelpunct entfernte Sehnen sind gleich.

256.

Lehrsatz. *Der Durchmesser eines Kreises ist die gröfste seiner Sehnen.*

Beweis. Welche auch die Sehne seyn mag, z. B. AB (Fig. 138.): immer schliefst sie mit zwei Halbmessern nach ihren Endpuncten ein Dreieck AMB ein und in diesem Dreieck ist AB kürzer als die Summe der beiden Seiten AM und BM (§. 49.). Nun ist AB die Sehne, und die Summe der beiden Halbmesser AM und BM ist dem Durchmesser gleich; also ist jede Sehne kürzer als der Durchmesser.

257.

Lehrsätze. I. *Wenn ein Kreisbogen immer fort zunimmt, bis zum halben Umfange, so nimmt auch*

seine Sehne zu, bis zum Durchmesser. Nimmt der Kreisbogen weiter zu, bis zum zweiten halben Umfange, so nimmt die Sehne ab, bis Null. Von hier bis zum dritten halben Umfange nimmt die Sehne wieder mit dem Bogen zu; vom dritten bis zum vierten halben Umfange nimmt sie ab u. s. w. abwechselnd ab und zu.

Beweis. Wenn der Bogen *AC* (Fig. 139.) gröſser ist als der Bogen *AB*, so ist der Winkel *AMC* gröſser als der Winkel *AMB*. Nun schlieſsen die Halbmesser nach den Endpuncten des Bogens, *AM*, *MB*, und *AM*, *MC*, so lange mit den Sehnen *AB* und *AC* Dreiecke ein, als die Winkel *AMB* und *AMC* kleiner sind als zwei rechte. Ist ein Bogen gröſser als ein halber Umfang, wie *ACE*, und folglich der zugehörige Winkel *AME* gröſser als zwei rechte, so schlieſsen die Halbmesser nach seinen Endpuncten *AM* und *ME* nicht mehr mit seiner Sehne *AE* ein Dreieck ein, dessen Winkel der zu dem Bogen *ACE* gehörige äuſsere Winkel *AME* wäre, weil kein Winkel eines Dreiecks gröſser seyn kann als zwei rechte (§. 33. II.), sondern der Winkel des Dreiecks *AME* ist die Ergänzung des äuſsern Winkels *AME* zu vier rechten. Was also durch ein Dreieck bewiesen wird, dessen Seiten zwei Halbmesser nach den Endpuncten eines Bogens, nebst der Sehne sind, gilt nur so lange, als der Bogen kleiner ist als ein halber Umfang.

Es mögen daher *AB* und *AC* zwei Bogen seyn, die kleiner sind als ein halber Umfang, so sind in den beiden Dreiecken *AMB* und *AMC* die Seiten *AM*, *MB* und *AM*, *MC* die nemlichen, denn sie sind sämmtlich Halbmesser, hingegen der Winkel *AMC*, den *AM* und *MC* einschlieſsen, ist gröſser als der Winkel *AMB*, den *AM* und *MB* einschlieſsen. Also ist auch die dritte Seite *AC* gröſser als *AB* (§. 51. I.). Folglich wächst, mit dem Bogen, von 0 bis zum halben Umfange, seine Sehne, und zwar von Null bis zum Durchmesser; denn die Sehne des Bogens Null, ist Null und die Sehne des halben Umfanges, ist der Durchmesser.

Nun gehört aber die Sehne eines Bogens auch zunächst noch zu einem Bogen der jenen zu einem ganzen Umfange ergänzt, z. B. die Sehne *AC* des Bogens *ABC* gehört auch zu dem Bogen *CEA*, der den Bogen *ABC* zu einem ganzen Umfange ergänzt. Diese Ergänzung eines Bogen, wie *AC*, der kleiner ist als ein halber Umfang, nimmt aber von einem ganzen bis zu

einem halben Umfange ab, wenn der Bogen *AC* von Null bis zu einem halben Umfange wächst. Also nimmt die Sehne eines Bogens, die zwischen einem halben und einem ganzen Umfange liegt, ab, wenn der Bogen vom halben bis zum ganzen Umfange zunimmt, und zwar vom Durchmesser an bis zu Null.

Ferner gehört die Sehne eines Bogens auch zu einem Bogen der um einen ganzen Umfang größer ist, z. B. die Sehne *AC* gehört auch zu dem Bogen *ABDEAC*, und dieser Bogen nimmt von einem ganzen bis zu anderthalb Umfängen zu, wenn die Sehne *AC* von Null bis zu einem halben Umfange zunimmt. Also nimmt die Sehne eines Bogens, der zwischen einem ganzen und anderthalb Umfängen liegt, zu, wenn der Bogen von einem ganzen bis zu anderthalb Umfängen wächst, und zwar von Null bis zum Durchmesser.

Sodann gehört die Sehne eines Bogens, wie *AC*, auch zu einem Bogen *CEABDEA*, welcher den Bogen *AC* zu zwei ganzen Umfängen ergänzt. Dieser ergänzende Bogen nimmt aber ab, wenn der Bogen *AC* von Null bis zum halben Umfange zunimmt. Also nimmt die Sehne eines Bogens, der zwischen anderthalb und zwei ganzen Umfängen liegt, ab, wenn der Bogen von anderthalb bis zu zwei Umfängen zunimmt und zwar vom Durchmesser bis zu Null.

Und so abwechselnd weiter.

II. *Zu größeren Sehnen gehören größere Bogen, zwischen Null und $\frac{1}{2}$, 1 und $1\frac{1}{2}$, 2 und $2\frac{1}{2}$, 3 und $3\frac{1}{2}$ etc. und kleinere Bogen zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, $1\frac{1}{2}$ und 2, $2\frac{1}{2}$ und 3 etc. Umfängen.*

Beweis. Wenn z. B. die beiden Sehnen *AB* und *AC* (Fig. 139.) zu Bogen gehören, welche beide kleiner sind als halbe Umfänge, so sind die Winkel *AMB* und *AMC*, welche Halbmesser nach den Endpuncten der Bogen einschließen, kleiner als zwei rechte. Folglich schließen die Halbmesser mit den Sehnen, Dreiecke *AMB* und *AMC* ein. In diesen Dreiecken sind zwei Seiten *AM*, *BM* und *AM*, *CM* die nemlichen, die dritte Seite *AC* aber, nemlich die eine Sehne, ist nach der Voraussetzung größer als die andere Sehne *AB*. Also ist auch der gegenüberliegende Winkel *AMC* größer als der Winkel *AMB* (§. 51. II.), folglich ist auch der Bogen *AC* größer als der Bogen *AB*, das heißt: zu größeren Sehnen gehören größere Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ Umfang.

Nun gehören die Sehnen *AB* und *AC* auch zu den Bogen *BDEA* und *CDEA*, welche die Bogen *AB* und *AC* zu einem ganzen Umfange ergänzen. Die äufsern Winkel *AMB* und *AMC*, welche zu diesen Bogen gehören, sind die Ergänzungen der Winkel *AMB* und *AMC* zu vier rechten. Es ist aber vorhin bewiesen, dafs der Bogen *AC*, welcher zu der gröfsern Sehne *AC* gehört, gröfser ist als der Bogen *AB*, welcher zu der kleinern Sehne *AB* gehört. Also ist der zu der gröfsern Sehne *AC* gehörende, ergänzende Bogen *CDEA* kleiner als der zu der kleinern Sehne *AB* gehörende ergänzende Bogen *BDEA*; folglich gehören kleinere Bogen, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 Umfang, zu gröfseren Sehnen.

Ferner gehören die Sehnen *AB* und *AC* zu den Bogen *ACEAB* und *ABDFAC*, welche zwischen 1 und $1\frac{1}{2}$ Umfänge liegen. Dergleichen Bogen nehmen mit *AB* und *AC* zugleich zu. Also gehören zu gröfseren Sehnen gröfsere Bogen zwischen 1 und $1\frac{1}{2}$ Umfängen.

Dagegen nehmen wieder Bogen, welche *AC* und *AB* zu zwei ganzen Umfängen ergänzen, ab, wenn *AC* und *AB*, von Null bis zum halben Umfange zunehmen. Also gehören zu gröfseren Sehnen kleinere Bogen zwischen $1\frac{1}{2}$ und 2 Umfängen.

Und so abwechselnd weiter.

258.

Lehrsatz. I. *Gröfsere Sehnen sind dem Mittelpunct näher als kleinere, oder kleinere entfernter davon als gröfsere.*

Beweis Die Sehne *AC* (Fig. 139.) sey gröfser als die Sehne *FG*, und *MQ* auf *AC*, *ML* auf *FG* senkrecht, so ist $AQ = \frac{1}{2}AC$ und $FL = \frac{1}{2}FG$ (§. 253. VI.), weil die graden Linien *MQ* und *ML* durch den Mittelpunct gehen und also in Durchmessern liegen. In dem rechtwinkligen Dreieck *AMQ* ist also die Seite *AM* so grofs, als die Seite *FM* in dem rechtwinkligen Dreieck *FML*; denn beide sind Halbmesser. Hingegen die Seite *AQ* ist gröfser als *FL*; denn *AQ* und *FL* sind die Hälften der Sehnen *AC* und *FG*, und *AC* wird gröfser vorausgesetzt als *FG*. Also ist die dritte Seite *MQ* kleiner als die dritte Seite *ML* (§. 48. I.), das heifst: gröfsere Sehnen liegen dem Mittelpunct näher als kleinere, und umgekehrt.

II. *Näher am Mittelpunct liegende Sehnen sind grösser, entferntere kleiner.*

Beweis. Wenn die Sehne AC (Fig. 139.) dem Mittelpunct M näher liegt als die Sehne FG, und MQ auf AC, ML auf FG senkrecht ist, so wird vorausgesetzt $MQ < ML$. Es ist also in den rechtwinkligen Dreiecken AMQ und FML, deren Hypothenusen AM und FM, als Halbmesser, gleich sind, die Cathete MQ in dem ersten kleiner als die Cathete ML in dem andern. Also ist die andere Cathete AQ in dem ersten grösser als die andere Cathete FL in dem zweiten (§. 48. I.). Eben so verhält es sich mit den rechtwinkligen Dreiecken CMQ und GML. Es ist also auch $AQ + QC > FL + LG$, oder $AC > FG$; das heisst: näher dem Mittelpunct liegende Sehnen sind grösser als entferntere, und umgekehrt.

259.

Lehrsätze. I. *Jede grade Linie, die einen Kreis zweimal schneidet, folglich auch jede Sehne, macht mit den Durchmessern durch die Durchschnitts-Puncte gleiche Winkel, die kleiner sind als rechte.*

Beweis. Die grade Linie $UABV$ (Fig. 139.) schneide den Kreis ACG zweimal, in A und B, so schliesst die Sehne AB mit den Halbmessern AM und BM das gleichschenklige Dreieck AMB ein. Also sind die Winkel A und B, welche sie mit den Durchmessern AMD und BMS macht, gleich und kleiner als rechte (§. 46. I.).

II. *Wenn eine grade Linie durch den Durchschnitts-Punct einer Kreislinie und eines ihrer Durchmesser geht und mit dem Durchmesser einen Winkel macht, der kleiner ist als ein rechter, so schneidet sie die Kreislinie nothwendig noch einmal.*

Beweis. Der Winkel VAD (Fig. 139.), welchen die grade Linie $UABV$, die die Kreislinie in A schneidet, mit dem Durchmesser AD an dieser Stelle A macht, sey kleiner als ein rechter, so sind schräge Linien von M nach AV möglich, die kürzer sind als der Halbmesser AM. Denn es sey z. B. der Winkel XMA kleiner als das Complement des Winkels XAM, so ist der Winkel AXM grösser als ein rechter, also um mehr grösser als der Winkel XAM; folglich ist die ihm in dem Dreiecke AXM gegenüberliegende Seite AM grösser als

XM.

XM. Folglich liegt ein Theil der graden Linie AV nothwendig zwischen dem Mittelpuncte des Kreises und der Kreislinie, oder innerhalb des Kreises.

Es giebt aber auch eine schräge Linie MB, welche dem Halbmesser MA gleich ist; denn nimmt man den Winkel AMB gleich dem Supplemente des zweifachen Winkels BAM, so sind in dem Dreieck AMB die Winkel ABM und BAM, und folglich auch die Seiten BM und AM gleich. Alle schräge Linien nach M, zwischen A und B, sind kürzer als AM, und alle schräge Linien aufserhalb AB, wie MT, sind länger. Folglich liegt AV, von A bis B innerhalb, und übrigens aufserhalb des Kreises. Mithin schneidet die grade Linie AV die Kreislinie in B noch einmal, und AB ist eine Sehne.

260.

Lehrsätze. I. *Eine grade Linie, die in dem Puncte wo der Durchmesser eines Kreises die Kreislinie schneidet, auf dem Durchmesser senkrecht steht, hat mit der Kreislinie nur diesen einen Punct gemein und* berührt *sie in demselben, oder ist eine* Tangente *der Kreislinie in dem Durchschnitts-Puncte.*

Beweis. Angenommen es sey anders, und z. B. das Perpendikel in A, auf den Durchmesser AD (Fig. 139.), könne die Kreislinie noch in einem zweiten Puncte N schneiden, so wäre $NM = AM$. Also wäre eine schräge Linie MN möglich, die dem Perpendikel MA gleich wäre. Eine solche schräge Linie giebt es aber nicht (§. 63. IV.), folglich kann auch das Perpendikel in A auf den Durchmesser AM, nicht einen zweiten, und mithin nur einen Punct mit der Kreislinie gemein haben; welches das Erste war.

Nun ist eine Tangente diejenige grade Linie, zwischen welcher und der Kreislinie keine andere grade Linie möglich ist, die die Kreislinie nicht zweimal schnitte (§. 247. X.). Wäre also z. B. das Perpendikel AY nicht eine Tangente, so könnte es zwischen AY und der Kreislinie grade Linien geben, welche nur einen Punct mit der Kreislinie, nicht zwei, gemein hätten. Dergleichen grade Linien könnten aber nur Perpendikel auf den Durchmesser seyn: denn jede andere, nicht auf AD senkrechte Linie schneidet die Kreislinie noth-

wendig zweimal (§. 259. II.). Nun giebt es aber nur ein Perpendikel auf *AD*; also ist zwischen *AY* und der Kreislinie keine grade Linie möglich, die die Kreislinie nicht zweimal schnitte; folglich ist das Perpendikel *AY* die Tangente der Kreislinie in dem Puncte *A*; welches das Zweite war.

II. *Eine grade Linie, welche mit einer Kreislinie nur einen Punct gemein hat, steht auf dem Durchmesser durch diesen Punct senkrecht und ist eine Tangente der Kreislinie, in dem nemlichen Puncte.*

Beweis. Wäre die Linie nicht auf dem Durchmesser senkrecht, sondern machte mit ihm irgend einen andern als einen rechten Winkel, so schnitte sie die Kreislinie nothwendig zweimal (§. 259. II.): gegen die Voraussetzung. Also steht sie auf dem Durchmesser nothwendig senkrecht; welches das Erste war.

Dann aber ist sie auch zu Folge (I.) nothwendig eine Tangente der Kreislinie, in ihrem Durchschnitts-Puncte mit dem Durchmesser; welches das Zweite war.

III. *Die Tangente einer Kreislinie steht auf dem Durchmesser durch den Berührungs-Punct senkrecht und hat mit der Kreislinie nur einen Punct gemein.*

Beweis. Gesetzt die Tangente in *A* stände auf dem Durchmesser *AD* nicht senkrecht, sondern machte mit ihm den Winkel *HAD*, welcher kleiner ist als ein rechter, so ist der Winkel *WAD* größer als ein rechter; folglich liegt das Perpendikel *AZ*, auf *AD*, zwischen *AW* und der Kreislinie *AR*. Das Perpendikel hat aber zu Folge (I.) nur einen Punct mit dem Kreise gemein. Also wäre eine Linie *AZ*, die die Kreislinie nicht zweimal schneidet, zwischen der Tangente *AW* und der Kreislinie *AR* möglich, welches der Eigenschaft der Tangenten zuwider ist. Also ist *AW* keine Tangente und es ist keine Tangente möglich, die mit dem Durchmesser einen andern als einen rechten Winkel macht. Folglich steht die Tangente nothwendig auf dem Durchmesser senkrecht; welches das Erste war.

Dann aber hat sie auch mit der Kreislinie, zu Folge (I.), nur einen Punct gemein; welches das Zweite war.

261.

Lehrsatz. An jedem Punct eines Kreises ist nur eine Tangente möglich. Dagegen, an jedem Puncte einer graden Linie sind unzählige berührende Kreise möglich, deren Mittelpuncte alle in einem Perpendikel auf die berührende grade Linie, durch den Berührungs-Punct, liegen.

Beweis. Die Tangente ist ein Perpendikel auf den Durchmesser, durch den Berührungs-Punct (§. 260. III.) und in einem und demselben Puncte, auf eine und dieselbe grade Linie, ist nur ein Perpendikel möglich (§. 26. I.); also ist an jedem Puncte eines Kreises nur eine Tangente möglich; welches das Erste war.

Dagegen ist eine und dieselbe grade Linie ein Perpendikel auf alle Halbmesser, die die nemlichen Endpuncte in dem Perpendikel haben und in einer und derselben graden Linie liegen. Also sind unzählige Kreise möglich, deren Mittelpuncte in einer und derselben graden Linie liegen und die alle die nemliche grade Linie in demselben Puncte berühren.

262.

Lehrsatz. Eine grade Linie und eine Kreislinie können einander in nicht mehr als zwei Puncten schneiden.

Beweis. Denn alle Puncte einer Kreislinie, also auch die Durchschnitts-Puncte einer Kreislinie und einer graden Linie, sind gleich weit vom Mittelpuncte des Kreises entfernt. Gäbe es nun mehr als zwei solcher Durchschnitts-Puncte, so wären mehr als zwei gleich lange schräge Linien aus des Kreises Mittelpunct nach der graden Linie möglich, welches nicht der Fall ist (§. 63. II.). Folglich sind nicht mehr als zwei Durchschnitts-Puncte möglich.

263.

Lehrsatz. Parallelen schneiden von einer Kreislinie gleiche Bogen ab.

Beweis. Die Parallelen können nur einen, oder nur zwei Puncte mit der Kreislinie gemein haben; denn in mehr als zwei Puncten kann eine grade Linie eine Kreislinie nicht schneiden (§. 262.). Sie können also nur Tangenten oder Secanten seyn.

Wenn nun z. B. *MO* und *NP* (Fig. 140.), zwei parallele Tangenten sind, und AM_1 und M_1B sind Halbmesser, welche durch die Berührungs-Puncte gehen, so sind diese Halbmesser auf den Tangenten senkrecht (§. 260. III.). Also ist AM_1B eine grade Linie, und folglich ein Durchmesser. Der Durchmesser aber halbirt den Kreis-Umfang (§. 250. III.). Folglich sind die Bogen *AKB* und *AIB*, zwischen den Berührungs-Puncten der parallelen Tangenten *MO* und *NP*, gleich.

Wenn ferner *FG* eine mit der Tangente *MO* parallele Secante ist, so ist der Durchmesser AM_1B auf derselben senkrecht, weil er auf *MO* senkrecht ist. Also halbirt er den Bogen *FAG* in *A* (§. 253. VI.). Folglich sind auch die Bogen *FA* und *GA*, zwischen den Puncten, welche eine Tangente und eine beliebige, mit ihr parallele Secante mit dem Kreise gemein haben, gleich.

Wenn endlich *HI* und *KL* andere, mit der Tangente, also auch der vorigen Secante parallele Secanten sind, so sind, auf dieselbe Weise, auch die Bogen *AH*, *AI* und *AHK*, *AIL* gleich. Also sind auch die Bogen *HK* und *IL* u. s. w., folglich auch die Bogen zwischen den Durchschnitts-Puncten zweier beliebigen Secanten und der Kreislinie, gleich.

Die Bogen zwischen den Puncten, welche Parallelen mit einer Kreislinie gemein haben, sind also in allen Fällen gleich.

264.

Lehrsatz. Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise der Summe ihrer Halbmesser gleich ist, so haben ihre Umfänge einen Punct gemein, der mit den Mittelpuncten in grader Linie liegt, aber nur einen Punct und berühren sich in demselben, auswendig.

Wenn die Entfernung der Mittelpuncte zweier Kreise dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich ist, so haben die Umfänge einen Punct gemein, der wiederum mit den Mittelpuncten in grader Linie liegt, aber nur diesen einen Punct und berühren sich in demselben, inwendig.

Beweis. Im ersten Falle sey *MN* (Fig. 141.) die Entfernung der Mittelpuncte der beiden Kreise und auf der graden Linie durch *M* und *N* sey *MA* gleich dem Halbmesser des einen Kreises, so ist *NA* gleich dem Halbmesser des andern, weil nach der Voraussetzung

MN gleich der Summe der Halbmesser der beiden Kreise ist. Also haben die beiden Kreise nothwendig den Punct A, der in der graden Linie MN liegt, gemein; welches das Erste war.

Die Summe der Entfernungen jedes andern Puncts B, B_1...., oder b, b_1.... eines der beiden Kreis-Umfänge von den Mittelpuncten M und N, ist aber größer als die Summe der Halbmesser, oder größer als MN; denn die beiden Seiten MB, MB_1..... und BN, B_1N.... der Dreiecke MBN, MB_1N...., oder die beiden Seiten Mb, Mb_1.... und bN, b_1N.... der Dreiecke MbN, Mb_1N..... sind zusammen länger als die dritte Seite MN. Das heifst, es ist z. B.

$$MB + NB > MN > MA + NA \text{ und}$$
$$Mb + Nb > MN > MA + NA.$$

Nun ist $MB = MB_1 .... = MA$ und $Nb = Nb_1 .... = NA$; also ist NB, NB_1.... $> NA$ und Mb, Mb_1.... $> MA$. Also kann ein Punct B, B_1.... der Kreislinie um M, nicht zugleich in der Kreislinie um N, und ein Punct b, b_1.... der Kreislinie um N nicht zugleich in der Kreislinie um M liegen. Folglich können die Kreis-Umfänge keinen zweiten Punct gemein haben; welches das Zweite war.

In dem einen Puncte A, welchen sie gemein haben, ist das Perpendikel KAL auf MN eine Tangente, sowohl des einen als des andern Kreises (§. 260. I.). Also ist zwischen der graden Linie KAL und den beiden Kreislinien keine andere grade Linie möglich, welche nicht die Kreislinie zweimal schnitte. Folglich ist auch zwischen den beiden Kreislinien selbst keine solche grade Linie möglich. Mithin berühren sich die beiden Kreislinien in A (§. 247. X.), und zwar auswendig, weil jeder Kreis ganz aufserhalb des andern liegt, welches das Dritte war.

Im zweiten Falle sey MP die Entfernung der Mittelpuncte der beiden Kreise, und auf der graden Linie durch M und P sey MD gleich dem Halbmesser des einen Kreises, so ist PD gleich dem Halbmesser des andern, weil nach der Voraussetzung MP gleich dem Unterschiede der Halbmesser der beiden Kreise seyn soll. Also haben die beiden Kreise nothwendig den Punct D gemein; welches das Erste war.

Kein anderer Punct C, C_1.... der Kreislinie um M, kann aber um den Halbmesser DP der Kreislinie um P, von P, und kein anderer Punct c, c_1.... der Kreis-

linie um P, um den Halbmesser DM der Kreislinie um M, von M entfernt seyn. Denn die Dreiecke DMC, DMC_1.... sind über DC, DC_1.... und die Dreiecke DPc, DPc_1.... über Dc, Dc_1.... gleichschenklig: also sind z. B. die Winkel DCM, CDM und DcP, cDP gleich. Aber CP fällt mit CM und cP mit cM nur dann zusammen, wenn C und c in D oder A liegen, und nur in dem ersten Falle allein ist CP und cP gleich DP; denn AP ist um $2MP$ größser als DP. In jeder andern Lage des Puncts C, oder c, fällt CP und cP nicht in CM und cM. Also sind auch in jeder andern Lage von C und c die Dreiecke DPC und DMc, welche mit den gleichschenkligen Dreiecken DMC und DPc die Seiten DC und Dc gemein haben, nicht gleichschenklig. Und folglich kann für keinen andern Punct C, C_1.... c, c_1.... als D allein, CP und cM gleich DP seyn; das heifst, kein Punct, aufser D, in einer der beiden Kreislinien, kann um den Halbmesser der andern von dieser ihrem Mittelpunct entfernt seyn. Folglich können die beiden Kreis-Umfänge keinen zweiten Punct gemein haben; welches das Zweite war.

In dem einen Punct D, welchen sie gemein haben, ist das Perpendikel GDH auf MD eine Tangente, sowohl des einen als des andern Kreises (§. 260. I.). Also ist zwischen der graden Linie GDH und den beiden Kreislinien keine andere grade Linie möglich, welche nicht die Kreislinie zweimal schnitte. Folglich ist auch zwischen den Kreislinien selbst keine solche grade Linie möglich. Mithin berühren sich die beiden Kreislinien in D (§. 247. X.), und zwar inwendig, weil der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt; welches das Dritte war.

265.

Lehrsatz. Wenn zwei Tangenten eines und desselben Kreises sich schneiden, so halbirt die grade Linie durch ihren Durchschnitts-Punct und den Mittelpunct des Kreises den Winkel, welchen die Tangenten einschliefsen. Auch halbirt sie die Sehne zwischen den Berührungs-Puncten und steht auf ihr senkrecht. Desgleichen sind die beiden, sich schneidenden Tangenten gleich lang.

Z. B. wenn ZC und ZD (Fig. 142.) Tangenten des Kreises CFD sind, dessen Mittelpunct N ist, so sind die Winkel CZN und DZN gleich. Ferner ist $CP = PD$, bei P sind rechte Winkel und CZ ist gleich DZ.

Beweis. Die Halbmesser CN und DN durch die Berührungs Puncte sind auf den Tangenten CZ und DZ senkrecht (§. 260. III.) und einander gleich. Also sind in den rechtwinkligen Dreiecken ZNC und ZND die Hypothenusen ZN und die Catheten CN und DN gleich. Folglich sind die Dreiecke, und folglich die Winkel CZN und DZN gleich. Desgleichen ist $CZ=DZ$; welches das Erste und Vierte war.

Ferner sind die Winkel CNZ und DNZ gleich; also sind die Bogen CQ und DQ gleich (§. 260. I.). Folglich halbirt die grade Linie ZQN den Bogen CQD und geht durch den Mittelpunct des Kreises, oder ist ein Durchmesser. Daraus folgt, dafs ZQN auch die Sehne DC halbirt und auf ihr senkrecht steht (§. 253. V.); welches das Zweite und Dritte war.

266.

Lehrsatz. Wenn zwei grade Linien zwei Kreise zugleich berühren, so geht die grade Linie, in welcher die Mittelpuncte der beiden Kreise liegen, durch den Durchschnitts-Punct der Tangenten und halbirt den Winkel welchen die Tangenten einschliefsen.

Z. B. wenn die graden Linien AC, A_1C_1 und BD, B_1D_1 (Fig 142.), die sich in Z, Z_1 schneiden, die beiden Kreise um M und N berühren, so ist MNZ oder MZ_1N eine grade Linie, und die Winkel MZA, MZB und MZ_1A_1, MZ_1B_1 sind gleich.

Beweis. Nach (§. 265.) sind die Winkel CZN, DZN und C_1Z_1N, D_1Z_1N einander, also der Hälfte des Winkels CZD, $C_1Z_1D_1$ und die Winkel AZM, BZM und A_1Z_1M; B_1Z_1M einander, also der Hälfte des nemlichen Winkels AZB oder A_1Z_1B gleich; also sind die Winkel CZN, AZM; C_1Z_1N; A_2Z_1M und DZN, BZM; D_1Z_1N; B_1Z_1M gleich. Folglich ist MNZ, oder MZ_1N eine grade Linie, welche die Winkel AZB, $A_1Z_1B_1$ halbirt.

267.

Lehrsatz. Die Ecken jeder nach denselben centrischen Figur liegen in einer Kreislinie, deren Mittelpunct der Mittelpunct der Ecken der Figur ist, aber nur in einer.

Beweis. Die Ecken einer centrischen Figur sind gleich weit von ihrem Mittelpuncte entfernt; alle Puncte

einer Kreislinie, deren Mittelpunct jener Punct ist, und der durch e i n e der Ecken geht, ebenfalls: also liegen a l l e Ecken der Figur in einer und derselben Kreislinie, aber n u r i n e i n e r, weil die centrische Figur nur einen Mittelpunct hat und die Puncte mehrer Kreislinien von einem und demselben Mittelpuncte n i c h t gleich weit entfernt sind.

268.

Zusätze. I. *Die Ecken j e d e s D r e i e c k s liegen also in einer Kreislinie, und nur in einer, weil j e d e s Dreieck centrisch nach den Ecken ist und nur einen Mittelpunct hat* (§. 66.). *Oder mit andern Worten: durch jede beliebige drei Puncte kann eine Kreislinie gehen, aber n u r e i n e.*

II. *Die Ecken v i e r- und m e h r s e i t i g e r F i g u r e n aber liegen n i c h t n o t h w e n d i g in einer Kreislinie, sondern nur dann, wenn die Figuren c e n t r i s c h n a c h d e n E c k e n sind. Oder mit andern Worten: nicht durch vier und mehr beliebige Puncte in der Ebene kann immer eine Kreislinie gehen, sondern nur dann, wenn die Figuren, in deren Ecken die Puncte liegen, centrisch nach den Ecken sind.*

III. *Die Ecken aller r e g e l m ä ſ s i g e n V i e l e c k e liegen in einem und demselben Kreise. Denn regelmäſsige Vielecke sind centrisch nach den Ecken* (§. 108. I.).

269.

L e h r s a t z. Die Seiten jeder nach ihnen centrischen Figur b e r ü h r e n einen und denselben Kreis, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Seiten der Figur ist, a b e r n u r e i n e n.

B e w e i s. Wenn Figuren den Seiten nach centrisch sind, so sind die Seiten von ihrem Mittelpuncte gleich weit entfernt, das heiſst: P e r p e n d i k e l aus dem Mittelpuncte auf die Seiten sind gleich lang. Die Puncte also, in welchen diese Perpendikel die Seiten schneiden, sind gleich weit vom Mittelpuncte entfernt. A l l e Puncte eines Kreises, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Seiten ist, und der durch den Endpunct e i n e s Perpendikels geht, sind aber ebenfalls vom Mittelpuncte gleich weit entfernt. Also liegen die Endpuncte a l l e r jener Perpendikel in einer und derselben Kreislinie und n u r i n e i n e r, weil die Figur nur einen Mittelpunct der Seiten hat und die Puncte mehrer Kreislinien von ei-

nem und demselben Mittelpuncte nicht gleich weit entfernt sind. Nun stehen ferner die Seiten der Figur auf den Perpendikeln, in den Durchschnitts-Puncten, senkrecht; also berühren die Seiten den Kreis, der durch die Endpuncte der Perpendikel geht (§. 260. I.).

270.

Zusätze. I. *Die Seiten jedes Dreieks berühren also eine und dieselbe Kreislinie, weil jedes Dreieck centrisch nach den Seiten ist* (§. 74.), *und nur eine. Oder auch: beliebige drei, nicht parallele grade Linien können von einer und derselben Kreislinie zugleich berührt werden.*

II. *Die Seiten vier und mehrseitiger Figuren dagegen berühren nicht nothwendig eine und dieselbe Kreislinie, sondern nur dann, wenn die Figuren centrisch nach den Seiten sind; oder mit andern Worten: nicht vier und mehrere beliebige grade Linien in der Ebene können von einem und demselben Kreise berührt werden, sondern nur dann, wenn die Figuren, die sie einschliefsen, centrisch nach den Seiten sind.*

III. *Die Seiten aller regelmäfsigen Vielecke von gleichem Halbmesser berühren einen und denselben Kreis; denn regelmäfsige Vielecke sind centrisch nach den Seiten* (§. 108. I.).

271.

Lehrsatz. Zwei Kreise können einander in nicht mehr als zwei Puncten schneiden.

Beweis. Denn haben zwei Kreise drei Puncte gemein, so schneiden sie sich nicht, sondern fallen ganz in einander, weil durch drei Puncte nur ein Kreis möglich ist (§. 268. I.).

272.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Kreise in zwei Puncten schneiden, so steht die grade Linie durch die Mittelpuncte der Kreise auf der graden Linie durch die Durchschnitts-Puncte, senkrecht und halbirt sie.

Z. B. in (Fig. 143.) sind bei C, C_1 rechte Winkel und AC ist gleich BC, A_1C_1 gleich B_1C_1.

Beweis. Da die Halbmesser AM, BM; A_1M, B_1M und AN, BN; A_1N_1, B_1N_1 gleich sind, so sind alle drei Seiten der Dreiecke MAN, MA_1N_1 den Seiten der

Dreiecke MBN, MB_1N_1 gleich; folglich sind die Dreiecke selbst und folglich auch z. B. die Winkel AMN und BMN, A_1MN_1 und B_1MN_1 gleich. Also sind auch die Dreiecke AMC und BMC, A_1MC_1 und B_1MC_1 gleich, und folglich sind, weil ACB, $A_1C_1B_1$ grade Linien seyn sollen, bei C, C_1 rechte Winkel und AC ist gleich BC, A_1C_1 gleich B_1C_1.

273.

Lehrsatz. *Winkel am Kreis-Umfange* (§. 247. IX.) *sind halb so grofs als die Winkel am Mittelpuncte* (§. 247. VIII.) *über denselben Bogen.*

Z. B. der Winkel ADB (Fig. 144.) ist halb so grofs als AMB über demselben Bogen AGB; AFB ist halb so grofs als der äufsere Winkel AMB.

Beweis. Der Mittelpunct der Ecken des Dreiecks ADB ist M und der Dreiecks-Winkel ADB ist halb so grofs als der Winkel am Mittelpuncte AMB (§. 68.I.); der Winkel AGB ist die Hälfte des äufsern Winkels AMB.

274.

Zusatz. *Alle Umfangs-Winkel über dem Durchmesser* PQ *eines Kreises, z. B.* PEQ, POQ, PDQ, PFQ, PHQ, PGQ *etc.* (Fig 144.) *sind rechte. Denn der zugehörige, doppelt so grofse Winkel am Mittelpuncte*, PMQ, *ist gleich zwei rechten.*

275.

Lehrsätze. I. *Winkel am Umfange über gleichen Bogen sind einander und den Winkeln gleich, welche die Sehnen der Bogen mit den Tangenten an ihren Endpuncten einschliefsen;* z. B. die Winkel ADB, ACB, AEB, KAB und KBA (Fig. 144.) sind gleich.

II. *Die Summen von Winkeln am Umfange auf verschiedenen Seiten einer und derselben Sehne sind gleich zwei rechten* z. B. die Summe der Winkel ADB und AFB ist gleich zwei rechten.

III. *Winkel am Umfange, welche kleiner sind als rechte, und die Winkel zwischen den Tangenten an den Endpuncten der zugehörigen Bogen, liegen auf entgegengesetzten Seiten der Sehne und die Summe des Umfangs-Winkels und der Hälfte des Tangenten-Winkels ist

gleich einem rechten. Z. B. wenn der Umfangs-Winkel *AEB* kleiner ist als ϱ, so liegen *E* und *K* auf verschiedenen Seiten der Sehne *AB*, und $E + \frac{1}{2}K$ ist gleich ϱ.

IV. *Winkel am Umfange, welche gröfser sind als rechte, und die Winkel zwischen den Tangenten an den Endpuncten der zugehörigen Bogen liegen auf der nemlichen Seite der Sehne und der Unterschied des Umfangs-Winkels und der Hälfte des Tangenten-Winkels ist gleich einem rechten.* Z. B. wenn *AGB* gröfser ist als ϱ, so liegen *G* und *K* auf einerlei Seiten der Sehne *AB*, und $G - \frac{1}{2}K$ ist gleich ϱ.

Beweis. I. Die Dreiecke *ADB*, *ACB*, *AEB* etc. mit der gemeinschaftlichen Seite *AB* sind concentrisch nach den Ecken, denn sie haben alle denselben Mittelpunct *M*. Folglich sind die Winkel *D*, *C*, *E* über der gemeinschaftlichen Seite *AB* einander gleich (§. 70. II.). Eben so die Winkel *F*, *H*, *G* in den concentrischen Dreiecken *AFB*, *AHB*, *AGB*, mit der gemeinschaftlichen Seite *AB*.

Rückt der Scheitel-Punct des Winkels am Umfange der Sehne näher und fällt zuletzt in ihren Endpunct, so fällt z. B. die Linie *EA* in *PAK* und *EB* in *AB*. Also ist der Winkel *BAK* gleich dem Winkel *BEA*, und eben so *ABK* = *AEB*. Also sind die Winkel zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpuncten des Bogens dem Umfangs-Winkel über dem nemlichen Bogen gleich.

Dieses letztere folgt auch aus den Dreiecken *AMK* und *MLA*, welche gleichwinklig sind, weil *MAK* nach (§. 260. III.) und *KLA* nach (§. 265.) rechte Winkel sind, und der Winkel bei *K* beiden gemein ist. Deshalb ist der Winkel *LAK*, oder *BAK*, dem Winkel *AMK* gleich. Aber *AMK* ist die Hälfte des Winkels *AMB*, weil die Dreiecke *AMK* und *BMK* gleich sind, also ist *BAK*, oder der gleiche Winkel *ABK*, gleich dem Umfangs-Winkel *AEB*; denn auch dieser ist die Hälfte des Winkels am Mittelpuncte *AMB*, über demselben Bogen.

II. Die Schenkel von Winkeln am Umfange, auf verschiedenen Seiten einer und derselben Sehne, z. B. von den Winkeln *ADB* und *AFB*, schliefsen ein Viereck *ADBF* ein, welches nach den Ecken centrisch ist, und die gegenüber liegenden Winkel *D* und

F eines solchen Vierecks sind zusammen gleich zwei rechten (§. 86. I.).

III. So lange Winkel am Umfange, wie AEB, kleiner als rechte sind, sind es auch die ihnen, zu Folge (I.) gleichen Winkel BAK und ABK, an der entgegengesetzten Seite der Sehne, zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpuncten des Bogens. Also schneiden sich die Tangenten an der entgegengesetzten Seite der Sehne (§. 22. I.).

Nun ist in dem Viereck $MAKB$ der Winkel M gleich $2\varrho - K$, denn A und B sind rechte Winkel; die Umfangs-Winkel, wie E, aber sind die Hälften des zugehörigen Mittelpuncts-Winkels M; also ist $E = \frac{1}{2}(2\varrho - K) = \varrho - \frac{1}{2}K$, folglich $E + \frac{1}{2}K = \varrho$.

IV. Sind Winkel am Umfange, wie AGB, größer als rechte, so sind es auch die ihnen, zu Folge (I.) gleichen Winkel PAB und QBA, an der entgegengesetzten Seite der Sehne, zwischen der Sehne und den Tangenten an den Endpuncten des Bogens. Also sind KAB und KBA kleiner als rechte, und folglich schneiden sich die Tangenten an der nemlichen Seite der Sehne (§. 22. I.).

Nun ist in dem Viereck $MAKB$, wie vorhin, der Winkel M gleich $2\varrho - K$, also der äufsere Winkel AMB gleich $4\varrho - (2\varrho - K) = 2\varrho + K$. Der Umfangs-Winkel, wie G, aber ist die Hälfte dieses äufsern Winkels AMB; also ist $G = \frac{1}{2}(2\varrho + K) = \varrho + \frac{1}{2}K$, und folglich $G - \frac{1}{2}K = \varrho$.

II. Von ähnlichen Figuren im Kreise und dem was davon abhängt.

276.

Lehrsatz. Die Producte der Stücke, welche zwei beliebige Sehnen eines Kreises innerhalb und aufserhalb desselben von einander abschneiden, sind gleich.

Z. B. in (Fig 145.) ist

1. $AP.PD = CP.PB$,
2. $EA.EB = EC.ED$,
3. $FA.FC = FB.FD$.

Beweis. Das Viereck $ABCD$ ist nach den Ecken centrisch; AB, BD, DC und CA sind seine Seiten, und AD, BC seine Diagonalen. Ein solches Viereck hat die im Lehrsatze ausgedrückten Eigenschaften (§. 140 und 141.).

277.

Lehrsatz. *Die Producte der Stücke, welche je zwei Sehnen zwischen drei beliebigen Puncten eines Kreises, und eine Tangente an einem der drei Puncte, von einander abschneiden, sind gleich.*

Z. B. wenn EA (Fig. 146.) eine Tangente an A ist, so ist

$$1.\quad AE^2 = EC.ED,$$
$$2.\quad EA.DA = DE.AC,$$
$$3.\quad AC.EA = DA.EC.$$

Beweis. Der Winkel ADE über der Sehne AC ist dem Winkel CAE zwischen der Sehne und der Tangente gleich (§. 275. I.), und der Winkel E ist den beiden Dreiecken AEC und AED gemein. Also sind diese Dreieke ähnlich. Gleichliegende Seiten sind AE und ED; AC und AD; und EC und EA. Also ist

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{EC}{EA},$$

welches

$$AE^2 = EC.ED,$$
$$EA.DA = DE.AC \text{ und}$$
$$AC.EA = DA.EC$$

giebt; wie behauptet wird.

278.

Lehrsatz. *Wenn zwei Puncte mit dem Mittel-Puncte eines Kreises in grader Linie liegen, und das Product ihrer Entfernungen vom Mittel-Puncte ist dem Quadrate des Halbmessers gleich, so sind die beiden Entfernungen der Puncte von jedem beliebigen Puncte der Kreis-Linie, von einander Gleichvielfache.*

Z. B. wenn in (Fig. 147.)

$$1.\quad BM.CM = AM^2$$

ist, so ist für jeden beliebigen Punct D, D_1, D_2 etc. der Kreislinie um M,

$$2.\quad \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}.$$

Beweis. Da die Halbmesser AM, DM, D_1M etc. alle einander gleich sind, so ist, vermöge der Voraussetzung $BM.CM = AM^2$, auch z. B. $BM.CM = DM^2$, woraus

$$3.\quad \frac{BM}{DM} = \frac{DM}{CM}$$

folgt. In den beiden Dreiecken BMD und CMD sind also die Seiten BM, DM und DM, CM, welche den gemeinschaftlichen Winkel M einschliessen, von einander Gleichvielfache. Also sind diese Dreiecke ähnlich (§. 194. 2.). Folglich sind auch ihre dritten Seiten die nemlichen Vielfachen, das heisst, es ist $\frac{BD}{DM} = \frac{CD}{CM}$, oder $\frac{BD}{CD} = \frac{DM}{CM}$, oder weil $DM = AM$,

$$4.\quad \frac{BD}{CD} = \frac{AM}{CM}.$$

Nun giebt die Gleichung (1.), wenn man auf beiden Seiten $AM.CM$ abzieht, $BM.CM - AM.CM = AM^2 - AM.CM$, oder $(BM - AM)CM = AM(AM - CM)$, oder, weil $BM - AM = BA$

und $AM - CM = CA$ ist, $BA.CM = AM.CA$, oder

$$5.\quad \frac{AM}{CM} = \frac{BA}{CA}.$$

Es ist aber zu Folge (4.) $\frac{AM'}{CM} = \frac{BD}{CD}$; also ist

$$6.\quad \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA};$$

und so für jeden andern Punct D_1, D_2 ....; wie behauptet wird.

279.

Lehrsatz. Wenn sich beliebige Sehnen eines Kreises in einem und demselben Puncte schneiden, wie P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2, S_1S_2 *etc.* (Fig. 148.) *in* A, *so liegen*

I. *die Durchschnitte* P, Q, R, S *etc. der Tangenten* PP_1 und PP_2, QQ_1 *und* QQ_2, RR_1 *und* RR_2 *etc. an der Kreislinie, in den Endpuncten der Sehnen, in einer und derselben graden Linie* PQRS...., *welche* Schnittlinie *heifsen mag.*

Umgekehrt, wenn die Durchschnitts-Puncte beliebiger Tangenten eines Kreises in einer und derselben graden Linie liegen, so schneiden sich die Sehnen, welche die Berührungs-Puncte gleich langer Tangenten verbinden, in einem und demselben Puncte.

II. *Auf der Schnittlinie steht die grade Linie* MAN, *welche durch den Durchschnitts-Punct der Sehnen und den Mittel-Punct des Kreises geht, senkrecht.*

III. *Das Product der Entfernungen* NM *und* AM *der Schnittlinie* PQRS.... *und des Durchschnitts-Puncts der Sehnen, von dem Mittelpuncte des Kreises, ist dem Quadrate des Halbmessers* MA_1 *gleich.*

Beweis. I. α) Unter den Sehnen, die durch A gehen, sey die T_1T_2 auf der graden Linie MAN durch den Mittel-Punct des Kreises M und den Durchschnitts-Punct A, senkrecht, so ist $T_1A = T_2A$ (§. 253. VI), der Durchschnitts-Punct N der Tangenten T_1N und T_2N an den End-Puncten der Sehne TT_1 liegt in der graden Linie durch A und M (§. 265.), die Winkel MT_1N und MT_2N sind rechte (§. 260. III.) und die rechtwinkligen Dreiecke MAT_1 und MT_1N sind, weil sie noch den Winkel bei M gemein haben, ähnlich. Also ist

$$1.\quad \frac{MA}{MT_1} = \frac{MT_1}{MN}.$$

Für jede beliebige andere Sehne, z. B. P_1P_2, liegt ebenfalls der Durchschnitts-Punct P der Tangenten P_1P und P_2P an den Endpuncten der Sehnen, in der graden Linie MB durch den Mittel-Punct des Kreises M und die Mitte der Sehne B (§. 260. III.); bei P_1 und P_2, so wie bei B, sind rechte Winkel (§. 265.), und die rechtwinkligen Dreiecke MBP_1 und MP_1P, weil sie noch den Winkel bei M gemein haben, sind ähnlich. Also ist.

$$2.\quad \frac{MB}{MP_1} = \frac{MP_1}{MP}.$$

Dividirt man (1.) durch (2.), so erhält man

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{MP_1}{MT_1} = \frac{MT_1}{MP_1} \cdot \frac{MP}{MN},$$

oder, weil die Halbmesser MP_1 und MT_1 einander gleich sind,

$$3.\quad \frac{MA}{MB} = \frac{MP}{MN}.$$

Die Seiten MA und MB in dem Dreiecke AMB und die Seiten MP und MN in dem Dreiecke MPN sind also von einander Gleichvielfache. Die Dreiecke AMB und PMN haben aber aufserdem den Winkel M, welchen die gleichvielfachen Seiten einschliefsen, gemein. Also sind diese Dreiecke ähnlich (§. 194. 2.). Nun ist das Dreieck AMB bei B rechtwinklig: also ist auch das Dreieck PMN bei N rechtwinklig; folglich steht die grade Linie PN, welche den Durchschnitts-Punct P der Tangenten für die Sehne P_1P_2, mit dem Durchschnitts-Puncte N der Tangenten für die auf AM senkrechte Sehne T_1T_2 verbindet, in N, auf der graden Linie durch den Mittel-Punct des Kreises M und den Durchschnitts-Punct A der beiden Tangenten senkrecht.

Das Nemliche gilt aber auch für jede andere Sehne Q_1Q_2, RR_2 etc. Also sind PN, QN, RN etc. sämmtlich Perpendikel auf eine und dieselbe grade Linie MA, in einem und demselben Punct dieser Linie, N. Also liegen die Durchschnitts-Puncte P, Q, R, S etc. der Tangenten, für alle Sehnen P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 etc., welche sich in einem und demselben Punct A schneiden, in einer und derselben graden Linie $PQRS$.

β) Wenn umgekehrt die Durchschnitts-Puncte P, Q, R, S etc. beliebiger Tangenten in einer graden Linie liegen, so müfsten, wenn es möglich seyn sollte, dafs die in P, Q, R, S etc. zusammentreffenden Tangenten auch zu Sehnen gehörten, welche sich nicht in einem und demselben Puncte schneiden, durch einen und denselben Punct P mehr als zwei Tangenten gehen können, damit z. B. von P aus der Kreis noch in andern Puncten berührt werde und durch die Berührungs-Puncte noch andere Sehnen gehen können, in welchen der Punct A nicht liegt. Dieses ist aber nicht möglich, sondern es giebt z. B. durch P nur zwei Tangenten an den Kreis, weil über PM mit der gegebenen zweiten, dem Halbmesser gleichen Seite MP_1 nur ein rechtwinkliges Dreieck möglich ist. Es giebt für Tangenten, die durch P gehen, nur die beiden Berührungs-Puncte P_1, P_2 und nur eine Sehne P_1P_2, welche durch A geht. Eben so für jeden andern Punct in der graden Linie $PQRS$. Folglich schneiden sich die Sehnen, welche zu Puncten gehören, die in der graden Linie $PQRS$ liegen, nothwendig in einem und demselben Puncte A; welches, zusammengenommen, das Erste war.

II. Nach (I.) steht MAN auf $PQRS$ senkrecht; welches das Zweite war.

III. Desgleichen folgt aus (I. Gl. 1.)

$$MA.MN = MT_1^2;$$

das heifst: das Product der Entfernungen NM und AM der Schnittlinie und des Durchschnitts-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, ist gleich dem Quadrat des Halbmessers; welches das Dritte war.

280.

Zusätze. I. *Liegt der Durchschnitts-Punct der Sehnen* A (Fig. 148.) *im Umfange des Kreises, z. B. in* A_1, *so dafs die in* A_1 *sich schneidenden Sehnen von der Art wie* A_1P_1, A_1Q_1, A_1R_1 *etc. sind, so ist die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an den End-Puncten der Sehnen, wie* P_6P_1 *und* P_6A_1, Q_6Q_1 *und* Q_6A_1 *etc. schneiden, offenbar die Tangente des Kreises in* A_1.

II. *Liegt der Durchschnitts-Punct der Sehnen, A ausserhalb des Kreises, z. B. in A_2, so dass die in A_2 sich schneidenden Sehnen von der Art, wie P_2P_4, Q_3Q_4 etc. sind, so geht die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an den Endpuncten der Sehnen, wie P_3P_6 und P_4P_5, Q_3Q_5 und Q_4Q_6 etc. schneiden, durch den Kreis. Es ist aber immer*

$$MA_2 . MN_1 = MT_1^2.$$

III. *Liegt der Durchschnitts-Punct der Sehnen vom Mittel-Punct des Kreises unendlich weit entfernt, so dass also die Sehnen mit einander parallel sind, so geht die Schnittlinie der Tangenten durch den Mittel-Punct des Kreises; und umgekehrt.* Denn wenn in $MA . MN = MT_1^2$, MA unendlich gross ist, so ist MN gleich Null und folglich geht, für $MA = \infty$, die Schnittlinie durch den Mittel-Punct M; und wenn $MN = 0$ ist, so ist $MA = \infty$.

281.

Lehrsatz. Wenn ein beliebiges Dreieck in einen Kreis beschrieben ist, so schneiden sich seine Seiten, verlängert, mit den Tangenten der Kreis-Linie in den den drei Seiten gegenüber liegenden Ecken, in einer und derselben graden Linie.

Z. B. die Durchschnitts-Puncte P, Q, R der Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 149.) und der Tangenten AP, BQ, CR an A, B, C liegen in einer graden Linie PQR.

Erster Beweis. Zufolge (§. 277. Gleichung 2.) ist

$$AC . PB = AP . AB,$$
$$BC . AQ = BQ . AB,$$
$$BC . AR = CR . CA,$$

und zu Folge (§. 277. Gleich. 3.)

$$AP . AC = AB . PC,$$
$$BQ . BC = AB . CQ,$$
$$CR . BC = CA . BR,$$

oder

$$AC . BP = AB . AP,$$
$$AB . BQ = BC . AQ,$$
$$BC . AR = AC . CR,$$
$$AC . AP = AB . CP,$$
$$AB . CQ = BC . BQ,$$
$$BC . CR = AC . BR.$$

Multiplicirt man diese sechs Gleichungen mit einander, so erhält man

$$AB^2 . AC^2 . BC^2 . AP . BP . BQ . CQ . AR . CR$$
$$= AB^2 . AC^2 . BC^2 . AP . CP . AQ . BQ . BR . CR,$$

oder

$$AR . BP . CQ = AQ . BR . CP.$$

Diese Gleichung ist nach (§. 212. II.) diejenige Bedingung, unter welcher PQR eine grade Linie ist. Denn es sey BX mit AQ parallel, so sind die Dreiecke AQR, BXR und PBX, PCQ ähnlich. Also ist

$$\frac{AR}{BR} = \frac{AQ}{BX} \text{ und } \frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CQ}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AR . BP}{BR . CP} = \frac{AQ}{CQ}, \text{ oder}$$
$$AR . BP . CQ = AQ . BR . CP.$$

Eben

Eben diese Gleichung wurde vorhin gefunden; also ist PQR eine grade Linie.

Zweiter Beweis. Es sey $AEBFCD$ ein Sechseck im Kreise, in dessen Ecken A, C, B die Ecken des Dreiecks ABC liegen, so schneiden sich nach (§. 215.) die Seiten AE und FC, EB und CD, BF und DA in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch, wenn die Seiten FC, DA, EB Null sind. Wenn aber FC, DA und EB Null sind, so fallen ihre Verlängerungen in die Tangenten CR, AP und BQ, hingegen die Seiten AE, BF und CD fallen in AB, BC und CA. Also ist alsdann der Durchschnitts-Punct von AE und FC der Punct R, von EB und CD der Punct Q, und von BF und DA der Punct P. Folglich liegen auch die Puncte P, Q und R in grader Linie.

282.

Lehrsatz. Wenn die Ecken eines eingeschriebenen Vierecks in den Seiten eines umschriebenen Vierecks liegen, wie die Vierecke ABCD *und* FGHL *(Fig. 150.), so liegen*

I. *die Durchschnitts-Puncte* M, N, P, Q *der gegenüber liegenden Seiten beider Vierecke in einer und derselben graden Linie* MQNP.

II. *Die Durchschnitts-Puncte der Diagonalen und je zweier gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks liegen in den Diagonalen des umschriebenen, nemlich* K *und* N *liegen in der Diagonal* HF, *und* K *und* M *in der Diagonal* LG, *so daſs* FKHN *und* LKGM *grade Linien sind.*

III. *Die Diagonalen der beiden Vierecke schneiden sich in einem und demselben Puncte* K.

IV. *Die Entfernungen derjenigen Durchschnitts-Puncte der Seiten und Diagonalen der beiden Vierecke, welche in grader Linie liegen, sind Gleichvielfache; nemlich*

$$\frac{FK}{HK}=\frac{FN}{HN},\ \frac{LK}{GK}=\frac{LM}{GM} \text{ und } \frac{QM}{PM}=\frac{QN}{PN}.$$

V. *Die grade Linie* XKY *durch den Mittelpunct des Kreises und den Durchschnitts-Punct der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks steht auf der graden Linien* PNQM, *in welcher sich die gegenüber liegenden Seiten der beiden Vierecke schneiden, senkrecht.*

VI. *Das Product der Entfernungen der Schnittlinie und des Durchschnitts-Punctes der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks vom Mittel-Puncte des Kreises* X, *ist gleich dem Quadrate des Halbmessers, nemlich*

$$XK.XY = XA^2.$$

Beweis. I. Erstlich, aus der Figur. Diejenigen Winkel zwischen den Seiten und Diagonalen, welche nach (§. 86. I. u. 90.) gleich groſs sind, sind in der Figur mit gleichen Buchstaben bezeichnet. —

Nun ist $\frac{AD}{DM}$ so viel als $\frac{DD_1}{DM}:\frac{DD_1}{AD}$. Wenn nun DD_1 und CC_1 auf AM senkrecht sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke MDD_1 und MCC_1 ähnlich. Also ist $\frac{DD_1}{DM}=\frac{CC_1}{CM}$. Wenn ferner DD_2 auf BN senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ADD_1 und CDD_2 ähnlich, weil, im eingeschriebenen Viereck, die Winkel $DAB + DCB = 2\varrho$ und die Neben-Winkel $DCD_2 + DCB$ ebenfalls $= 2\varrho$ sind, also, nächst dem rech-

ten Winkel der Winkel DAB oder $DAD_1 = BCD_2$ ist. Also ist $\frac{DD_1}{AD} = \frac{DD_2}{DC}$, folglich vorhin

$$1.\quad \frac{AD}{DM} = \frac{CC_1}{CM} : \frac{DD_2}{DC} = \frac{DC}{CM} \cdot \frac{CC_1}{DD_2}.$$

Es ist $\frac{CM}{CB}$ so viel als $\frac{CC_1}{CB} : \frac{CC_1}{CM}$. Wenn nun CC_2 auf AP senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke ACC_2 und BCC_1 ähnlich, weil die Winkel bei A und B beide gleich $\alpha + \beta$ sind. Also ist $\frac{CC_1}{CB} = \frac{CC_2}{CA}$; folglich oben

$$2.\quad \frac{CM}{CB} = \frac{CC_2}{CA} : \frac{CC_1}{CM} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CC_2}{CC_1}.$$

Es ist $\frac{CA}{CP}$ so viel als $\frac{CC_2}{CP} \cdot \frac{CC_2}{CA}$. Wenn nun RR_1 auf AP senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke PRR_1 und PCC_2 ähnlich. Also ist $\frac{CC_2}{CP} = \frac{RR_1}{LP}$, und folglich vorhin

$$3.\quad \frac{CA}{CP} = \frac{RR_1}{RP} : \frac{CC_2}{CA} = \frac{CA}{RP} \cdot \frac{RR_1}{CC_2}.$$

Es ist $\frac{CR}{RN}$ so viel als $\frac{RR_2}{RN} : \frac{RR_2}{CR}$. Wenn nun RR_2 auf CN senkrecht ist, so sind die rechtwinkligen Dreiecke NRR_2 und NDD_2 ähnlich. Also ist $\frac{RR_2}{RN} = \frac{DD_2}{DN}$, und folglich vorhin

$$4\quad \frac{CR}{RN} = \frac{DD_2}{DN} : \frac{RR_2}{CR} = \frac{CR}{DN} \cdot \frac{DD_2}{RR_2}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1. 2. 3. 4.) mit einander, so erhält man

$$\frac{AD.CM.CA.CR}{DM.CB.CP.RN} = \frac{DC.CC_1.CM.CC_2.CA.RR_1.CR\ DD_2}{CM.DD_2.CA.CC_1.RP.CC_2.DN.RR_2}, \text{ oder}$$

$$\frac{AD\ .CM\ .CA\ .CR}{DM\ .CB\ .CP\ .RN} = \frac{DC\ .CR\ .RR_1}{DN\ .RP\ .RR_2}, \text{ oder}$$

$$5.\quad AD.CM.CA.DN.RP.RR_2 = DM.CB.CP.RN.DC.RR_1.$$

Wenn XX_1 auf AD und XX_2 auf BC senkrecht ist, so halbiren XX_1 und XX_2 die Winkel DXA und CXB, und die Linien AD und BC (§. 253. VI.). Die Winkel DXA und CXB am Mittel-Puncte sind aber doppelt so groſs als die Winkel $DBA = \beta$ und $CAB = \delta$ am Umfange, auf gleichen Bogen (§. 273.). Also sind die Winkel X_1XA und X_2XB gleich β und δ. Eben das sind die Winkel RAR_1 und RCR_2. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke X_1XA, R_1AR und X_2XB, R_2CR ähnlich. Folglich ist

$$\frac{AX_1}{AX} = \frac{RR}{AR} \text{ und } \frac{BX_2}{BX} = \frac{RR_2}{CR};$$

und wenn man diese beiden Gleichungen in einander dividirt,

$$\frac{AX_1}{BX_2} \cdot \frac{BX}{AX} = \frac{RR_1}{RR_2} \cdot \frac{CR}{AR};$$

oder, weil die Halbmesser BX und AX einander gleich, und AX_1, BX_2 gleich $\frac{1}{2} AD$ und $\frac{1}{2} BC$ sind,

$$6.\quad \frac{AD}{BC} = \frac{RR_1}{RR_2} \cdot \frac{CR}{AR}.$$

Nun sind die Dreiecke ACR und CDR ähnlich, weil die Winkel DAC und DCR beide gleich α und die Winkel ACR und CDR beide gleich $\alpha+\beta$ sind. Aehnlichliegende Seiten sind AC, AR und CD, CR. Also ist $\frac{CR}{AR}=\frac{CD}{AC}$, folglich in (6.)

$$\frac{AD}{BC}=\frac{RR_1}{RR_2}\cdot\frac{CD}{AC}, \text{ oder}$$

$$7.\quad AD.AC.RR_2 = BC.CD.RR_1.$$

Dividirt man (5.) durch (7.), so erhält man

$$\frac{AD.CM.CA.DN.RP.RR_2}{AD.CA.RR_2}=\frac{DM.CB.CP.RN.DC.RR_1}{CB.DC.RR_1},$$

oder

$$8.\quad DN.CM.RP = DM.CP.RN.$$

Diese Gleichung ist nach (§. 212.) die Bedingung, unter welcher MNP eine grade Linie ist. Denn es sey CN_1 mit DN parallel, so sind die Dreiecke MDN, MCN_1 und PRN, PCN_1 ähnlich; also ist

$$\frac{DM}{DN}=\frac{CM}{CN_1} \text{ und } \frac{CP}{RP}=\frac{CN_1}{RN}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man $\frac{DM.CP}{DN.RP}=\frac{CM}{RN}$, oder

$$9.\quad DN.CM.RP = DM.CP.RN.$$

Diese nemliche Gleichung fand für die drei Puncte M, N, P statt (8.). Also ist MNP eine grade Linie; das heifst: die Durchschnitts-Puncte N und M der Seiten des eingeschriebenen Vierecks, AD, BC und DC, AB, liegen mit dem Durchschnitts-Puncte P der beiden Seiten HG und LF des umschriebenen Vierecks in einer graden Linie.

Nun gilt aber nothwendig auch von den andern beiden Seiten des umschriebenen Vierecks das Nemliche, weil zwischen den Seiten weiter kein Unterschied ist. Also liegen auch die Puncte M, N, Q in einer graden Linie.

Folglich liegen alle vier Durchschnitts-Puncte M, N, P, Q der gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen und des umschriebenen Vierecks in einer graden Linie; welches das Erste war.

Zweitens aus dem Satze (§. 215.). Es sey $AeDCfB$ ein Sechseck im Kreise, in dessen Ecken A, D, C, B die Ecken des Vierecks $ADCB$ liegen, so schneiden sich, wie in (§. 215.) bewiesen, die Seiten Ae und Cf, eD und fB, DC und BA in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch wenn diese oder jene Seiten Null sind.

Es sey Ae und Cf gleich Null, so fällt die Seite Ae in die Tangente FAL und die Seite Cf in die Tangente GCP, hingegen die Seite eD fällt in ADN und Bf in BCN. Also schneiden sich auch FAL und GCP mit ADN, BCN und DCM, ABM in grader Linie; das heifst: die drei Puncte P, N, M liegen in grader Linie.

Es sey eD und Bf gleich Null, so fällt die Seite De in die Tangente LDQ und die Seite Bf in die Tangente FBQ, hingegen die Seite Ae fällt in ADN und die Seite Cf in BCN. Also schneiden sich auch ADN und BCN mit LDQ, FBQ und DCM und ABM in grader Linie, das heifst: die drei Puncte N, Q, M liegen in grader Linie.

Also liegen alle vier Puncte M, N, P, Q in grader Linie; welches wiederum das Erste war.

II. Der Satz (I.) hängt nicht von der Gestalt der beiden Vierecke ab, sondern gilt für alle Vierecke, wenn nur die Ecken des eingeschriebenen in den Seiten des umschriebenen liegen.

Nun stelle man sich vor, z. B. die Seite AB bleibe die nemliche, die Winkel DAB und CBA aber würden immer kleiner, so rückt der Durchschnitts-Punct N der Seiten AD und BC, und folglich die Linie $MNPQ$ dem Kreise immer näher und der Winkel H wird immer stumpfer. Fällt C mit D zusammen, so liegt der Durchschnitts-Punct N in dem Umfange des Kreises und LHG ist eine grade Linie, nemlich eine Tangente. Also fallen alsdann PG und QL in eine und dieselbe grade Linie: folglich ist in diesem Falle die Linie $MNPQ$ eine Tangente des Kreises an dem Durchschnitts-Puncte von AD und BC.

Nehmen die Winkel DAB und CBA noch weiter ab, so schneiden sich AD und BC innerhalb des Kreises; folglich geht alsdann die Linie $MNPQ$ durch den Kreis und die Linien LH und GH verwechseln ihre Lage.

Fällt endlich AD in AC und BC in BD, so liegt der Durchschnitts-Punct N in K, LH fällt in GH und GH in LH, also P in L und Q in G. Die Linie $MNPQ$ geht also nunmehr durch K und hat die Lage $MKLG$. Also ist auch $MGKL$ eine grade Linie.

Ganz auf dieselbe Weise, wenn man die Seite AD beibehält und die Winkel CDA und BAD so lange abnehmen läfst, bis CD in BD und BA in CA fällt, wird bewiesen, dafs auch $NHKF$ eine grade Linie ist.

Also liegen auch die Durchschnitts-Puncte der Diagonalen und zweier gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Vierecks in den Diagonalen des umschriebenen, nemlich K und N in HF, und K und M in LG; welches das Zweite war.

III. Da auf diese Weise die Diagonalen des umschriebenen Vierecks HF und LG, beide durch den Durchschnitts-Punct K der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks gehen, so schneiden sich die Diagonalen der beiden Vierecke in einem und demselben Puncte; welches das Dritte war.

IV. Nimmt man die Verlängerung der Seiten des umschriebenen Vierecks $FGHL$ bis P und Q, zu denselben hinzu, so ist das Viereck ein vollständiges (§. 216.). Seine drei Diagonalen sind FH, LG und PQ.

Man vergleiche dieses Viereck $FPHQ$ mit dem Viereck $FPHQ$ (Fig. 125.). In beiden Figuren stehen gleiche Buchstaben an gleichen Stellen; also ist vermöge (§. 217.)

$$10.\quad \frac{FK}{HK} = \frac{FN}{HN},$$

$$11.\quad \frac{LK}{GK} = \frac{LM}{GM},$$

$$12.\quad \frac{QM}{PM} = \frac{QN}{PN};$$

welches das Vierte war.

V. Die Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks, AC und BD sind Sehnen des Kreises, ihr Durchschnitts-Punct ist K, und die grade Linie, in welcher sich die Tangenten an ihren End-Puncten schneiden, ist PQ. Auf dieser Linie steht zu Folge (§. 279. II.).

die Linie XKY durch den Mittel-Punct des Kreises und den Durchschnitts-Punct der Sehnen senkrecht; welches das Fünfte war.

VI. Das Product der Entfernungen der Linie PQ und des Durchschnitts-Punctes der Sehnen, K, vom Mittel-Puncte des Kreises, ist nach (§. 279. III) gleich dem Quadrate des Halbmessers, so dass

$$XK . XY = XA^2;$$

welches das Sechste war.

283.

Lehrsatz. *In jedem eingeschriebenen Fünfecke schneiden sich je zwei auf einander folgende Seiten, zwischen welchen eine liegt, und die fünfte Seite mit der Tangente an der gegenüber liegenden Ecke, in einer und derselben graden Linie.*

Z. B. in (Fig. 151.) schneiden sich die auf einander folgenden Seiten BC, DE und CD, BA, desgleichen die fünfte Seite AE des eingeschriebenen Fünfecks $ABCDE$ und die Tangente an der AE gegenüber liegenden Ecke C, in einer und derselben graden Linie MQN. Eben so schneiden sich CD und EA, DE und AB, und BC nebst der Tangente an E, in einer graden Linie; und so weiter.

Beweis. Es sey $ABCfDE$ ein eingeschriebenes Sechseck, in dessen Ecken die Ecken des Fünfecks $ABCDE$ liegen, so schneiden sich, wie in (§. 215.) bewiesen, die gegenüber liegenden Seiten AB und Df; BC und DE, Cf und AE in einer graden Linie. Dieses geschieht immer, welches auch das Sechseck seyn mag. Also auch, wenn eine Seite desselben Null ist. Es sey z. B. die Seite Cf gleich Null, so fällt dieselbe in die Tangente CN an C, hingegen die Seite Df fällt in DCM. Also schneiden sich auch AE und CN, BC und DE und DCM und AB in einer graden Linie MQN; und eben so, wenn eine der andern Seiten Null ist.

284.

Lehrsatz. *Wenn sich beliebige Sehnen eines Kreises in einem und demselben Puncte schneiden, wie* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *etc.* (Fig. 152.), *so liegen*

I. *die Durchschnitts-Puncte der graden Linien, welche die Endpuncte zweier Sehnen mit einander verbinden, z. B. der durch* (BC) *bezeichnete Durchschnitts-Punct der Linien* B_1C_1 *und* B_2C_2, *der Durchschnitts-Punct* (CD) *der Linien* C_1D_1 *und* C_2D_2, *der Durchschnitts-Punct* (CE) *der Linien* C_1E_1 *und* C_2E_2, *der Durchschnitts-Punct* (BD) *der Linien* B_1D_1 *und* B_2D_2 *u. s. w. mit den Durchschnitts-Puncten* B, C, D *etc. der Tangenten an den Endpuncten der Sehnen sämmtlich in einer und derselben graden Linie* BCDE....

II. *Diese Schnittlinie* BCDE.... *steht auf der graden Linie* MKX *durch den Mittel-Punct des Kreises* M *und den Durchschnitts-Punct der Sehnen* K, *senkrecht.*

III. *Das Product ihrer Entfernung* XM *und der Entfernung* KM *des Durchschnitts-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, ist dem Quadrate des Halbmessers gleich.*

Beweis. I. Zu Folge (§. 279. I.) liegen die Durchschnitts-Puncte A, B, C.... der Tangenten an den Endpuncten beliebiger Sehnen eines Kreises, die sich in einem Puncte schneiden, in einer und derselben graden Linie, und zu Folge (§. 282. I.) liegen die Durchschnitts-Puncte der Seiten jedes einge-

schriebenen Vierecks und der durch die Endpuncte seiner Diagonalen gehenden Seiten des umschriebenen Vierecks, also z. B. für das eingeschriebene Viereck $B_1F_1B_2F_2$ und das umschriebene Viereck $B_3B_4F_3F_4$, die Durchschnitte der Linien B_1F_1 und B_2F_2, B_1F_2 und B_2F_1 mit den Durchschnitten B und F in einer graden Linie. Also liegen sämmtliche Puncte $A, B, C, D \ldots$ (AB), (BC), (CD), (AD) etc., weil das Nemliche von allen Vierecken gilt, deren Diagonalen zwei beliebige Sehnen sind, in einer und derselben graden Linie $ABCD\ldots$; welches das Erste war.

II. Nach (§. 279. II.) steht die Schnittlinie $ABCD\ldots$ auf der Linie MKX durch den Mittel-Punct des Kreises M und den Durchschnitts-Punct der Sehnen K, senkrecht; welches das Zweite war.

III. Und nach (§. 279. III.) ist das Product der Entfernung XM der Schnittlinie, und der Entfernung KM des Durchschnitts-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, dem Quadrate MZ^2 des Halbmessers gleich; welches das Dritte war.

285.

Zusatz. Wenn der Durchschnitts-Punct der Sehnen, K (Fig. 152.) *ausserhalb des Kreises liegt, so geht die Schnittlinie* ABCD.... *durch den Kreis. Sie steht immer auf der graden Linie* MK *senkrecht und es ist*

$$XM.KM = ZM^2.$$

286.

Lehrsatz. Wenn ein beliebiges Sechseck einem Kreise umschrieben ist, und ein anderes Sechseck, mit den Ecken in den Puncten wo die Seiten des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie berühren, ist in den Kreis eingeschrieben, so schneiden sich

I. *die Tangenten an den Puncten, in welchen die Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie treffen, und die gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen Sechsecks in den nemlichen Puncten; nemlich die Tangenten* PP_1, PP_2 (Fig. 153.) *und die Seiten* $\beta\alpha$, $\delta\varepsilon$; *die Tangenten* QQ_1, QQ_2 *und die Seiten* $\gamma\delta$, $\alpha\varphi$; *die Tangenten* RR_1, RR_2 *und die Seiten* $\beta\gamma$, $\varphi\varepsilon$ *schneiden sich in den nemlichen Puncten* P, Q, R.

II. *Diese gemeinschaftlichen Durchschnitts-Puncte* P, Q, R *liegen in grader Linie.*

III. *Die drei Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem und demselben Puncte; nemlich die Diagonalen* AD, BE, CF *in einem und demselben Puncte* K.

IV. *Die Schnittlinie* PQR *steht auf der graden Linie* MKX *durch den Mittelpunct des Kreises* M *und den Durchschnitt* K *der Diagonalen des umschriebenen Sechsecks senkrecht.*

V. *Das Product der Entfernungen* MX *und* MK *der Schnittlinie und des Durchschnitts-Punctes der Diagonalen des umschriebenen Sechsecks vom Mittel-Puncte des Kreises, ist gleich dem Quadrate des Halbmessers* MZ.

Beweis. I. Wenn man die Seiten des eingeschriebenen Sechsecks $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ als Sehnen betrachtet, so sind die Puncte P, Q, R die Durchschnitts-Puncte dieser Sehnen. Z. B. P ist der

Durchschnitts-Punct der Sehnen $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$. Die Seiten des umschriebenen Sechsecks aber sind Tangenten an den End-Puncten der Sehnen, z. B. AB, AF sind Tangenten an den End-Puncten der Sehne $\alpha\beta$; ED, CD sind Tangenten an den End-Puncte der Sehne $\delta\varepsilon$ u. s. w. Die Durchschnitte dieser Tangenten, A und D liegen in der Diagonal AD.

Nun durchschneiden sich die Tangenten an den End-Puncten beliebiger Sehnen, die durch einen und denselben Punct P gehen, der Punct P liege innerhalb, oder wie hier, aufserhalb des Kreises, also z. B. auch die Tangenten an den End-Puncten der Sehnen $\alpha\beta$, $\varepsilon\delta$ und jeder andern beliebigen Sehne, wie GL, die durch P geht, in *einer und derselben* graden Linie (§. 279. I. und §. 280. II.), also alle die Tangenten an den End-Puncten der durch P gehenden Sehnen $\alpha\beta$, $\delta\varepsilon$, GL etc. in der graden Linie AD; denn die Tangenten an α und β, δ und ε schneiden sich in dieser Linie.

Gesetzt nun die Sehne GL rückte noch weiter nach A, so fallen zuletzt G und L in einen Punct zusammen, also auch die Tangenten an G und L, und zwar in ihren Durchschnitt. Da nun der Durchschnitt der Tangenten immer in der Linie AD liegt, so liegt er auch noch in derselben, wenn G und L zusammen fallen: folglich *berührt* eine grade Linie PP_1 aus P die Kreislinie in der Linie AD. Eben so PP_2.

Das Nemliche gilt von den Puncten Q und R. Tangenten aus Q *berühren* die Kreislinie in der Diagonal FC, und Tangenten aus R in der Diagonal EB.

Also durchschneiden sich, umgekehrt, die Tangenten an den Puncten, in welchen die Diagonalen durch gegenüber liegende Ecken des umschriebenen Sechsecks die Kreislinie treffen und die gegenüber liegenden Seiten des eingeschriebenen Sechsecks in den nemlichen Puncten; welches das Erste war.

II. Da P, Q, R die Durchschnitts-Puncte gegenüber liegender Seiten des eingeschriebenen Sechsecks sind, so liegen sie in grader Linie (§. 215.); welches das Zweite war.

III. Da P, Q, R in grader Linie liegen, so schneiden sich alle Sehnen, welche so liegen, dafs Tangenten an ihren End-Puncten in der Linie PQR zusammentreffen, in einem und demselben Puncte (§. 279. I.). Und da nun die Diagonalen AD, BE, CF solche Sehnen sind, so schneiden sie sich in einem und demselben Puncte K; welches das Dritte war.

IV. Da die Schnittlinie PQR eine solche ist, in welcher Tangenten an den Endpuncten von Sehnen, welche sich in einem Puncte schneiden, zusammentreffen; so steht sie auf der graden Linie MKX durch den Mittel-Punct des Kreises und den Durchschnitts-Punct der Sehnen senkrecht (§. 279. II.); welches das Vierte war.

V. Desgleichen ist das Product der Entfernungen dieser Schnittlinie und des Durchschnitts-Punctes der Sehnen vom Mittel-Puncte des Kreises, gleich dem Quadrate des Halbmessers (§. 279. III.); welches das Fünfte war.

287.

Zusatz. Ein umschriebenes Fünfeck kann man als ein umschriebenes Sechseck betrachten, von dessen Seiten zwei in grader Linie und beide in einer der Seiten des Fünfecks liegen.

Diese beiden Seiten stofsen dann in dem Berührungs-Puncte der Seiten des Fünfecks zusammen. Z. B. das Fünfeck ABCDE (Fig. 154.) *kann man als ein Sechseck* AαBCDE, *oder* ABβCDE *oder* ABCγDE *u. s. w. betrachten.*

Der Satz (§. 286.) *gilt also auch für das umschriebene Fünfeck, und es folgt z. B., dafs sich je drei grade Linien durch die Ecken und einen Berührungs-Punct des Fünfecks in einem und demselben Pucte schneiden, nemlich*

AC, BD, Eβ in P,
BD, CE, Aγ in Q,
CE, DA, Bδ in R,
DA, EB, Cε in S,
EB, AC, Dα in T.

288.

Lehrsatz. *Wenn von drei beliebigen Kreisen, je zwei, aufserhalb und innerhalb der Figur von graden Linien berührt werden, wie* (Fig. 155.) *so liegen*

I. *die Durchschnitte* P, Q, R *der äufsern Tangenten in grader Linie.*

II. *Die Durchschnitte* p, q, r *der innern Tangenten liegen mit den Mittel-Puncten je zweier berührten Kreise, in graden Linien; nemlich* ApB, BqC *und* CrA *sind grade Linien.*

III. *Grade Linien* pC, qA, rB *durch die Durchschnitte der innern Tangenten* p, q, r *und die Mittel-Puncte* C, A, B *der dritten Kreise schneiden sich in einem und demselben Puncte* M.

IV. *Die Entfernungen der Durchschnitte der äufsern und innern Tangenten von den Mittel-Puncten der berührten Kreise, mit welchen sie in graden Linien liegen, sind Gleich-Vielfache; nemlich*

$$\frac{AP}{BP}=\frac{Ap}{Bp},\ \frac{BQ}{CQ}=\frac{Bq}{Cq}\ \text{und}\ \frac{AR}{CR}=\frac{Ar}{Cr}.$$

V. *Je zwei Durchschnitte der innern Tangenten und ein Durchschnitt der äufsern sind in grader Linie; nemlich* pqR, rqP *und* prQ *sind grade Linien.*

Beweis. Nach (§. 266.) sind die Linien *ABP*, *BCQ* und *ACR* durch die Mittel-Puncte je zweier berührten Kreise und durch die Durchschnitte der äufsern Tangenten, grade. Wenn nun *AD* und *BE* auf *DP* senkrecht sind, also nach (§. 260. III.) durch die Berührungs-Puncte *D* und *E* der Kreise um *A* und *B* mit der Tangente *DP* gehen, so sind die rechtwinkligen Dreiecke *ADP* und *BEP* ähnlich. Also ist, wenn man die Halbmesser der Kreise um *A*, *B* und *C* durch *a*, *b* und *c* bezeichnet,

$$\frac{AP}{BP}=\frac{a}{b},$$

und eben so

$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{b}{c}\ \text{und}\ \frac{CR}{AR}=\frac{c}{a}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{AP.BQ.CR}{BP.CQ.AR}=1,$$

oder

$$AP.BQ.CR=BP.CQ.AR.$$

Dieses ist nach (§. 212.) die Bedingung, unter welcher die drei Puncte P, Q, R in grader Linie liegen. Denn es sey CG mit AP parallel, so sind die Dreiecke BPQ, CGQ und APR, CGR ähnlich. Also ist

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{CQ}{CG} \text{ und } \frac{AP}{AR}=\frac{CG}{CR}.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{BQ.AP}{BP.AR}=\frac{CQ}{CR},$$

oder

$$AP.BQ.CR=BP.CQ.AR;$$

wie oben. Also liegen die drei Durchschnitts-Puncte P, Q, R der äufsern Tangenten in einer graden Linie; welches das Erste war.

II. Nach der Voraussetzung liegen die innern Tangenten je zweier Kreise in graden Linien; also sind z. B. D_1pE_1 und D_2pE_2 grade Linien; folglich sind die Winkel D_1pD_2 und E_1pE_2 gleich. Nach (§. 265.) aber halbiren die graden Linien pA und pB, durch die Durchschnitts-Puncte zweier Tangenten und die Mittel-Puncte der berührten Kreise, die Winkel, welche die Tangenten einschliefsen. Also sind auch die Winkel D_1pA und E_1pB gleich; folglich sind sie Scheitel-Winkel und folglich ist ApB eine grade Linie. Eben so BqC und CrA.

III. Für die inneren Tangenten sind z. B. die rechtwinkligen Dreiecke AD_1p und BE_1p ähnlich. Also ist

$$\frac{Ap}{Bp}=\frac{AD_1}{BE_1}=\frac{a}{b},$$

und eben so

$$\frac{Bq}{Cq}=\frac{b}{c} \text{ und } \frac{Cr}{Ar}=\frac{c}{a}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\frac{Ap.Bq.Cr}{Bp.Cq.Ar}=1,$$

oder

$$Ap.Bq.Cr=Bp.Cq.Ar.$$

Dieses ist nach (§. 213.) die Bedingung, unter welcher sich die Schnittlinien Aq, Br, Cp des Dreiecks ABC in einem und demselben Puncte schneiden; welches die zweite Behauptung beweiset.

IV. Da z. B. $\frac{AP}{BP}=\frac{a}{b}$ (I.) und auch $\frac{Ap}{Bp}=\frac{a}{b}$ war (II.), so ist

$$\frac{AP}{BP}=\frac{Ap}{Bp} \text{ und eben so } \frac{BQ}{CQ}=\frac{Bq}{Cq},\ \frac{AR}{CR}=\frac{Ar}{Cr};$$

welches das Dritte war.

V. Wenn man annimmt prQ sey eine grade Linie, und zwar die dritte Diagonal des vollständigen Vierecks $ABMC$, so mufs, zu Folge (§. 217.), der Punct Q von B und C so weit entfernt seyn, dafs

$$\frac{BQ}{CQ}=\frac{Bq}{Cq}$$

ist. Dieses ist hier wirklich der Fall. Also ist prQ eine grade Linie. Eben so wird bewiesen, dafs pqR und rqP grade Linien sind; welches das Vierte war.

289.

Lehrsatz. Wenn sich zwei Kreise berühren, so sind alle, in graden Linien durch den Berührungs-Punct liegenden Sehnen von einander Gleichvielfache; die Dreiecke, welche je zwei in grader Linie liegende Sehnen, in den beiden Kreisen, mit den Verbindungs-Linien ihrer Endpuncte einschliessen, sind ähnlich, und die Verbindungs-Linien der Endpuncte der Sehnen sind parallel.

Z. B. in (Fig. 156.) ist $\frac{AC}{BC}=\frac{EC}{DC}$, die Dreiecke ABC und EDC sind ähnlich, und AB und DE sind parallel.

Beweis. Wenn M und N die Mittelpuncte der beiden Kreise sind, so ist MCN eine grade Linie (§. 261.). Also sind die Scheitel-Winkel MCA und NCE gleich. Folglich sind die gleichschenkligen Dreiecke AMC und ENC ähnlich. Also ist $\frac{AC}{EC}=\frac{MC}{NC}$. Eben so sind die gleichschenkligen Dreiecke BMC und DNC ähnlich und folglich ist $\frac{BC}{DC}=\frac{MC}{NC}$. Mithin ist $\frac{AC}{EC}=\frac{BC}{DC}$, oder $\frac{AC}{BC}=\frac{EC}{DC}$; welches das Erste war.

Da nun in den Dreiecken ACB und DCE die Scheitel-Winkel ACB und DCE zwischen gleichvielfachen Seiten, gleich sind, so sind die Dreiecke ABC und EDC ähnlich; welches das Zweite war.

Und da die Dreiecke ABC und EDC ähnlich sind, so sind sie gleichwinklig und folglich die Wechselwinkel A und E, B und D gleich; und folglich ist AB mit DE parallel; welches das Dritte war.

290.

Lehrsatz. Wenn ein Kreis pqr (Fig. 157.) *drei andere Kreise* UVW, $\alpha\beta\gamma$ *und* $\delta\varepsilon\varphi$ *zugleich berührt, oder, was das nemliche ist, wenn ein concentrischer, durch den Mittel-Punct* A *des kleinsten Kreises* UVW *gehender Kreis* PQR, *zwei mit* $\alpha\beta\gamma$ *und* $\delta\varepsilon\varphi$ *concentrische Kreise* HGI *und* DEF, *deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises kleiner sind, berührt, und* ADF, AGI *sind grade Linien aus* A, *durch die Berührungs-Puncte* D *und* G *der letztgenannten Kreise, so sind die Tangenten* FL *an* F *und* IM *an* I, *parallel, und wenn* AK *und* AN *Tangenten aus* A *an den Kreisen* HGI *und* DEF *sind, so ist*

$$\frac{AK^2}{AN^2}=\frac{AM}{AF}=\frac{AI}{AL}.$$

Beweis. Die drei Dreiecke AGD, IGH und FED sind ähnlich (§. 286.). Also sind die Winkel DEF, DGA und GHI, GDA gleich. Ferner sind die Winkel am Umfange E und H und die Winkel zwischen den Sehnen DF, GI und den Tangenten FL, IM gleich, nemlich

$$DEF=AFL \text{ und } GHI=AIM \text{ (§. 275. I.)}.$$

Also ist auch

$$AFL=DGA \text{ und } AIM=GDA;$$

Mithin haben die Dreiecke ALF und AIM, außer dem gemeinschaftlichen Winkel A, noch einen zweiten Winkel mit dem Dreieck AGD gemein. Folglich sind sie beide dem Dreiecke AGD und folglich auch einander ähnlich. Mithin sind die Tangenten LF und IM parallel, welches das Erste war.

Wegen der ähnlichen Dreiecke AGD und AIM ist $\frac{AG}{AD}=\frac{AM}{AI}$, oder $AG.AI=AD.AM$.

Nun ist nach (§. 277. Gl. 1.) für die Tangenten AN, AK und die Sehnen ADF und DGI,

$$AN^2=AD.AF \text{ und } AK^2=AG.AI.$$

Also ist

$$\frac{AK^2}{AN^2}=\frac{AG.AI}{AD.AF}.$$

Es war aber vorhin $AG.AI=AD.AM$; also ist

$$\frac{AK^2}{AN^2}=\frac{AD.AM}{AD.AF}=\frac{AM}{AF},$$

und auch, weil die Dreiecke ALF und AIM ähnlich sind,

$$\frac{AK^2}{AN^2}=\frac{AI}{AL};$$

welches das Zweite war *).

III. Von der Gröfse der Kreislinien und Kreisflächen.

291.

Lehrsatz. *Beliebige Bogen in einem und demselben Kreise, oder in gleichen Kreisen, die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte und die Ausschnitte sind Gleich-Vielfache.*

Z. B. wenn in (Fig. 168.) der Bogen ABC das $m$fache des Bogens ADB ist, wo m seyn kann, was man will, eine ganze Zahl, oder ein Bruch, oder irrational, so ist auch der Winkel AMC das $m$fache des Winkels AMB und der Ausschnitt AMC ist das $m$fache des Ausschnitts AMB, und umgekehrt.

Beweis. Es sey zuerst m rational, also etwa ein Bruch, worunter schon der Fall eines ganzzahligen m, wenn nemlich der Nenner in den Zähler aufgeht, mit begriffen ist. AD sey derjenige Theil des Bo-

*) Nach diesem Lehrsatze läfst sich leicht ein Kreis zeichnen, welcher drei gegebene Kreise *berührt*, mit welcher, und ähnlichen Aufgaben, sich die Geometer, seit Apollonius, vielfältig beschäftigt haben. Es giebt eine Menge von Auflösungen solcher Aufgaben, und besonders der Aufgabe von dem Kreise der drei andere berührt, z. B. von Vieta, Descartes, L'Hopital, Lambert, Euler, Cauchy, Hachette, Gergonne etc. Der obige Lehrsatz, nebst Beweis, ist von Cauchy.

gens *AB*, welcher in *AB* und *AC* zugleich aufgeht, z. B. *p*mal in *AB* und *q*mal in *AC* enthalten ist. Alsdann sind alle, zu gleichen Bogen *AD*, *DE* etc. gehörige Winkel und Ausschnitte, wie *AMD*, *DME* etc. einander gleich, und umgekehrt (§. 249.). Also ist auch der Winkel und der Ausschnitt *AMD* in dem Winkel und Ausschnitt *AMB*, *p*mal, und in dem Winkel und Ausschnitt *AMC* *q*mal enthalten, und umgekehrt. Also sind, in dem Falle wenn *m* rational ist, zu einander gehörige Bogen, Winkel und Ausschnitte, Gleichvielfache.

Nun wachsen Bogen, Winkel und Ausschnitte immer zugleich, weil überall zu einem gröfsern Bogen ein gröfserer Winkel und Ausschnitt gehört, und umgekehrt. Nie nimmt eine von diesen drei Gröfsen ab, wenn die andere wächst. Also sind Bogen, Winkel und Ausschnitte *gleichförmig zusammengehörige Gröfsen* (§. 158.). Da nun aber, wie vorhin bewiesen, jene drei Gröfsen Gleichvielfache sind, wenn die Zahl der Vielfachen, *m rational* ist, so sind sie es zu Folge (§. 159.) auch, wenn *m irrational* ist; folglich in *allen* Fällen ohne Ausnahme.

292.

Zusatz. Aus diesem Grunde sind Kreisbogen, mit einem bestimmten Halbmesser, das natürliche Maafs von Winkeln *und man kann Winkel auch durch die Kreislinie* messen, *und umgekehrt.*

293.

Anmerkung. Den bestimmten Halbmesser nimmt man gewöhnlich der Linien-Einheit, also auch der Einheit der Bogenlänge gleich, oder = 1 an. In so fern es nur auf Vergleichung von Winkeln unter sich, nicht von Bogen mit graden Linien ankommt, nimmt man zur Einheit der Winkel auch den rechten Winkel, also zur Einheit der Bogen, den vierten Theil des Umfanges an. Den rechten Winkel bezeichnet man durch ϱ. Die Einheit der Winkel und Bogen theilt man in beliebige gleiche Theile, gewöhnlich in 90, in neuerer Zeit auch in 100 Theile. Ein solcher Theil des Winkels heifst *Grad*. Jeden der 90 Grade theilt man in 60, und jeden der

100 Grade in 100 Theile, welche *Minuten* heifsen, jede Minute in 60 oder 100 *Secunden*, jede Secunde in 60 oder 100 *Tertien* u. s. w. Die Eintheilung des rechten Winkels in 100 Grade, jeden zu 100 Minuten, jede zu 100 Secunden, jede zu 100 Tertien u. s. w. ist wegen der Uebereinstimmung mit dem *Zahlen Systeme* und der daraus entstehenden Erleichterung der Rechnung offenbar besser. Allein sie ist nicht allgemein angenommen. (Man sehe Rechenkunst §. 269.)

Vergleicht man dagegen die Winkel und Bogen nicht sowohl unter sich, sondern mit dem Halbmesser, so bezeichnet man den zu zwei rechten Winkeln gehörigen Bogen, oder den halben Umfang, *für den Halbmesser* 1, durch π, den ganzen Umfang, *für den Halbmesser* 1 also durch 2π und das Bogen-Maafs des rechten Winkels durch $\frac{1}{2}\pi$, wo nun π eine Zahl ist, die mit dem Halbmesser und allen übrigen *Linien* auf einerlei Einheit sich bezieht*).

294.

Lehrsatz. Jedes in einen Kreis eingeschriebene Vieleck (§. 247. XI.) *ist kleiner als der Kreis und jedes umschriebene Vieleck* (§. 247. XII.) *gröfser.*

Beweis. Kein Theil des eingeschriebenen Vielecks liegt aufserhalb des Kreises und kein Theil des Kreises aufserhalb des umschriebenen Vielecks. Dagegen liegen Theile des Kreises aufserhalb des eingeschriebenen Vielecks, und Theile des umschriebenen Vielecks aufserhalb des Kreises. Also ist jedes eingeschriebene Vieleck kleiner und jedes umschriebene Vieleck gröfser als der Kreis.

295.

Lehrsatz. Die Kreis-Fläche ist die Grenze für die Flächen aller um- und eingeschriebenen, regelmäfsigen Vielecke. Die Vielecke nähern sich,

---

*) Der Buchstab π hat auch schon in der Rechenkunst (§. 260. VIII.) eine stehende Bedeutung erhalten. Es wird sich weiter unten zeigen, dafs die gegenwärtige Bedeutung mit der dortigen übereinstimmt.

Beweis. Wenn die Zahl der Seiten eingeschriebener, regelmäſsiger Vielecke, von gleichen Halbmessern der Ecken, immerfort zunimmt, so nehmen beide, ihr Umfang und ihr Inhalt immerfort zu (§. 181. I. und §. 185. I.), und wenn die Zahl der Seiten umschriebener Vielecke, von gleichen Halbmessern der Seiten, immerfort zunimmt, so nehmen beide, Umfang und Inhalt immerfort ab (§. 181. II. und §. 185. II.). Umfang und Inhalt eingeschriebener und umschriebener, regelmäſsiger Vielecke sind also *gleichförmig zusammengehörige* Gröſsen (§. 158.). Nun ist die Kreisfläche die *Grenze* für die Flächen der um- und eingeschriebenen Vielecke (§. 295.) und die Kreislinie ist der zu der Kreisfläche *gehörige* Umfang. Also ist, zu Folge (§. 160.) die Kreislinie auch die *Grenze* der Umfänge aller eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke. Folglich ist der Kreis-Umfang gröſser als die Umfänge aller eingeschriebenen Vielecke, weil dieselben bis zu ihm immerfort wachsen, und kleiner als die Umfänge aller umschriebenen Vielecke, weil dieselben bis zu dem Kreis-Umfange immerfort abnehmen.

297.

Lehrsatz. *Gröſser als die Umfänge aller, einem und demselben Kreise eingeschriebenen und zugleich kleiner als die Umfänge aller dem nemlichen Kreise umschriebenen Vielecke, ist nur der Umfang dieses Kreises selbst, und kein anderer Kreis-Umfang.*

Beweis. Der gegebene Kreis sey *BFA* (Fig. 159.). Der Umfang des Kreises *EKD* z. B., welcher durch die Ecken irgend eines, dem gegebenen Kreise *BFA* umschriebenen Vielecks mit der Seite *DE* geht, ist nicht kleiner als der Umfang dieses Vielecks. Denn das Vieleck ist dem Kreise *EKD* nicht umschrieben, sondern es ist in ihn eingeschrieben und der Umfang eines Kreises ist gröſser, als der Umfang eines ihm eingeschriebenen Vielecks, nicht kleiner (§. 296.). Der Kreis *EKD* hat also die Eigenschaft, daſs sein Umfang kleiner wäre als der Umfang eines dem gegebenen Kreise *BFA* umschriebenen Vielecks, nicht. Nun ist aber der Unterschied *AD* seines Halbmessers *DC* von dem Halbmesser *AC* des gegebenen Kreises *BFA*, kleiner als *DF*; denn in dem Dreiecke *DFC* ist $DC < DF + FC$

$+ FG$, oder weil $FC = AC$ ist, $DC < DF + AC$, woraus $DC - AC < DF$, oder

$$AD < DF$$

folgt. Die Seite DE des umschriebenen Vielecks, und ihre Hälfte DF aber können durch Vervielfältigung der Seiten des Vielecks so weit verkleinert werden, als man will (§. 295.). Also kann man auch AD kleiner machen, als irgend eine Gröfse. Daraus folgt, dafs *kein* Kreis, dessen Halbmesser DC gröfser ist, als AC, die Eigenschaft hat, dafs sein Umfang kleiner wäre als der Umfang jedes dem gegebenen Kreise AFB umschriebenen Vielecks.

Eben so ist der Umfang des Kreises PGQ, welcher z. B. die Seite AB des dem gegebenen Kreise BFA eingeschriebenen Vielecks berührt, nicht gröfser als der Umfang dieses Vielecks; denn das Vieleck ist dem Kreise PGQ nicht eingeschrieben, sondern es ist ihm umschrieben, und der Umfang eines Kreises ist kleiner als der Umfang eines ihm umschriebenen Vielecks; nicht gröfser (§. 296.). Der Kreis PGQ hat also die Eigenschaft, dafs sein Umfang gröfser wäre, als der Umfang eines dem Kreise BFA eingeschriebenen Vielecks, nicht. Nun ist aber der Unterschied FG seines Halbmessers GC von dem Halbmesser FC des gegebenen Kreises BFA wiederum kleiner, als AG, und die Seite AB des eingeschriebenen Vielecks, und ihre Hälfte AG, kann durch Vervielfältigung der Seiten des Vielecks so klein gemacht werden als man will (§. 295.), also auch FG kleiner als irgend eine Gröfse. Folglich hat *kein* Kreis, dessen Halbmesser GC kleiner ist, als der Halbmesser FC des gegebenen Kreises, die Eigenschaft, dafs sein Umfang gröfser wäre, als der Umfang jedes dem gegebenen Kreise AFB eingeschriebenen Vielecks.

Mithin ist *kein anderer* Kreis-Umfang, als AFB selbst, gröfser als der Umfang jedes ihm eingeschriebenen und kleiner als der Umfang jedes ihm umschriebenen Vielecks zugleich.

298.

Lehrsatz. Die Fläche eines Kreises ist gleich der Hälfte des Products seines Halbmessers in seinen Umfang.

Beweis. Die Flächen der einem gegebenen Kreise umschriebenen regelmäfsigen Vielecke sind gleich der Hälfte der Producte des Halbmessers des Kreises

und der Umfänge der Vielecke. Alle diese Flächen sind gröfser als die Kreisfläche (§. 294.). Die Flächen der eingeschriebenen Vielecke von der doppelten Seitenzahl sind gleich der Hälfte der Producte des Halbmessers des nemlichen Kreises und der Umfänge der Vielecke (§. 187.). Alle diese Flächen sind kleiner als die Fläche des gegebenen Kreises (§. 294.). Will man also die Fläche des gegebenen Kreises durch die Hälfte des Products seines Halbmessers in *irgend eine Kreislinie* ausdrücken, so mufs diese Kreislinie nothwendig kürzer als die Umfänge aller dem gegebenen Kreise umschriebenen und länger als die Umfänge aller ihm eingeschriebenen Vielecke seyn. Eine solche Kreislinie ist die gegebene, *und nur sie allein* (§. 297.).

Also ist die Hälfte des Products des Halbmessers eines gegebenen Kreises und seines Umfanges seiner Fläche gleich.

299.

Lehrsatz. Die Umfänge zweier Kreise und ihre Halbmesser sind Gleichvielfache.

Beweis. Die Umfänge aller den beiden Kreisen umschriebenen regelmäfsigen Vielecke, von gleich vielen Seiten, und ihre Halbmesser, sind Gleichvielfache; denn dergleichen regelmäfsige Vielecke sind ähnliche Figuren (§. 200.). Nun ist der Umfang des einen Kreises gröfser als der Umfang aller in ihn eingeschriebenen und kleiner als der Umfang aller um ihn beschriebenen Vielecke (§. 297.); also kann die Linie, welche von ihm eben das Vielfache ist, wie der Halbmesser des zweiten Kreises vom Halbmesser des ersten, oder wie die Umfänge der dem zweiten Kreise umschriebenen Vielecke von den Umfängen der Vielecke um den ersten Kreis, auch nur eine Linie seyn, welche länger ist als die Umfänge aller dem zweiten Kreise eingeschriebenen und kürzer als die Umfänge aller ihm umschriebenen Vielecke. Eine solche Linie ist der zweite Kreis-Umfang, und nur er allein (§. 297.). Also sind die Umfänge der beiden Kreise und ihre Halbmesser Gleichvielfache.

300.

Zusätze. I. *Wenn also der Halbmesser eines beliebigen Kreises* r *und sein Umfang* p *ist, so ist, weil der Umfang eines Kreises vom Halbmesser* 1 *durch* 2π *be-*

zeichnet wurde (§. 293.),

$$\frac{p}{r} = \frac{2\pi}{1}.$$

Also ist

$$p = 2r\pi,$$

das heifst: man findet den Umfang eines beliebigen Kreises vom Halbmesser r, wenn man seinen Halbmesser mit der Zahl 2π multiplicirt.

II. *Ist der Winkel am Mittelpunct eines beliebigen Kreisbogens, in Graden, Minuten etc. ausgedrückt, gleich α und der zugehörige Bogen eines Kreises vom Halbmesser 1 gleich a, so ist, weil der zu 2ϱ gehörige Kreisbogen π ist,*

$$\frac{2\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{a};$$

denn Kreis-Bogen und die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte sind Gleichvielfache (§. 291.). *Also ist*

$$a = \frac{\alpha\pi}{2\varrho}.$$

Ist der Halbmesser des Kreises r und der Bogen für den nemlichen Mittelpuncts-Winkel α gleich A, so ist, eben so,

$$\frac{2\varrho}{\alpha} = \frac{r\pi}{A}, \text{ also}$$

$$A = r.\frac{\alpha\pi}{2\varrho}.$$

Folglich ist

$$\frac{A}{a} = r.\frac{\alpha\pi}{2\varrho} : \frac{\alpha\pi}{2\varrho} = \frac{r}{1}.$$

Also sind auch beliebige Bogen mit ungleichen Halbmessern, für gleiche Winkel am Mittelpuncte, und die zugehörigen Halbmesser, Gleichvielfache, eben wie die ganzen Umfänge.

III. *Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser 1 ist nach* (§. 298.) *gleich* $\frac{1}{2}.1.2\pi$, *gleich* π; *denn der Umfang dieses Kreises ist* 2π.

Die Fläche eines Kreises mit dem Halbmesser r, ist gleich $\frac{1}{2}r.2r\pi$, *gleich* $r^2\pi$; *denn der Umfang dieses Kreises ist, nach* (I.), *gleich* $2r\pi$. *Man findet also die Fläche eines Kreises vom Halbmesser r, wenn man das Quadrat seines Halbmessers mit der Zahl π multiplicirt.*

IV. *Da die Flächen von Kreis-Ausschnitten und ihre Winkel am Mittelpuncte Gleichvielfache*

sind (§. 291.), so ist, wenn man die Fläche des Ausschnitts eines Kreises vom Halbmesser 1, mit dem Winkel α am Mittelpuncte, durch f bezeichnet,

$$\frac{4\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{f}.$$

Denn zu dem Winkel 4ϱ gehört die ganze Kreisfläche, welche nach (III.) gleich π ist. Es ist also

$$f = \pi . \frac{\alpha}{4\varrho}.$$

Ist der Halbmesser des Kreises r, so ist für die Fläche des Ausschnitts mit dem nemlichen Winkel α, welche jetzt φ seyn mag, weil nunmehr die ganze Kreisfläche, nach (III.), $r^2\pi$ ist,

$$\frac{4\varrho}{\alpha} = \frac{r^2\pi}{\varphi},$$

woraus

$$\varphi = r^2\pi . \frac{\alpha}{4\varrho}$$

folgt.

V. Die Fläche eines Kreis-Abschnitts *zu finden, darf man nur von der Fläche des Ausschnitts die Fläche des gradlinien Dreiecks zwischen der Sehne und den beiden, den Ausschnitt einschliefsenden Halbmessern abziehen.*

301.

Anmerkung. I. Mit Hülfe des Satzes (§. 187.) kann man auf folgende Weise die Zahl π finden.

Man gehe nemlich von einem um- und von einem eingeschriebenen Vielecke aus, dessen Inhalt sich leicht finden läfst, z. B. vom regelmäfsigen Viereck, oder dem Quadrate, und verdoppele immerfort die Zahl der Seiten, bis man dem Kreise nahe genug gekommen ist. Man setze den Halbmesser des Kreises, welchem die Vielecke um- und eingeschrieben sind, gleich 1. Die Seite eines, einem solchen Kreise umschriebenen Vierecks ist offenbar 2, also sein Inhalt 4. Die Diagonal des eingeschriebenen Quadrats ist der doppelte Halbmesser, also 2, folglich ihr Quadrat gleich 4 und mithin, nach dem pythagorischen Lehrsatze, das Quadrat der Seiten des eingeschriebenen Quadrats, das heifst: das eingeschriebene Quadrat selbst, die Hälfte davon, also 2.

Nun setze man in (§. 187.) $b = 4$, $a = 2$, so ist, vermöge des dortigen Satzes, die Fläche des eingeschriebenen Vielecks von doppelt so vielen Seiten, also des Achtecks, gleich $\alpha = \surd(a.b) = \surd(2.4) = \surd 8 = 2,8284271$ und die Fläche des umschriebenen Achtecks gleich $\beta = \frac{2ab}{a+\alpha} = \frac{2.2.4}{2+\surd 8} = 3,3137085$.

Man setze von Neuem die Zahlen 2,8284271 und 3,3137085 statt *a* und *b*, so findet man die Flächen des eingeschriebenen und

des umschriebenen Sechszehnecks. Sie sind 3,0614674 und 3,1825979.

So kann man fortfahren und die Flächen der um- und eingeschriebenen Vielecke von jedesmal doppelt so vielen Seiten berechnen.

Die Fläche des *Kreises* liegt immer *zwischen* den Flächen um- und eingeschriebener Vielecke von gleich vielen Seiten. Da aber die um- und eingeschriebenen Vielecke der Kreisfläche um so näher kommen, je mehr Seiten sie haben, so müssen sie nothwendig einander selbst immer näher kommen. Man kann sich also durch dieselben der Kreisfläche so weit nähern als man will. Verlangt man z. B. die Kreisfläche bis auf 7 Decimalstellen-Stellen, so darf man nur die Seiten der um- und eingeschriebenen Vielecke so lange verdoppeln, bis die Zahlen welche ihre Flächen ausdrücken in der 7ten Decimal-Stelle nicht mehr von einander abweichen. Da die Kreisfläche dazwischen liegt, so drückt alsdann die nemliche Zahl auch die Kreisfläche aus, die man also dadurch mit der vorgesetzten Genauigkeit findet. Folgendes ist die Berechnung bis auf die sieben Decimal-Stellen:

Zahl der Seiten.		Eingeschriebenes Vieleck.		Umschriebenes Vieleck.
4	—	2,0000000	—	4,0000000
8	—	2,8284271	—	3,3137085
16	—	3,0614674	—	3,1825979
32	—	3,1214451	—	3,1517249
64	—	3,1365485	—	3,1441184
128	—	3,1403311	—	3,1422236
256	—	3,1412772	—	3,1417504
512	—	3,1415138	—	3,1416321
1024	—	3,1415729	—	3,1416025
2048	—	3,1415877	—	3,1415951
4096	—	3,1415914	—	3,1415933
8192	—	3,1415923	—	3,1415928
16384	—	3,1415925	—	3,1415927
32768	—	3,1415926	—	3,1415926

Da die Flächen der um- und eingeschriebenen, letzten regelmäſsigen Vielecke von 32768 Seiten noch in der siebenten Decimal-Stelle gleich sind, so ist auch die Kreisfläche, welche dazwischen liegt, bis auf die siebente Stelle ihnen gleich und folglich ist der Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser 1 ist, bis auf 7 Decimal-Stellen, gleich

3,1415926.

Die Fläche dieses Kreises ist aber gleich π (§. 300. III.). Also ist, bis auf 7 Decimal-Stellen,

$$\pi = 3,1415926.$$

II. Statt *verschiedene* regelmäſsige Vielecke zu suchen, die *einem und demselben* Kreise um- und eingeschrieben sind, oder die *nemlichen* Halbmesser der Ecken und Seiten haben, und durch Vergröſserung der Zahl der Seiten dem gegebenen Kreise, welchem sie um- und eingeschrieben sind, immer mehr sich zu nähern, kann man auch, und zwar vermittelst des Satzes (§. 204.), regelmäſsige Vielecke suchen, die alle *gleich groſs* sind, aber immer mehrere Seiten haben. Hat ein solches Vieleck noch

wenige Seiten, so sind seine Halbmesser der Ecken und Seiten noch bedeutend verschieden, und folglich weicht der Kreis, in welchem man es einschriebe, von dem Kreise welchem man es umschriebe, bedeutend ab. Der Unterschied der Ecken und Seiten nimmt aber ab, je gröfser die Zahl der Seiten wird, also auch der Unterschied der beiden um- und eingeschriebenen Kreise. Hat man daher die Zahl der Seiten des Vielecks bis auf eine Differenz des Halbmessers der Ecken und Seiten vergröfsert, die man aufser Acht lassen will, so kann man auch die beiden Kreise, welche man ihm ein- und umschreibt, als zusammenfallend, und folglich als eben so grofs wie das Vieleck selbst betrachten. Diese Kreise sind daher alsdann auch so grofs, als das anfängliche Vieleck von welchem man ausging, weil alle die verschiedenen Vielecke *gleich grofs* waren.

Man nehme z. B. ein *Quadrat* an, dessen Seite 2, dessen Inhalt also 4 ist. Der Halbmesser des diesem Quadrat eingeschriebenen Kreises, oder der Halbmesser seiner Seiten würde 1, der Halbmesser des umschriebenen Kreises, oder der Halbmesser der Ecken, nach dem pythagorischen Lehrsatze, gleich $\sqrt{(1^2+1^2)} = \sqrt{2} = 1,4142136$ seyn. Diese beiden Halbmesser sind noch bedeutend, nemlich um 0,4142136 verschieden. Setzt man nun in (§. 204.) $a = 1,4142136$ und $b = 1$, so findet man für die Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich grofsen Vielecks von der doppelten Seitenzahl, also eines gleich grofsen regelmäfsigen *Achtecks*,

$$\alpha = \sqrt{(ab)} = \sqrt{(1 \cdot 1,4142136)} = 1,1892071 \text{ und}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1 \cdot 2,4142136}{2}\right)} = 1,0986841.$$

Diese beiden Halbmesser kommen einander schon näher. Setzt man dieselben von Neuem statt a und b, so findet man für den Halbmesser der Ecken und Seiten eines gleich grofsen Vielecks, wiederum von der doppelten Seitenzahl, also des regelmäfsigen, gleich grofsen *Sechszehnecks*

$$\alpha = \sqrt{(1,1892071 \times 1,0986841)} = 1,1430500 \text{ und}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{1,0986841\,(1,1892071 + 1,0986841)}{2}\right)} = 1,1210863;$$

welche beide Halbmesser einander noch näher kommen.

So kann man fortfahren, bis die Halbmesser einander nahe genug kommen. Folgendes sind die Zahlen, welche man bis zum 8192 Eck findet:

Zahl der Seiten des Vielecks.		Halbmesser des umschriebenen Kreises,		Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.
4	—	1,4142136	—	1,0000000
8	—	1,1892071	—	1,0986841
16	—	1,1430500	—	1,1210863
32	—	1,1320149	—	1,1265639
64	—	1,1292862	—	1,1279257
128	—	1,1286063	—	1,1282657
256	—	1,1284360	—	1,1283508
512	—	1,1283934	—	1,1283721
1024	—	1,1283827	—	1,1283774
2048	—	1,1283801	—	1,1283787
4096	—	1,1283794	—	1,1283791
8192	—	1,1283792	—	1,1283792.

Alle Vielecke, welche diese Halbmesser der Ecken und Seiten haben, sind gleich groſs. Ihr Inhalt ist also unveränderlich gleich 4. Da nun der Halbmesser der Ecken des 8192 Ecks von dem Halbmesser der Seiten, wie man sieht, in der siebenten Decimalstelle nicht mehr abweicht, so sind auch die Halbmesser der ihm um- und eingeschriebenen Kreise, bis auf die siebente Stelle gleich, und folglich kann man für die Flächen dieser Kreise, wenn man nur bis zur siebenten Stelle gehen will, die Fläche des Vielecks selbst nehmen. Folglich ist die Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser, bis auf die siebente Decimalstelle genau ausgedrückt, z. B.

$$r = 1{,}1283792$$

ist, gleich 4.

Daraus läſst sich ebenfalls die Zahl π finden. Da nemlich die Fläche eines Kreises vom Halbmesser r gleich $r^2\pi$ ist (§. 300. III.), so ist hier

$$1{,}1283792^2 \, . \, \pi = 4,$$

woraus

$$\pi = \frac{4}{1{,}1283792^2}$$

folgt, welches, wie in (I.),

$$\pi = 3{,}1415926$$

giebt.

Diese Entwickelungen der Zahl π dienen nur als Beispiel der Berechnung derselben, ohne Reihen. Die Rechnung ist wegen der Wurzel-Ausziehungen weitläuftig, und wenn man bis auf viele Decimalstellen geht, sehr beschwerlich. Durch Reihen ist sie, wie sich weiterhin zeigen wird, viel leichter.

302.

Anmerkung. Die Zahl π ist, wie sich beweisen läſst, irrational; also läſst sich der Umfang und die Fläche eines Kreises, so wie ein in den Umfang aufgehender Bogen und ein in die Fläche aufgehender Ausschnitt durch keine Bruchtheile des Halbmessers und seines Quadrats ausdrücken.

Gleichwohl giebt es von Kreisbogen eingeschlossene Flächen, z. B. Monden (§. 247. VII.), welche gegen das Quadrat des Halbmessers rational sind.

Es sey z. B. *ABC* (Fig. 160.) ein in *B* rechtwinkliges Dreieck, so geht eine Kreislinie, deren Durchmesser *AC* ist, durch *B*. Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$, so ist, vermöge des pythagorischen Lehrsatzes,

$$1. \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Nun ist zu Folge (§. 300. III.) die Fläche eines Kreises vom Durchmesser a, oder Halbmesser $\frac{1}{2}a$, gleich $\frac{1}{4}a^2\pi$, vom Durchmesser b, oder Halbmesser $\frac{1}{2}b$, gleich $\frac{1}{4}b^2\pi$, und vom Durchmesser c, oder Halbmesser $\frac{1}{2}c$, gleich $\frac{1}{4}c^2\pi$. Wenn daher *ADB*, *BEC* und *AFBGC* Halb-

kreise über AB, BC und CA sind, so sind die Flächen derselben

$$2.\quad \tfrac{1}{8}a^2\pi,\ \tfrac{1}{8}b^2\pi \text{ und } \tfrac{1}{8}c^2\pi.$$

Die Summe der Flächen der beiden Halbkreise ADB und BEC ist also

$$3.\quad \tfrac{1}{8}a^2\pi + \tfrac{1}{8}b^2\pi = \tfrac{1}{8}(a^2 + b^2)\pi.$$

Es ist aber in dem rechtwinkligen Dreieck ABC, $a^2 + b^2 = c^2$ (1.). Also ist die Summe der Flächen der beiden Halbkreise ADB und BEC auch gleich

$$3.\quad \tfrac{1}{8}c^2\pi.$$

Dieses war die Fläche des Halbkreises $AFBGC$. Also ist der Halbkreis $AFBGC$ so grofs, als die beiden Halbkreise ADB und BEC zusammen. Nimmt man nun von dem Halbkreise $AFBGC$ die beiden Kreis-Abschnitte AFB und BGC weg, so bleibt das rechtwinklige Dreieck ABC übrig. Nimmt man von den, zusammen eben so grofsen beiden Halbkreisen ADB und BEC die nemlichen Kreis-Abschnitte AFB und BGC weg, so bleiben die beiden Monden $ADBF$ und $BECG$ übrig. *Also sind diese beiden Monden* ADBF *und* BECG *zusammen so grofs, als das gradlinige Dreieck* ABC, *dessen Inhalt* **rational** *ist, wenn es* AB *und* BC *sind.*

Dieser Satz von den beiden Monden über die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist vom Hippocrates von Chios. Es giebt noch andere Sätze von Kreis-Monden, worüber man unter andern Hutton math. and phil. Dictionary, art. Lune or moon nachsehen kann.

303.

Lehrsatz. *Der Kreis ist gröfser als alle gradlinige Figuren von gleichem Umfange.*

Beweis. Nach (§. 152.) ist das regelmäfsige Vieleck gröfser, als alle andere gradlinige Figuren von gleichem Umfange und eben so vielen Seiten. Es kommt also nur darauf an, ob der Kreis gröfser ist als ein regelmäfsiges Vieleck von gleichem Umfange. Alsdann ist er nothwendig um so mehr gröfser als alle andere gradlinige Figuren.

Man setze ACB (Fig. 161. I.) sey eines der gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen irgend ein regelmäfsiges Vieleck von n Seiten zusammengesetzt ist, CD sey auf AB senkrecht, also $AD = DB$. Der Bogen GFH (Fig. 161. II.) aber sey so lang, als die Seite des

Vielecks AB, EK sey auf C_1F senkrecht und der Winkel EC_1K dem Winkel ACB gleich; also wenn C_1F den Winkel C_1 halbirt, GF die Hälfte des Bogens GFH, und folglich der Bogen GF gleich der graden Linie AD, und der Winkel EC_1F dem Winkel ACD gleich.

Der Inhalt des Vielecks ist gleich

$$2n \,.\, \triangle ACD,$$

und der Inhalt des Kreises GFH, von gleichem Umfange, gleich

$$2n \times \text{Ausschnitt } GC_1F;$$

denn weil die Winkel bei C und C_1 gleich sind, so gehen auch $2n$ Ausschnitte, wie GC_1F, auf den Kreis.

Nun ist der Inhalt des Dreiecks ACD,

$$\triangle ACD = \tfrac{1}{2} AD \,.\, DC;$$

der Inhalt des Ausschnitts GC_1F ist

$$\text{Ausschnitt } GC_1F = \tfrac{1}{2} \text{Bogen } GF \times C_1F.$$

Also ist

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\triangle ACD} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF \times C_1F}{\tfrac{1}{2} AD \,.\, DC}.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke ACD und EC_1F sind aber ähnlich, weil die Winkel bei C und C_1 gleich sind. Also ist $\frac{C_1F}{DC} = \frac{EF}{AD}$ und folglich

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\triangle ACD} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF \times EF}{\tfrac{1}{2} AD \,.\, AD}.$$

Aber AD ist nach der Voraussetzung dem Bogen GF gleich. Also ist

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\triangle ACD} = \frac{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF \times EF}{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF \,.\, \text{Bogen } GF} = \frac{\tfrac{1}{2} EF}{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF};$$

oder, wenn man oben und unten mit C_1F multiplicirt,

$$\frac{\text{Ausschnitt } GCF}{\triangle ACD} = \frac{\tfrac{1}{2} EF \,.\, C_1F}{\tfrac{1}{2}\text{Bogen } GF \,.\, C_1F}.$$

Aber $\tfrac{1}{2} EF \,.\, C_1F$ ist die Fläche des Dreiecks EC_1F und $\tfrac{1}{2}$ Bogen $GF \,.\, C_1F$ ist die Fläche des Ausschnitts GC_1F. Also ist

$$\frac{\text{Ausschnitt } GC_1F}{\triangle ACD} = \frac{\triangle EC_1F}{\text{Ausschnitt } GC_1F}.$$

Nun ist das Dreieck EC_1F gröfser als der Ausschnitt GC_1F. Also ist auch nothwendig der Ausschnitt GC_1F gröfser als das Dreieck ACD.

Der $2n$fache Ausschnitt GC_1F war aber der Kreis und das $2n$fache Dreieck ACD das regelmäfsige Vieleck, von eben dem Umfange. Also ist der Kreis gröfser als ein regelmäfsiges Vieleck von gleichem

Umfange. Und da das regelmäfsige Vieleck gröfser ist als jede andere gradlinige Figur von gleich vielen Seiten und gleichem Umfange, so ist der Kreis gröfser als jede gradlinige Figur von gleichem Umfange.

304.

Lehrsatz. *Jeder Kreisbogen ist länger als die zugehörige Sehne und kürzer als eine beliebige Tangente zwischen den Schenkeln des zugehörigen Winkels am Mittelpuncte.*

Z. B. der Kreisbogen *AFB* (Fig. 162.) ist länger als seine Sehne *AB* und kürzer als eine beliebige Tangente *GH* oder *AD* zwischen den Schenkeln des Winkels *ACB*.

Beweis. Es halbire *CK* den Winkel *ACB*, so ist *CK* auf *AB* senkrecht und es ist $BP = AP$. Also ist der Inhalt des Vierecks *AKBC* gleich $\frac{1}{2}KC.AB$.

Es sey *F* der Berührungs-Punct der Tangente *GH* und der Kreislinie, so ist *CF* auf *GH* senkrecht, und folglich ist der Inhalt des Dreiecks *GHC* gleich $\frac{1}{2}FC.GH$.

Der Inhalt des Kreis-Ausschnitts *ACB* ist gleich $\frac{1}{2}AC \times$ Bogen *AFB*.

Nun sind die Halbmesser *KC*, *FC* und *AC* einander gleich. Also ist
der Inhalt des Vierecks *AKBC* gleich $\frac{1}{2}AC \times AB$,
der Inhalt des Dreiecks *GHC* gleich $\frac{1}{2}AC \times GH$,
der Inhalt des Ausschnitts *ACB* gleich $\frac{1}{2}AC \times$ Bogen *AFB*.

Das Viereck *AKBC* ist aber kleiner als der Ausschnitt *ACB*; also ist $\frac{1}{2}AC \times AB < \frac{1}{2}AC \times$ Bogen *AFB*, woraus

$$AB < \text{Bogen } AFB$$

folgt; das heifst: die Sehne *AB* ist kleiner als der zugehörige Bogen *AFB*; welches das Erste war.

Das Dreieck *GHC* ist gröfser als der Ausschnitt *ACB*; also ist $\frac{1}{2}AC \times GH > \frac{1}{2}AC \times$ Bogen *AFB*, woraus

$$GH > \text{Bogen } AFB$$

folgt; das heifst: die Tangente *GH* ist gröfser als der zugehörige Bogen *AFB*, und so für jede andere Tangente, also auch *AD*; welches das Zweite war *).

*) Der Satz dieses Paragraphs ist unter dem Namen des Archimedischen bekannt. Er ist ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes, dafs jede umschliefsende Linie, sie sey grade oder krumm, länger ist, als die umschlossene. Es giebt mehrere Be-

IV. Von der Gleichung des Kreises.

305.

Lehrsatz. *Wenn die rechtwinkligen Coordinaten des Mittel-Puncts eines Kreises* c *und* γ, *die Coordinaten eines beliebigen Puncts der Kreislinie* x *und* y *sind, und der Halbmesser des Kreises ist* r, *so ist die Gleichung* (§. 234.) *der Kreislinie für einen beliebigen Anfangs-Punct der Coordinaten*

$$1.\quad (c-x)^2+(\gamma-y)^2=r^2.$$

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten in dem Umfange des Kreises, so ist die Gleichung

$$2.\quad x^2+y^2=2cx+2\gamma y.$$

Geht zugleich eine der Axen durch den Mittelpunct, so ist die Gleichung

$$3.\quad 2rx-x^2=y^2.$$

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten im Mittel-Punct des Kreises, so ist die Gleichung

$$x^2+y^2=r^2.$$

Beweis. In (Fig. 163.) ist $PB=MF=c-x$ und $QD=CF=\gamma-y$. Also da in dem rechtwinkligen Dreieck CMF, $CM^2=MF^2+CF^2$ ist, so ist

$$1.\quad (c-x)^2+(\gamma-y)^2=r^2.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Punct der Kreislinie; denn wenn auch für einen Punct wie M_1, die Linien $c-x$, und $\gamma-y$ negativ sind, so sind doch ihre Quadrate positiv und die Summe ihrer Quadrate ist immer dem Quadrate des Halbmessers gleich; welches das Erste war.

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten A irgendwo in der Kreislinie, z. B. in M, so ist $c^2+\gamma^2=r^2$. Da nun die Gleichung (1.) $c^2-2cx+x^2+\gamma^2-2\gamma y+y^2=r^2$ giebt, so erhält man, wenn man die Gleichung $c^2+\gamma^2=r^2$ davon abzieht,

$$-2cx+x^2-2\gamma y+y^2=0, \text{ oder}$$

$$2.\quad x^2+y^2=2cx+2\gamma y;$$

welches das Zweite war.

Liegt die eine Axe zugleich im Durchmesser, so ist $c=r$ und $\gamma=0$. Alsdann geht also die Gleichung (1.) in $(r-x)^2+y^2=r^2$, oder $r^2-2rx+x^2+y^2=r^2$, oder in

$$3.\quad 2rx-x^2=y^2$$

über; welches das Dritte war.

Liegt der Anfangs-Punct der Coordinaten im Mittel-Punct des Kreises, so ist $c=0$ und $\gamma=0$. Dadurch geht die Gleichung (1.) in

$$4.\quad x^2+y^2=r^2$$

über; welches das Vierte war.

---

weise dieses allgemeinen Satzes, worüber man unter andern die „Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen des Verfassers, Berlin, bei Maurer 1821—2. §. 219—224." nachsehen kann. Der Beweis des besonderen Falles im vorigen Paragraph ist deshalb einfach, weil die Schwierigkeit des Ueberganges von der graden Linie zu der Kreislinie schon in dem Satze vom Inhalt der Kreisflächen liegt, auf welchen sich der Ausdruck des Inhalts des Ausschnitts, der in dem Beweise vorkommt, bezieht.

306.

Anmerkung. Der Raum gestattet nicht, die Sätze von den Durchschnitten grader Linien mit der Kreislinie, von Kreislinien mit einander und was dahin gehört, ausführlich herzusetzen. Sie lassen sich auf die Weise wie bei den Durchschnitten grader Linien (§. 235. etc.) finden. Wenn z. B. eine grade Linie, deren Gleichung $x + my = a$ ist, eine Kreislinie schneidet, so sind die Coordinaten der Durchschnitts-Puncte beiden Linien *gemein*. Man darf daher nur aus den Gleichungen der beiden Linien $x + my = a$ und $(c - x)^2 + (\gamma - y)^2 = r^2$, x und y suchen, so erhält man die Coordinaten der Durchschnitts-Puncte. Eben so, wenn sich zwei Kreislinien schneiden. Sind umgekehrt die Coordinaten p_1, q_1 und p_2, q_2 der Durchschnitts-Puncte, z. B. einer graden Linie und einer Kreislinie gegeben, so setzt man sie statt x und y, und sucht aus den Gleichungen die daraus folgenden Parameter der Linien. Alles dieses gehört aber besser in die Lehre von den krummen Linien, von welchen die Kreislinie nur ein besonderer Fall ist, und kann daher hier wegbleiben.

Die Goniometrie nebst Trigonometrie und Polygonometrie.

307.

Erklärung. *Da zu jedem Kreisbogen von gegebenem Halbmesser eine bestimmte Sehne, in einem bestimmten Abstande vom Mittelpuncte, desgleichen eine bestimmte, mit der Sehne parallele Tangente zwischen den Durchmessern durch die Endpuncte des Bogens gehört, so hängen umgekehrt von den Sehnen und ihren Abständen, so wie von den Tangenten und den Stücken, welche sie von den Durchmessern abschneiden, auf irgend eine Weise die Kreisbogen ab, zu welchen sie gehören. Und da Kreisbogen die natürlichen Maafse der Winkel am Mittelpuncte sind (§. 292.), so lassen sich durch die Sehnen und Tangenten von Kreisbogen, welche das Maafs von Winkeln sind, also durch grade Linien, Winkel messen und mit einander vergleichen.*

Die Sätze, welche sich hierauf beziehen heifsen zusammen Goniometrie. Ihre Anwendung auf Dreiecke insbesondere heifst Trigonometrie, und auf Vielecke, Polygonometrie.

Die Goniometrie.

Von den goniometrischen Linien.

308.

Erklärung. *Die Halbmesser der Kreisbogen, deren man sich zum Maafse von Winkeln*

bedient, setzt man allemal der Einheit des Längen-Maafses gleich, *also gleich* 1.

309.

Erklärung. I. *Die ganzen Sehnen ganzer Bogen sind weniger bequem zum Maafse der Winkel, als die halben Sehnen für die halben Winkel. Z. B. zum Maafse des Winkels* ACD (Fig. 164.) *nimmt man nicht die Sehne* AD, *sondern die halbe Sehne* AB *zum Maafse des halben Winkels* ACM. *Diese halbe Sehne oder das Perpendikel* AB *aus einem, um* 1 *vom Scheitel entfernten Puncte des einen Winkel-Schenkels* AC *auf den andern Schenkel* BC, *heifst* Sinus des Winkels ACB. *Man bezeichnet es durch sin* ABC, *oder wenn für den Winkel blos ein einzelner Buchstab z. B.* α *gesetzt wird, durch sin* α, *oder auch, in Beziehung auf den Bogen* AM, *der das Maafs des Winkels ist, durch sin* AM, *oder wenn für den Bogen ein einzelner Buchstab z. B.* x *steht, durch sin* x.

II. *Den Abstand der Sehne vom Mittelpunct oder die Apotome* BC, *also die Entfernung des Perpendikels* AB *von* C, *oder was dasselbe ist, den Sinus* AK *des Complements von* ACB *nennt man* Cosinus des Winkels ACB *und bezeichnet ihn durch cos* ACB *oder cos* α, *oder cos* AM, *oder cos* x.

III. *Die Hälfte* EM *der Tangente* EF *des Winkels* ACD, *also das Perpendikel aus einem um* 1 *vom Scheitel entfernten Puncte* M *des einen Schenkels des Winkels auf ihn, bis zum andern Schenkel* CE, *nennt man* Tangente des Winkels ACB *und bezeichnet es durch tang* ACB, *oder tang* α, *oder tang* AM, *oder tang* x.

IV. *Die Tangente* GR *des Complements von* ACB *heifst* Cotangente des Winkels ACB *und wird durch cot* ACB, *oder cot* α, *oder cot* AM, *oder cot* x *bezeichnet.*

V. *Das Stück* CE, *welches die Tangente* ME *eines Winkels* ACB *vom andern Schenkel des Winkels abschneidet, heifst* Secante des Winkels ACB *und wird durch sec* ACB, *oder sec* α, *oder sec* AM, *oder sec* x *bezeichnet.*

VI. *Das Stück* CR *endlich, welches die Cotangente* GR *eines Winkels* ACB *vom andern Schenkel des Winkels abschneidet, heifst* Cosecante des Winkels ACB *und wird durch cosec* ACB, *oder cosec* α, *oder cosec* AM, *oder cosec* x *bezeichnet.*

Also ist

1) *das Perpendikel aus einem um* 1 *vom Scheitel eines Winkels entfernten Puncte des einen Schenkels auf den andern Schenkel der* Sinus *des Winkels.*

2) *das Perpendikel aus dem nemlichen Puncte auf eine auf den andern Schenkel senkrechte Linie ist der* Cosinus *des Winkels;*

3) *das Perpendikel aus einem um* 1 *vom Scheitel entfernten Puncte des einen Schenkels auf den nemlichen Schenkel, bis zum andern Schenkel genommen, ist die* Tangente *des Winkels;*

4) *das Stück, welches die Tangente vom andern Schenkel abschneidet, ist die* Secante *des Winkels;*

5) *das Perpendikel aus einem um* 1 *vom Scheitel entfernten Puncte einer Linie, die auf einen Schenkel eines Winkels senkrecht steht, bis zum andern Schenkel, ist die* Cotangente *des Winkels; und*

6) *das Stück, welches die Cotangente vom andern Schenkel abschneidet, ist die* Cosecante *des Winkels.*

Diese Linien zusammengenommen heifsen auch trigonometrische, oder besser goniometrische Linien.

Man giebt auch noch zuweilen dem Unterschiede *MB* zwischen dem Halbmesser *CM* und dem Cosinus *BC* eines beliebigen Winkels *ACB* einen besondern Namen, und nennt ihn Quersinus des Winkel *ACB*. Allein diese besondere Benennung läfst sich füglich entbehren, und es ist gut sie wegzulassen, da es besser ist, die Menge der Benennungen zu vermindern, als sie zu vergröfsern.

310.

Anmerkung. Die verschiedenen Perpendikel, welche zu goniometrischen Linien oder zu Maafsen der Winkel oder Bogen dienen, behalten immer dieselben Namen, wenn auch die Winkel gröfser als rechte und negativ sind, so grofs und so klein sie und die zugehörigen Bogen seyn mögen. Nur sind sie dann selbst, je nach ihrer Lage, positiv oder negativ.

311.

Anmerkung. Nimmt man, was willkührlich ist, an, dafs während die Winkel und Bogen, z. B. von *M* ab (Fig. 164.) nach *A* zu immerfort wachsen und nach *D* zu immerfort abnehmen, die graden Linien vom Mittelpunct des Kreises aus nach der Linken und nach

Oben wachsen, also nach der Rechten und nach Unten abnehmen sollen, so sind alle goniometrischen Linien, welche in der Richtung des Schenkels eines Winkels, links von dem Durchmesser *GH* und über dem darauf senkrechten Durchmesser *MN* liegen, positiv, und alle, welche rechts vom Durchmesser *GH* und unter dem Durchmesser *MN* liegen, sind negativ.

Im *ersten Quadranten*, wie z. B. beim Winkel *ACM*, sind also alle sechs goniometrischen Linien *AB*, *BC*, *ME*, *GR*, *EC* und *RC* positiv.

Im *zweiten Quadranten*, wie z. B. beim Winkel *MCL*, ist der Sinus *LP*, da er über *MN* liegt, positiv, der Cosinus *LK*, oder *PC*, weil er rechts von *GH* liegt, ist negativ. Die Tangente des Winkels ist *MF*, weil das Perpendikel aus *M* auf den Schenkel *MC*, den andern Schenkel *CL* gar nicht erreicht, sondern nur seine Verlängerung *CD*, in *F*. Die Tangente des Winkels ist also, weil sie unter *MN* liegt, negativ. Die Secante *CF*, da sie nicht im Schenkel *CL*, sondern in seiner Verlängerung *CD* liegt, ist negativ. Die Cotangente *GQ*, da sie rechts von *GH* liegt, ist negativ, die Cosecante *CQ* positiv.

Im *dritten Quadranten*, z. B. beim äufsern Winkel *MCT*, dessen Bogen *MGNT* ist, ist der Sinus *TP*, da er unter *MN* liegt, negativ, der Cosinus *TV* oder *PC* ist, weil er rechts von *GH* liegt, negativ. Die Tangente *ME*, weil sie nur die Verlängerung des Schenkels *CT* über *MN* erreicht, ist positiv; die Secante *CE*, weil sie in der Verlängerung des Schenkels *CT* liegt, ist negativ, die Cotangente *GR*, weil sie links von *GH* liegt, ist positiv, und die Cosecante *CR*, in der Verlängerung von *CT*, ist negativ.

Im *vierten Quadranten*, wie z. B. beim äufsern Winkel *MCD*, dessen Bogen *MGNHD* ist, ist der Sinus *BD*, weil er unter *MN* liegt, negativ; der Cosinus *CB* oder *VD* ist, weil er links von *GH* liegt, positiv. Die Tangente *MF*, weil sie unter *MN* liegt, ist negativ. Die Secante *CF*, weil sie in dem Schenkel *CD* des Winkels selbst liegt, ist positiv. Die Cotangente *GQ*, weil sie rechts von *GH* liegt, ist positiv; die Cosecante *CQ*, weil sie in der Verlängerung des Schenkels *CD* liegt, ist negativ.

Im *fünften Quadranten* verhält es sich wieder wie im ersten; denn z. B. alle goniometrischen Linien des Winkels *ACB*, dessen Bogen *MGNHMA* ist, sind völlig dieselben wie die des Winkels *ACB*, dessen Bogen *MA* ist. Im sechsten Quadranten verhält es sich wie im zweiten, im siebenten wie im dritten; u. s. w. Ueberhaupt sind alle goniometrischen Linien zweier beliebigen Winkel α und $4n\varrho+\alpha$, oder zweier Bogen x und $2n\pi+x$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl seyn kann, völlig dieselben.

Ist ein Winkel negativ, so kommt es nur darauf an, in welchen Quadranten er fällt. Er hat offenbar mit einem positiven Winkel, der zwischen denselben Schenkeln liegt, einerlei goniometrische Linien, denn von den Schenkeln allein hängen diese Linien ab; z. B. der negative Winkel *MCD*, oder der Bogen *MD* hat die nemlichen goniometrischen Linien wie der positive Bogen *MGNHD*; denn beide haben die nemlichen Schenkel *MC* und *DC*. Und so ist es mit jedem andern Winkel. Daraus folgt, daſs der Winkel $-\alpha$, oder der Bogen $-x$, die nemlichen goniometrischen Linien hat, wie der Winkel $4\varrho-\alpha$, oder der Bogen $2\pi-x$, oder überhaupt wie der Winkel $4n\varrho-\alpha$, oder der Bogen $2n\pi-x$. Die goniometrischen Linien ändern sich also auch nicht, wenn zu einem negativen Bogen eine beliebige Zahl von Kreis-Umfängen hinzukommt; wodurch man allemal einen negativen Winkel mit einem positiven vergleichen kann.

Auch ist es einerlei, ob man einen oder mehrere Kreis-Umfänge von einem positiven oder negativen Bogen hinwegnimmt, statt sie hinzuzusetzen; denn auch dann bleiben die Schenkel des Winkels an den nemlichen Stellen.

Zusammengenommen, also haben z. B. die Winkel

1. α *und* $4n\varrho+\alpha$,

oder die Bogen

2. x *und* $2n\pi+x$

völlig dieselben goniometrischen Linien, α *und* x *mögen* positiv *oder* negativ *und* n *mag eine* positive *oder* negative ganze *Zahl seyn.*

312.

Anmerkung. I. Der Sinus und die Tangente des Winkels oder Bogens Null sind 0; denn wenn z. B. der Bogen *MA* bis Null abnimmt, so verschwinden auch

die Perpendikel AB und EM. Also ist $\sin 0 = 0$ und $\tan 0 = 0$. Hingegen der Cosinus und die Secante des Winkels 0 sind gleich $MC = 1$; also ist $\cos 0 = 1$ und $\sec 0 = 1$. Die Cotangente und Cosecante sind unendlich groſs; denn wenn der Schenkel AC in MC fällt, so erreicht ihn das Perpendikel GR gar nicht mehr. Also ist $\cot 0 = \infty$ und $\operatorname{cosec} 0 = \infty$. Nun kann man nach (§. 311.) eine beliebige Zahl von Umfängen hinzufügen oder wegnehmen, ohne daſs sich die goniometrischen Linien ändern. *Also ist allgemein*

$$1. \quad \begin{cases} \sin 2n\pi = 0 \text{ und } \tan 2n\pi = 0, \\ \cos 2n\pi = 1 \text{ und } \sec 2n\pi = 1, \\ \cot 2n\pi = \infty \text{ und } \operatorname{cosec} 2n\pi = \infty. \end{cases}$$

II. Der Sinus und die Cosecante des Bogens $MG = \frac{1}{2}\pi$ sind gleich $GC = 1$. Also ist $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ und $\operatorname{cosec} \frac{1}{2}\pi = 1$. Der Cosinus und die Cotangente dieses Bogens sind 0; also ist $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ und $\cot \frac{1}{2}\pi = 0$, und die Tangente und Secante desselben sind unendlich groſs, oder $\tan \frac{1}{2}\pi = \infty$ und $\sec \frac{1}{2}\pi = \infty$. *Also ist, wenn man noch beliebig* $2n\pi$ *zusetzt, allgemein*

$$2. \quad \begin{cases} \sin (2n + \frac{1}{2})\pi = 1 \text{ und } \operatorname{cosec} (2n + \frac{1}{2})\pi = 1, \\ \cos (2n + \frac{1}{2})\pi = 0 \text{ und } \cot (2n + \frac{1}{2})\pi = 0, \\ \tan (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty \text{ und } \sec (2n + \frac{1}{2})\pi = \infty. \end{cases}$$

III. Der Sinus und die Tangente des Bogens $MGN = \pi$ sind Null. Also ist $\sin \pi = 0$ und $\tan \pi = 0$. Der Cosinus ist gleich CN, also $= -1$, die Secante ist CN, in der Verlängerung von CM, also ebenfalls $= -1$. Folglich ist $\cos \pi = -1$ und $\sec \pi = -1$. Die Cotangente und die Cosecante sind unendlich. Also ist $\cot \pi = \infty$ und $\operatorname{cosec} \pi = \infty$. *Setzt man* $2n\pi$ *zu, so erhält man*

$$3. \quad \begin{cases} \sin (2n + 1)\pi = 0 \text{ und } \tan (2n + 1)\pi = 0, \\ \cos (2n + 1)\pi = -1 \text{ und } \sec (2n + 1)\pi = -1, \\ \cot (2n + 1)\pi = \infty \text{ und } \operatorname{cosec} (2n + 1)\pi = \infty. \end{cases}$$

IV. Der Sinus des Bogens $MGNH = \frac{3}{2}\pi$, oder was das nemliche ist, des Bogens $-MH = -\frac{1}{2}\pi$, ist $CH = -1$. Die Cosecante dieser Bogen ist CG, in der Verlängerung von CH, also ebenfalls negativ und gleich -1. Also ist $\sin -\frac{1}{2}\pi = -1$ und $\operatorname{cosec} -\pi = -1$. Der Cosinus und die Cotangente des Bogens $\frac{3}{2}\pi$ oder $-\frac{1}{2}\pi$ sind Null; also ist $\cos -\frac{1}{2}\pi = 0$ und $\cot -\frac{1}{2}\pi = 0$. Die Tangente und Secante sind unendlich. Also ist $\tan -\frac{1}{2}\pi = \infty$ und $\sec -\frac{1}{2}\pi = \infty$. *Setzt man* $2n\pi$ *zu, so erhält man*

$$4.\ \begin{cases} \sin(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = -1 \text{ und } \operatorname{cosec}(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = -1, \\ \cos(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = 0 \text{ und } \cot(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = 0, \\ \operatorname{tang}(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = \infty \text{ und } \sec(2n - \tfrac{1}{2}\pi) = \infty. \end{cases}$$

V. *Nimmt man die Resultate* (1. 2. 3. 4.) *zusammen und schreibt, weil* $2n$ *jede grade und* $2n+1$ *jede ungrade ganze Zahl bedeuten kann, da wo* $2n$ *und* $2n+1$ *einerlei Resultat geben, blos* n, *wo alsdann* n *jede beliebige, grade oder ungrade ganze Zahl seyn kann, so erhält man*

$$7.\ \begin{cases} \sin n\pi = 0\ (1.\,u.\,3.),\ \sin(2n + \tfrac{1}{2}\pi) = +1\ (2.) \\ \qquad\text{und } \sin(2n - \tfrac{1}{2})\pi = -1\ (4.), \\ \cos 2n\pi = +1\ (1.),\ \cos(2n+1)\pi = -1\ (3.) \\ \qquad\text{und } \cos(2n + \tfrac{1}{2})\pi = 0\ (2.\ 4.), \\ \operatorname{tang} n\pi = 0\ (1.\ 3.),\ \operatorname{tang}(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi = \infty\ (2.\ 4.), \\ \cot n\pi = \infty\ (1.\ 3.),\ \cot(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi = 0\ (2.\ 4.) \\ \sec 2n\pi = +1\ (1.),\ \sec(2n+1)\pi = -1\ (3.) \\ \qquad\text{und } \sec(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi = \infty\ (2.\ 4.), \\ \operatorname{cosec} n\pi = \infty\ (1.\ 3.),\ \operatorname{cosec}(2n + \tfrac{1}{2})\pi = +1\ (2.) \\ \qquad\text{und } \operatorname{cosec}(2n - \tfrac{1}{2})\pi = -1\ (4.). \end{cases}$$

313.

Anmerkung. I. Wenn der Bogen von Null an wächst, so wächst der *Sinus*, wie die Figur zeigt, bis zu dem Bogen $\frac{1}{2}\pi$ ebenfalls; von da nimmt der Sinus ab und wird für den Bogen π, gleich 0. Hierauf geht er ins Negative über und wächst in demselben bis zu dem Bogen $\frac{3}{2}\pi$, nimmt darauf im Negativen ab, wird für 2π wieder Null und darauf wieder positiv. Der Sinus geht also *durch Null* aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

II. Der *Cosinus* nimmt, wenn der Bogen wächst, von $+1$ an ab, und ist 0 für $\frac{1}{2}\pi$. Er wird hierauf negativ und wächst im Negativen bis zu -1 für π, nimmt darauf im Negativen ab, bis 0, für $\frac{3}{2}\pi$, wird hierauf wieder positiv und wächst bis $+1$, für 2π u. s. w. Der Cosinus geht also ebenfalls *durch Null* aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

III. Die *Tangente* wächst, im Positiven, mit dem Bogen, von Null an bis der Bogen $\frac{1}{2}\pi$ ist. Dann ist sie unendlich grofs. Hierauf ist sie sogleich negativ, und wie nun der Bogen weiter bis π wächst, nimmt die Tangente im Negativen ab, bis Null. Von π bis $\frac{3}{2}\pi$ ist sie wieder positiv und wächst bis ins Unendliche, und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π ist sie negativ und nimmt bis Null

ab. Die Tangente geht also *durch Unendlich* aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

IV. Die *Cotangente* ist für den Bogen Null unendlich grofs, nimmt im Positiven bis zu Null, für den Bogen $\frac{1}{2}\pi$, ab und wird dann negativ. Sie wächst im Negativen, bis der Bogen π ist, für welchen sie unendlich grofs ist. Sie wird hierauf positiv, und nimmt im Positiven ab, bis der Bogen $\frac{3}{2}\pi$ ist, für welchen sie Null ist. Hierauf ist sie wieder negativ, und wächst im Negativen, bis sie für den Bogen 2π unendlich grofs ist. Die Cotangente geht also *durch Null* aus dem Positiven in das Negative und *durch Unendlich* aus dem Negativen in das Positive über.

V. Die *Secante* wächst von 1 an, im Positiven bis zum Unendlichen, wenn der Bogen von Null bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt. Hierauf wird sie negativ und nimmt im Negativen ab bis zu -1, wenn der Bogen von $\frac{1}{2}\pi$ bis zu π gelangt. Sie wächst hierauf wieder im Negativen bis zu Unendlich grofs, während der Bogen von π bis $\frac{3}{2}\pi$ wächst. Hierauf wird sie positiv und nimmt im Positiven bis zu $+1$ ab, während der Bogen von $\frac{3}{2}\pi$ bis zu 2π wächst. Die Secante geht also *durch Unendlich* aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

VI. Die *Cosecante* ist unendlich grofs für den Bogen Null und nimmt im Positiven ab bis zu $+1$, während der Bogen bis zu $\frac{1}{2}\pi$ gelangt. Sie wächst hierauf wieder im Positiven, bis zu unendlich-grofs, während der Bogen von $\frac{1}{2}\pi$ bis π wächst. Hierauf wird sie negativ und nimmt im Negativen bis zu -1 ab, indem der Bogen nach $\frac{3}{2}\pi$ gelangt. Sie wächst wiederum im Negativen und wird unendlich grofs für den Bogen 2π. Die Cosecante geht also *durch Unendlich* aus dem Positiven in das Negative über, und umgekehrt.

314.

Lehrsatz. Für jeden beliebigen Winkel oder Bogen x *ist die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus, der Unterschied der Quadrate von Secante und Tangente und der Unterschied der Quadrate von Cosecante und Cotangente gleich* 1; *das heifst, es ist*

$$1.\quad \sin x^2 + \cos x^2 = 1,$$
$$2.\quad \sec x^2 - \tang x^2 = 1,$$
$$3.\quad \operatorname{cosec} x^2 - \cot x^2 = 1;$$

für jedes beliebige x.

Beweis. Sinus, Cosinus und Halbmesser; Tangente, Halbmesser und Secante; und Halbmesser, Cotangente und Cosecante schliefsen rechtwinklige Dreiecke ein, deren Hypothenusen die zuletzt genannten der drei Linien sind. Dergleichen Dreiecke sind z. B. in (Fig. 164.)

für den Bogen *MA* .... *ABC*, *EMC* und *CGR*,
für den Bogen *MAGL* .... *LPC*, *FMC* und *CGQ*,
für den Bogen *MAGNT* .... *TPC*, *EMC* und *CGR*,
für den Bogen *MAGNHD* .... *DBC*, *FMC* und *CGQ*;

woraus die Sätze vermöge des pythagorischen Lehrsatzes folgen.

Diese Sätze gelten also von jedem beliebigen *positiven* Bogen x; denn in den folgenden Quadranten verhält es sich wieder, wie in den vier ersten.

Ist x *negativ*, so darf man nur so oftmal 2π hinzuthun, bis man einen positiven Bogen erhält, der dann nothwendig in einem der vier Quadranten liegen mufs. Da nun Bogen, die um $2n\pi$ verschieden sind, völlig dieselben goniometrischen Linien haben (§. 311.), so gelten die Sätze auch für *negative* x, und folglich für *jedes beliebige* x.

Gleichungen zwischen goniometrischen Linien.

315.

Lehrsatz. Es ist für jeden beliebigen Bogen

$$1.\quad \sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\sec x \cot x} = \cos x \tang x$$
$$= \frac{\tang x}{\sec x} = \frac{\cos x}{\cot x},$$

$$2.\quad \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\tang x \operatorname{cosec} x} = \sin x \cot x$$
$$= \frac{\sin x}{\tang x} = \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x},$$

$$3.\quad \tang x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\cos x \operatorname{cosec} x} = \sin x \sec x$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x},$$

4. $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cot x} = \tan x \operatorname{cosec} x$
$= \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x},$

5. $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \sec x} = \cos x \operatorname{cosec} x$
$= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x},$

6. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \tan x} = \cot x \sec x$
$= \frac{\sec x}{\tan x} = \frac{\cot x}{\cos x}.$

Beweis. Die in dem Beweise von (§. 314.) aufgezählten rechtwinkligen Dreiecke sind zu dreien, wie sie zusammengehören, ähnlich, weil je zwei aufser dem rechten Winkel, noch einen Winkel, entweder gemein, oder zu gleichen Scheitelwinkeln, oder zu gleichen Wechsel- oder Seiten-Winkeln haben.

Von den drei rechtwinkligen Dreiecken *ABC*, *EMC* und *CGR* nemlich, haben die beiden ersten den Winkel *C* gemein und im dritten ist der Wechselwinkel bei *R*, wegen der Parallelen, dem Winkel *C* gleich.

Von den Dreiecken *LPC*, *FMC* und *CGQ* haben die beiden ersten bei *C* gleiche Scheitelwinkel und in dem dritten ist der Wechselwinkel bei *Q*, wegen der Parallelen, dem Winkel bei *C* gleich.

Von den Dreiecken *TPC*, *EMC* und *CGR* haben die beiden ersten bei *C* gleiche Scheitelwinkel und in dem dritten ist der Wechselwinkel bei *R*, wegen der Parallelen, dem Winkel bei *C* im zweiten und also auch im ersten Dreiecke gleich.

Von den Dreiecken *DBC*, *FMC* und *CGQ* haben die beiden ersten den Winkel bei *C* gemein und in dem dritten ist der Seitenwinkel bei *Q*, wegen der Parallelen, den Winkeln bei *C* in den ersten beiden Dreiecken gleich.

Es ist also

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EM}{MC} = \frac{GC}{GR}, \quad \frac{LP}{PC} = \frac{MF}{MC} = \frac{GC}{GQ},$$

$$\frac{PT}{CP} = \frac{EM}{MC} = \frac{GC}{GR}, \quad \frac{DB}{BC} = \frac{MF}{MC} = \frac{GC}{GQ},$$

das heifst, es ist für jedes beliebige x:

$$7.\quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tang x}{1} = \frac{1}{\cot x}.$$

Ferner ist

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EM}{EC} = \frac{GC}{RC}, \quad \frac{LP}{LC} = \frac{MF}{FC} = \frac{GC}{RC},$$

$$\frac{PT}{TC} = \frac{EM}{EC} = \frac{GC}{RC}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{MF}{FC} = \frac{GC}{QC};$$

also ist auch für jedes beliebige x:

$$8.\quad \frac{\sin x}{1} = \frac{\tang x}{\sec x} = \frac{1}{\cosec x}.$$

Dividirt man die Gleichungen (8.) durch die Gleichungen (7.), so ist noch für jedes x:

$$9.\quad \cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{\cot x}{\cosec x}.$$

Aus diesen Gleichungen (7. 8. 9.) kann man die Gleichungen des Lehrsatzes unmittelbar hernehmen. Z. B. aus (8.) folgt $\sin x = \frac{1}{\cosec x}$. Aus (9.) folgt $\frac{1}{\cosec x} = \frac{1}{\sec x \cot x}$; also $\sin x = \frac{1}{\sec x \cot x}$. Aus (7.) folgt $\sin x = \cos x \tang x$. Aus (8.) folgt $\sin x = \frac{\tang x}{\sec x} = \frac{1}{\cosec x}$ und aus (9.) $\frac{1}{\cosec x} = \frac{\cos x}{\cot x}$; also $\sin x = \frac{\cos x}{\cot x}$; welches zusammen die Ausdrücke (1.) des Lehrsatzes für $\sin x$ sind; und so die übrigen.

Die Gleichungen des Lehrsatzes gelten also für jeden beliebigen *positiven* Bogen x, weil es sich in den folgenden Quadranten wieder wie in den vier ersten verhält.

Ist x *negativ*, so darf man nur wieder, wie in (§. 314.), so oft mal 2π hinzuthun, bis man einen positiven Bogen erhält, der dann in einem der vier ersten Quadranten liegen mufs. Da nun Bogen, die um $2n\pi$ verschieden sind, völlig dieselben goniometrischen Linien haben (§. 311.), so gelten die Sätze auf diese Weise auch für *negative* x, und folglich *für jedes beliebige* x.

316.

Lehrsatz. Es ist für beliebige Bogen x, y und z,

1. $\sin(y \pm x) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y = \dfrac{\tan y \pm \tan x}{\sec x \sec y}$,
2. $\cos(y \pm x) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}$,
3. $\tan(y \pm x) = \dfrac{\tan y \pm \tan x}{1 \mp \tan x \tan y} = \dfrac{\cot x \pm \cot y}{\cot x \cot y \mp 1}$,
4. $\sec(y \pm x) = \dfrac{\sec x \sec y}{1 \mp \tan x \tan y} = \dfrac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \cot y \mp 1}$,
5. $\cot(y \pm x) = \dfrac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y} = \dfrac{1 \mp \tan x \tan y}{\tan y \pm \tan x}$,
6. $\operatorname{cosec}(y \pm x) = \dfrac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \pm \cot y} = \dfrac{\sec x \sec y}{\tan y \pm \tan x}$;
7. $\sin -z = -\sin z$,
8. $\cos -z = +\cos z$,
9. $\tan -z = -\tan z$,
10. $\cot -z = -\cot z$,
11. $\sec -z = +\sec z$,
12. $\operatorname{cosec} -z = -\operatorname{cosec} z$.

Die oberen Zeichen gehören zusammen und die unteren gehören zusammen.

Beweis. I. (Fig. 165.) Es sind 10 Fälle möglich,

	der Bogen x kann liegen:	der Bogen y kann liegen:
1)	im 1sten Quadr., wie MA_1	im 1sten Quadr. wie MAB_1
2)	— — — — —	im 2ten Quadr. wie MGB_2
3)	— — — — —	im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$
4)	— — — — —	im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$
5)	im 2ten Quadr., wie MGA_2	im 2ten Quadr. wie MGB_2
6)	— — — — —	im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$
7)	— — — — —	im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$
8)	im 3ten Quadr., wie $MGNA_3$	im 3ten Quadr. wie $MGNB_3$
9)	— — — — —	im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$
10)	im 4ten Quadr., wie $MGNHA_4$	im 4ten Quadr. wie $MGNHB_4$.

Die Summe der Quadrate der Sehnen der Unterschiede der Bogen y und x, nemlich der Sehnen,

$$\begin{array}{llll} A_1B_1, & A_1B_2, & A_1B_3, & A_1B_4 \\ & A_2B_2, & A_2B_3, & A_2B_4 \\ & & A_3B_3, & A_3B_4 \\ & & & A_4B_4 \end{array}$$

läſst sich in diesen verschiedenen Fällen, wie leicht zu sehen, wie folgt ausdrücken:

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2;$$

denn z. B. für die Sehne A_1B_1 ist, wenn A_1P_1, B_1Q_1

auf MC perpendiculair sind und $A_1 R_1$ mit MC parallel ist,

$$A_1 B_1^2 = A_1 R_1^2 + B_1 R_1^2, \text{ oder}$$

$$A_1 B_1^2 = (CP_1 - CQ_1)^2 + (B_1 Q_1 - AP_1)^2, \text{ oder}$$

$$A_1 B_1^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin y - \sin x)^2,$$

welches so viel ist als

$$A_1 B_1^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

Eben so verhält es sich mit den Sehnen in allen andern Lagen; wie in der Figur, wo P, Q, R, so wie A, B, immer an ähnlichen Stellen stehen und mit A, B, gleiche Zeiger haben, leicht zu sehen ist. Liegen die beiden Endpuncte der Sehne etwa nicht auf einerlei Seite der Durchmesser MN und GH, und müssen also die Perpendikel AP, BQ und ihre Abstände CP und PQ, oder die Sinus und Cosinus der beiden Winkel y und x nicht subtrahirt, sondern addirt werden, so sind dafür die Sinus und Cosinus negativ, so daſs also die Addition der beiden Linien immer wieder durch das Zeichen — ausgedrückt wird. So z. B. ist für die Sehne $A_1 B_3$,

$$A_1 B_3^2 = (CP_1 + CQ_3)^2 + (A_1 P_1 + B_3 Q_3)^2,$$

welches aber, weil CQ_3 und $B_3 Q_3$ negativ sind, wieder so viel ist als

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

II. Da nun die Sehne jedes Bogens der doppelte Sinus der Hälfte des Bogens ist (§. 309.), so ist in allen obigen Fällen

$$(2 \sin \tfrac{1}{2}(y - x))^2, \text{ oder}$$

13. $$4 \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2 = (\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2.$$

Daraus folgt

$$4 \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2 = \cos y^2 - 2 \cos y \cos x + \cos x^2$$
$$+ \sin y^2 - 2 \sin y \sin x + \sin x^2,$$

oder, weil $\cos y^2 + \sin y^2 = 1$ und $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$, ist (§. 314. 1.)

$$4 \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2 = 2 - 2 \cos y \cos x - 2 \sin y \sin x, \text{ oder}$$

$$\cos y \cos x + \sin y \sin x = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2,$$

oder weil $1 = \cos \tfrac{1}{2}(y - x)^2 + \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2$,

14. $$\cos y \cos x + \sin y \sin x = \cos \tfrac{1}{2}(y - x)^2 - \sin \tfrac{1}{2}(y - x)^2.$$

Diese Gleichung gilt nun für jedes beliebige positive x und y, in so fern x kleiner als y ist. Sie gilt also auch für $x = 0$, welches

$$\cos y \cos 0 + \sin y \sin 0 = \cos \tfrac{1}{2} y^2 - \sin \tfrac{1}{2} y^2,$$

oder, weil $\cos 0 = +1$, $\sin 0 = 0$ ist (§. 312. I. 1.),

15. $$\cos y = \cos \tfrac{1}{2} y^2 - \sin \tfrac{1}{2} y^2$$

giebt. Da diese Gleichung für jedes beliebige y gilt, so gilt sie auch, wenn man $y-x$ statt y schreibt, in so fern y gröfser ist als x. Also ist auch

16. $\cos(y-x) = \cos\frac{1}{2}(y-x)^2 - \sin\frac{1}{2}(y-x)^2$.

Es war aber in (14.) $\cos\frac{1}{2}(y-x)^2 - \sin\frac{1}{2}(y-x)^2 = \cos y \cos x + \sin y \sin x$; also ist

17. $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$;

für jedes beliebige positive y und x, in so fern $y > x$ ist.

Ist der Bogen y kleiner als x, so darf man nur soviel mal 2π hinzuthun bis y gröfser ist als x. Die Linien $\cos y$ und $\sin y$ bleiben deshalb die nemlichen. Ist y oder x, oder sind beide negativ, so thue man ebenfalls so viel mal 2π hinzu, bis y und x positiv sind und y gröfser ist als x, wodurch in allen Fällen $y-x$ unter die obigen Bedingungen gebracht werden kann.

Die Gleichung (17.) gilt also ohne Einschränkung, y und x mögen seyn was man will, positiv oder negativ und so grofs oder so klein als man will. Sie ist eine der beiden Gleichungen (2.) im Lehrsatze.

Aus dieser einen, aus der Figur erwiesenen Gleichung folgen nun alle übrigen Gleichungen des Lehrsatzes unmittelbar.

III. Man setze nemlich in (17.) y statt x und x statt y, so erhält man $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Daraus folgt, weil sich der Ausdruck rechterhand gar nicht verändert hat, $\cos(x-y) = \cos(y-x)$. Also, wenn man z statt $y-x$ schreibt,

18. $\cos -z = \cos z$ (wie im Lehrsatz (8.)).

IV. Man setze in (17.) $y-x$ statt x, so erhält man $\cos(y-(y-x))$, oder $\cos x = \cos y \cos(y-x) + \sin y \sin(y-x)$, oder weil $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$ war, $\cos x = \cos y^2 \cos x + \cos y \sin y \sin x + \sin y \sin(y-x)$, oder $\cos x(1-\cos y^2) - \cos y \sin y \sin x = \sin y \sin(y-x)$, oder, weil $1-\cos y^2 = \sin y^2$ ist (§. 314. I.), $\cos x \sin y^2 - \cos y \sin y \sin x = \sin y \sin(y-x)$, oder wenn man mit $\sin y$ dividirt,

19. $\sin(y-x) = \cos x \sin y - \cos y \sin x$ (wie im Lehrsatz 1.).

V. Man setze in (19.) y statt x und x statt y, so erhält man $\sin(x-y) = \cos y \sin x - \cos x \sin y$, welches, mit (19.) verglichen, so viel ist als $-\sin(y-x)$. Also

ist $\sin(x-y) = -\sin(y-x)$, oder $\sin(-(y-x)) = -\sin(y-x)$, oder, wenn man z statt $y-x$ schreibt,

20. $\sin -z = -\sin z$ (wie im Lehrsatz 7.).

VI. Man setze in (17. und 19.) $-x$ statt $+x$, so erhält man

$$\cos(y+x) = \cos y \cos -x + \sin y \sin -x \text{ und}$$
$$\sin(y+x) = \cos -x \sin y - \cos y \sin -x,$$

oder, weil $\cos -x = \cos x$ (18.) und $\sin -x = -\sin x$ (20.)

21. $\left\{\begin{array}{l}\cos(y+x) = \cos y \cos x - \sin y \sin x \\ \sin(y+x) = \cos x \sin y + \cos y \sin x\end{array}\right\}$ (wie im Lehrsatz 1. und 2.)

VII. Schreibt man den Ausdruck von $\sin(y \pm x)$ (1.) wie folgt:

$$\sin(y \pm x) = \cos x \cos y \left(\frac{\sin y}{\cos y} \pm \frac{\sin x}{\cos x}\right),$$

so erhält man, wenn man statt $\frac{\sin y}{\cos y}$ und $\frac{\sin x}{\cos x}$ nach (§. 315.) $\tang y$ und $\tang x$, und statt $\cos x$ und $\cos y$, $\frac{1}{\sec x}$ und $\frac{1}{\sec y}$ setzt,

22. $\sin(y \pm x) = \frac{\tang y \pm \tang x}{\sec x \sec y}$ (wie im Lehrsatz 1.).

VIII. Schreibt man den Ausdruck von $\cos(y \pm x)$ (2.) wie folgt:

$$\cos(y \pm x) = \sin x \sin y \left(\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \mp 1\right),$$

und setzt nach (§. 315.) statt $\frac{\cos x}{\sin x}$ und $\frac{\cos y}{\sin y}$, $\cot x$ und $\cot y$, und statt $\sin x$ und $\sin y$, $\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ und $\frac{1}{\operatorname{cosec} y}$, so erhält man

23. $\cos(y \pm x) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}$ (wie im Lehrsatze 2.).

IX. Ferner ist zu Folge (§. 315.) $\frac{\sin(y \pm x)}{\cos(y \pm x)} = \tang(y \pm x)$. Also ist, wenn man hierin die Ausdrüke von $\sin(y \pm x)$ und $\cos(y \pm x)$ (1. und 2.) setzt,

24. $\tang(y \pm x) = \frac{\cos x \sin y \pm \sin x \cos y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y}$.

Dieses giebt, wenn man oben und unten mit $\cos x \cos y$ dividirt,

$$tang(y \pm x) = \frac{\frac{\sin y}{\cos y} \pm \frac{\sin x}{\cos x}}{1 \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}},$$

oder, weil $\frac{\sin x}{\cos x} = tang\,x$, $\frac{\sin y}{\cos y} = tang\,y$ ist,

25. $tang(y \pm x) = \frac{tang\,y \pm tang\,x}{1 \mp tang\,y\,tang\,x}$ (wie im Lehrsatz 3.).

X. Dividirt man in (24.) oben und unten mit $\sin x \sin y$, so erhält man

$$tang(y \pm x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \pm \frac{\cos y}{\sin y}}{\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \mp 1},$$

oder, weil $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, $\frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$ (§. 315.),

26. $tang(y \pm x) = \frac{\cot x \pm \cot y}{\cot x \cot y \mp 1}$ (wie im Lehrsatz 3.).

XI. Ferner ist $\sec(y \pm x) = \frac{1}{\cos(y \pm x)}$ (§. 315.), welches vermöge (23.)

27. $\sec(y \pm x) = \frac{cosec\,x\,cosec\,y}{\cot x \cot y \mp 1}$ (wie im Lehrsatz 4.)

giebt.

XII. Schreibt man dagegen den Ausdruck von $\cos(y \pm x)$ (2.) wie folgt:

$$\cos(y \pm x) = \cos x \cos y \left(1 \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}\right),$$

so erhält man, weil $\cos x = \frac{1}{\sec x}$, $\cos y = \frac{1}{\sec y}$, $\frac{\sin x}{\cos x} = tang\,x$ und $\frac{\sin y}{\cos y} = tang\,y$ ist,

$$\cos(y \pm x) = \frac{1 \mp tang\,x\,tang\,y}{\sec x \sec y};\text{ also}$$

28. $\sec(y \pm x) = \frac{\sec x \sec y}{1 \mp tang\,x\,tang\,y}$ (wie im Lehrsatz 4.).

XIII. Aus $\cot(y \pm x) = \frac{1}{tang(y \pm x)}$ (§. 315.) folgen die Gleichungen (5.) im Lehrsatz vermöge (3.).

XIV. Da $cosec(y \pm x) = \frac{1}{\sin(y + x)}$, so ist vermöge (1.)

29. $\text{cosec}(y \pm x) = \frac{\sec x \sec y}{\text{tang}\, y \pm \text{tang}\, x}$ (wie im Lehrsatz 6.).

XV. Schreibt man dagegen den Ausdruck von $\sin(y \pm x)$ (1.) wie folgt

$$\sin(y \pm x) = \sin x \sin y \left(\frac{\cos x}{\sin x} \pm \frac{\cos y}{\sin y}\right);$$

so erhält man, weil $\sin x = \frac{1}{\text{cosec}\, x}$, $\sin y = \frac{1}{\text{cosec}\, y}$, $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ und $\frac{\cos y}{\sin y} = \cot y$ ist (§. 315.),

$$\sin(y \pm x) = \frac{\cot x \pm \cot y}{\text{cosec}\, x \;\text{cosec}\, y}; \text{ also}$$

30. $\text{cosec}(y \pm x) = \frac{\text{cosec}\, x \;\text{cosec}\, y}{\cot x \pm \cot y}$ (wie im Lehrsatz 6.)

XVI. Endlich folgt, weil $\frac{\sin -z}{\cos -z} = \text{tang} -z$ (§. 315.), aus (7. und 8.),

31. $\text{tang} -z = \frac{-\sin z}{\cos z} = -\text{tang}\, z$ (wie im Lehrsatz 9.)

und weil $\cot -z = \frac{1}{\text{tang} -z}$ ist (§. 315.),

32. $\cot -z = \frac{1}{-\text{tang}\, z} = -\cot z$ (wie im Lehrsatz 10.).

Ferner weil $\sec -z = \frac{1}{\cos -z}$ ist (§. 315.), vermöge $\cos -z = \cos z$ (8.),

33. $\sec -z = \frac{1}{\cos z} = \sec z$ (wie im Lehrsatz 11.)

und weil $\text{cosec} -z = \frac{1}{\sin -z}$ ist (§. 315.), vermöge $\sin -z = -\sin z$ (7.),

34. $\text{cosec} -z = \frac{1}{-\sin z} = -\text{cosec}\, z$ (wie im Lehrsatz 12.) *).

---

*) Man findet gewöhnlich den Satz $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ auf folgende Weise, und zwar für zwei Winkel $ACM = x$ und $BCA = y$ (Fig. 166.) bewiesen, die zusammen kleiner sind als ein rechter. AP sey der Sinus von x und BD der Sinus von y, DF auf MC und DE auf BQ senkrecht, so ist $EQ = DF$. Aber da die rechtwinkligen Dreiecke ACP und DCF ähnlich sind, so ist $\frac{AC}{AP} = \frac{DC}{DF}$, das heifst, $\frac{1}{\sin x} = \frac{\cos y}{DF}$, woraus $DF = EQ = \sin x \cos y$ folgt. Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke BDE und ACP ähnlich; denn die Dreiecke ACP und GCQ, GCQ

317.

Lehrsatz. *Es ist für jeden beliebigen Bogen* x

$$
\begin{array}{llll}
1. & \sin(2n\pi \pm x) = +\sin x, & & \sin((2n+1)\pi \pm x) = \mp \sin x, \\
 & \sin((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = \pm \cos x, & & \sin((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = \pm \cos x, \\
2. & \cos(2n\pi \pm x) = +\cos x, & & \cos((2n+1)\pi \pm x) = -\cos x, \\
 & \cos((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = \mp \sin x, & & \cos((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = \pm \sin x, \\
3. & \mathrm{tang}(2n\pi \pm x) = \pm \mathrm{tang}\, x, & & \mathrm{tang}((2n+1)\pi \pm x) = \pm \mathrm{tang}\, x, \\
 & \mathrm{tang}((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = -\cot x, & & \mathrm{tang}((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = +\cot x, \\
4. & \sec(2n\pi \pm x) = +\sec x, & & \sec((2n+1)\pi \pm x) = -\sec x, \\
 & \sec((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = \mp \mathrm{cosec}\, x, & & \sec((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = \pm \mathrm{cosec}\, x, \\
5. & \cot(2n\pi \pm x) = \pm \cot x, & & \cot((2n+1)\pi \pm x) = \pm \cot x, \\
 & \cot((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = -\mathrm{tang}\, x, & & \cot((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = \pm \mathrm{tang}\, x, \\
6. & \mathrm{cosec}(2n\pi \pm x) = \pm \mathrm{cosec}\, x, & & \mathrm{cosec}((2n+1)\pi \mp x) = \mp \mathrm{cosec}\, x, \\
 & \mathrm{cosec}((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi + x) = +\sec x, & & \mathrm{cosec}((2n\pm\tfrac{1}{2})\pi - x) = +\sec x,
\end{array}
$$

wo n *jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeuten kann, und die obern mit den obern, die untern mit den untern Zeichen zusammengehören.*

---

und GDE, und GDE und BDE sind ähnlich. Also ist $\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{PC}$, das heifst, $\frac{\sin y}{BE} = \frac{1}{\cos x}$, woraus $BE = \sin y \cos x$, folgt. Nun war $EQ = \sin x \cos y$, und $BE + EQ$ ist gleich $BQ = \sin(x+y)$. Also ist

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Die Ausdrücke von $\sin(x-y)$ und $\cos(y \pm x)$ nimmt man auf eben die Weise aus der Figur. Die Sätze für $\mathrm{tang}(y \pm x)$, $\sec(y \pm x)$ etc. folgen aus den vorigen nach (§. 315.).

Gegen diese Art zu beweisen, ist nichts zu erinnern; allein die Beweise gelten, wie sie sind, nur für zwei Winkel, die beide im ersten Quadranten liegen. Die Ausdrücke des Lehrsatzes dürfen deshalb noch nicht ohne besondere Rechtfertigung auch von gröfseren oder negativen Winkeln angenommen werden. Thut man es, wie es wohl geschieht, so verfällt man in den so häufigen, unhaltbaren Schlufs vom Besondern auf das Allgemeine. Will man die Sätze wirklich beweisen, so mufs man die Beweise erst noch für jeden der verschiedenen Fälle, wenn einer, oder wenn beide Winkel in einen der übrigen vier Quadranten liegen, wiederholen.

Da solches eine Menge von Figuren und eine weitläuftige Auseinandersetzung erfordert, so pflegt man auch die Ausdrücke

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \text{ und}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

nachdem sie von Bogen im ersten Quadranten bewiesen worden, auf gröfsere Winkel wie folgt auszudehnen. Man beweist zuerst, dafs für jedes beliebige x

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = +\cos x \text{ und}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x$$

ist, welches gewöhnlich aus der Figur geschieht. Daraus folgt, dafs

Beweis. **I. Es ist zu Folge (§. 316. 1.)**

$$\sin(2n\pi \pm x) = \cos x \sin 2n\pi \pm \sin x \cos 2n\pi$$
$$\sin((2n+1)\pi \pm x) = \cos x \sin(2n+1)\pi \pm \sin x \cos(2n+1)\pi$$
$$\sin((2n \pm \tfrac{1}{2})\pi + x) = \cos x \sin(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi + \sin x \cos(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi$$
$$\sin((2n \pm \tfrac{1}{2})\pi - x) = \cos x \sin(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi - \sin x \cos(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi.$$

Setzt man hierin die Werthe von $\sin 2n\pi$, $\cos 2n\pi$, $\sin(2n+1)\pi$, $\cos(2n+1)\pi$ etc. aus (§. 312. 7.). so erhält man die Ausdrücke (1.) des Lehrsatzes.

II. Es ist zu Folge (§. 316. 2.)

$$\cos(2n\pi \pm x) = \cos x \cos 2n\pi \mp \sin x \sin 2n\pi$$
$$\cos((2n+1)\pi \pm x) = \cos x \cos(2n+1)\pi \mp \sin x \sin(2n+1)\pi$$
$$\cos((2n \pm \tfrac{1}{2})\pi + x) = \cos x \cos(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi - \sin x \sin(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi$$
$$\cos((2n \pm \tfrac{1}{2})\pi - x) = \cos x \cos(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi + \sin x \sin(2n \pm \tfrac{1}{2})\pi.$$

Setzt man hierin die Werthe von $\sin 2n\pi$, $\cos 2n\pi$, $\sin(2n+1)\pi$ etc. aus (§. 312. 7.), so findet man die Ausdrücke (2.) des Lehrsatzes.

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = +\cos(x+y) \text{ und}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = -\sin(x+y),$$
mithin wenn x und y im ersten Quadranten liegen, dafs
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = +\cos x \cos y - \sin x \sin y \text{ und}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = -\sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
oder weil $\cos x = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + x)$ und $\sin x = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x)$ ist,
$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + x)\cos y + \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x)\sin y \text{ und}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x + y) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + x)\cos y - \sin(\tfrac{1}{2}\pi + x)\sin y$$
ist. Nun ist $\tfrac{1}{2}\pi + x$ offenbar ein Winkel der schon im zweiten Quadranten liegt. Schreibt man daher blos x statt $\tfrac{1}{2}\pi + x$ und läfst also jetzt x einen Winkel bedeuten, der im zweiten Quadranten liegt, so findet man
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
welches zeigt, dafs die beiden Ausdrücke des Lehrsatzes auch noch gelten, wenn einer von den beiden Winkeln in den zweiten Quadranten reicht. Auf dieselbe Art folgt nun weiter, dafs die Ausdrücke gelten, wenn auch der andere Winkel gröfser als ein rechter und kleiner als zwei rechte ist. Widerholt man das Verfahren, so folgt, dafs die Ausdrücke auch gelten, wenn einer oder beide Winkel zwischen 2 und 3 rechten Winkeln, zwischen 3 und 4 rechten Winkeln liegen; und so für jeden beliebigen Winkel.

Da aber diese Beweisart erst den allgemeinen Beweis der Sätze $\sin(\tfrac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ und $\cos(\tfrac{1}{2}\pi + x) = -\sin x$ für jedes beliebige x aus der Figur erfordert, so scheint die obige andere, mehr unmittelbare allgemeine Beweisart, deren Grund-Idee von Sarrus ist (Annales des mathematiques tom. XI. p. 223.) klarer und besser. Auch ist es wohl angemessener, wie hier oben, nur einen Satz aus der Figur zu nehmen und die übrigen daraus ohne weitere Hülfe der Figur abzuleiten.

III. Die Ausdrücke (3. 4. 5. 6.) des Lehrsatzes folgen unmittelbar aus $\frac{\sin z}{\cos z} = \tang z$, $\frac{1}{\cos z} = \sec z$, $\frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$ und $\frac{1}{\sin z} = \operatorname{cosec} z$ (§. 315.); man darf sich nur unter z der Reihe nach x, $x + 2n\pi$, $x + (2n+1)\pi$ und $x + (2n \pm \frac{1}{2})\pi$ vorstellen.

318.

Lehrsatz. *Es ist für jeden beliebigen Bogen* x

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tang x}{\sec x^2}$,

2. $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 1 - 2 \sin x^2$
$= 2 \cos x^2 - 1 = \frac{\cot x^2 - 1}{\operatorname{cosec} x^2}$,

3. $\tang 2x = \frac{2 \tang x}{1 - \tang x^2} = \frac{2 \cot x}{\cot x^2 - 1}$,

4. $\sec 2x = \frac{\sec x^2}{1 - \tang x^2} = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{\cot x^2 - 1}$,

5. $\cot 2x = \frac{\cot x^2 - 1}{2 \cot x} = \frac{1 - \tang x^2}{2 \tang x}$,

6. $\operatorname{cosec} 2x = \frac{\operatorname{cosec} x^2}{2 \cot x} = \frac{\sec x^2}{2 \tang x}$.

Beweis. Diese Sätze folgen unmittelbar aus (§. 316), wenn man daselbst $x = y$ setzt und die oberen Zeichen nimmt.

319.

Lehrsatz. *Es ist für einen beliebigen Bogen* x:

$$1. \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x = + \sqrt{\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)} \\ \operatorname{cosec} \frac{1}{2}x \begin{cases} = + \sqrt{\left(\frac{2 \sec x}{\sec x - 1}\right)} \\ = + \frac{\sqrt{(2(1 + \cos x))}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $4n\pi$ *und* $(4n+2)\pi$ *und für* **negative** x *zwischen* $(4n-2)\pi$ *und* $(4n-4)\pi$.

2.

2. $\begin{cases} \sin\ \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\dfrac{1-\cos x}{2}\right)} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x \begin{cases} = -\sqrt{\left(\dfrac{2\sec x}{\sec x - 1}\right)} \\ = -\dfrac{\sqrt{(2(1+\cos x))}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$

für **positive** x *zwischen* $(4n+2)\pi$ *und* $(4n+4)\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $4n\pi$ *und* $(4n-2)\pi$.

3. $\begin{cases} \cos\ \tfrac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x \begin{cases} = +\sqrt{\left(\dfrac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} \\ = +\dfrac{\sqrt{(2(1-\cos x))}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$

für **positive** x *zwischen* $(4n+3)\pi$ *und* $(4n+5)\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-3)\pi$ *und* $(4n-5)\pi$.

4. $\begin{cases} \cos\ \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x \begin{cases} = -\sqrt{\left(\dfrac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} \\ = -\dfrac{\sqrt{(2(1-\cos x))}}{\sin x} \end{cases} \end{cases}$

für **positive** x *zwischen* $(4n+1)\pi$ *und* $(4n+3)\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-1)\pi$ *und* $(4n-3)\pi$.

5. $\sin \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{2\cos \tfrac{1}{2}x}$; $\cos \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{2\sin \tfrac{1}{2}x}$.

6. $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\cot\tfrac{1}{2}x = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

7. $\cot\tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = 2\operatorname{cosec} x$; $\cot\tfrac{1}{2}x - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = 2\cot x$.

8. $\dfrac{\cot\tfrac{1}{2}x - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x}{\cot\tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x} = \dfrac{1-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x^2}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x^2} = \cos x$.

9. $\dfrac{1}{\cot\tfrac{1}{2}x - \cot x} = \dfrac{1}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x + \cot x} = \sin x$.

10. $\dfrac{1}{\operatorname{tang} x \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x + 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tang} x \cot\tfrac{1}{2}x - 1} = \cos x$.

11. $\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x^2 - \sec\tfrac{1}{2}x^2 = \cot\tfrac{1}{2}x^2 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x^2 = 4\cot x \operatorname{cosec} x$.

$$12.\quad \begin{cases} \sin\ \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos\ \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{9}{2})\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{9}{2})\pi$.

$$13.\quad \begin{cases} \sin\ \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos\ \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $(4n+\tfrac{1}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{3}{2})\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$.

$$14.\quad \begin{cases} \sin\ \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos\ \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $(4n+\tfrac{3}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$.

$$15.\quad \begin{cases} \sin\ \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos\ \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec\ \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-\tfrac{1}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$.

$$16.\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}} \\ \cot\ \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}} \end{cases}$$

für **positive** x *zwischen* $(4n+\tfrac{3}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$ *und*
zwischen $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$ *und* $(4n+\tfrac{9}{2})\pi$, *und*
für **negative** x *zwischen* $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$ *und*
zwischen $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$ *und* $(4n-\tfrac{9}{2})\pi$.

$$17.\quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}} \\[2ex] \cot \frac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}} \end{cases}$$

für positive x zwischen $(4n+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(4n+\frac{3}{2})\pi$ *und*
zwischen $(4n+\frac{5}{2})\pi$ *und* $(4n+\frac{7}{2})\pi$, *und*
für negative x zwischen $(4n-\frac{3}{2})\pi$ *und* $(4n-\frac{1}{2})\pi$ *und*
zwischen $(4n-\frac{5}{2})\pi$ *und* $(4n-\frac{7}{2})\pi$.

Beweis. I. Nach (§. 318. 2.) ist $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$. Also ist

$$1 - \cos 2x = 1 - \cos x^2 + \sin x^2 \text{ und}$$
$$1 + \cos 2x = 1 + \cos x^2 - \sin x^2.$$

Nun ist $1 - \cos x^2 = \sin x^2$ und $1 - \sin x^2 = \cos x^2$, also

$1 - \cos 2x = 2 \sin x^2$ und $1 + \cos 2x = 2 \cos x^2$, oder

$$\sin x^2 = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ und } \cos x^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

oder, wenn man x statt $2x$ schreibt,

$$18.\quad \sin \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \cos x}{2} \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Daraus folgt

$$19.\quad \sin \tfrac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)} \text{ und } \cos \tfrac{1}{2}x = \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)}.$$

Das zwiefache Zeichen kommt daher, dafs $\cos x = \cos(2n\pi \pm x)$ ist (§. 317. 2.). Deshalb sind die Gleichungen (18.) vollständig, eigentlich

$$\sin(n\pi \pm \tfrac{1}{2}x)^2 = \frac{1 - \cos x}{2} \text{ und } \cos(n\pi \pm \tfrac{1}{2}x)^2 = \frac{1 + \cos x}{2},$$

woraus

$$20.\quad \sin(n\pi \pm \tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \cos x}{2}\right)} \text{ und}$$
$$\cos(n\pi \pm \tfrac{1}{2}x) = \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)}$$

folgt. Nun haben z. B.

$$\sin \pm \tfrac{1}{2}x,\quad \sin(\pi \pm \tfrac{1}{2}x),\quad \sin(2\pi \pm \tfrac{1}{2}x) \ldots.$$
$$\cos \pm \tfrac{1}{2}x,\quad \cos(\pi \pm \tfrac{1}{2}x),\quad \cos(2\pi \pm \tfrac{1}{2}x) \ldots.$$

der Reihe nach entgegengesetzte Zeichen, obgleich zu allen den Bogen $2n\pi \pm x$ ein und derselbe Cosinus, nemlich $\cos x$, gehört; also müssen die Ausdrücke von $\sin \frac{1}{2}x$ und $\cos \frac{1}{2}x$ nothwendig doppelte Zeichen haben.

Das obere Zeichen + in dem Ausdruck von $\sin \frac{1}{2}x$ (19.) gilt, wenn

für positive Bogen x, $\frac{1}{2}x$ zwischen $2n\pi$ und $(2n+1)\pi$,
für negative Bogen x, $\frac{1}{2}x$ zwischen $2(n-1)\pi$ und $(2n-2)\pi$
liegt; denn die Sinus solcher Bogen sind positiv. Das untere Zeichen — gilt, wenn

für positive Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+1)\pi$ und $(2n+2)\pi$,
für negative Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $2n\pi$ und $(2n-1)\pi$

liegt; denn die Sinus solcher Bogen sind negativ.

Das obere Zeichen + in dem Ausdruck von $\cos\frac{1}{2}x$ gilt, wenn

für positive Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{3}{2})\pi$ und $(2n+\frac{5}{2})\pi$,
für negative Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n-\frac{1}{2})\pi$ und $(2n-\frac{3}{2})\pi$

liegt; denn die Cosinus solcher Bogen sind positiv. Das untere Zeichen — gilt, wenn

für positive Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{1}{2})\pi$ und $(2n+\frac{3}{2})\pi$,
für negative Bogen x,
$\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n-\frac{3}{2})\pi$ und $(2n-\frac{5}{2})\pi$

liegt; denn die Cosinus solcher Bogen sind negativ.

Nimmt man also die Wurzelgröfsen ohne Rücksicht auf ihre Zeichen und blos den Zahlenwerth derselben, so ist

$$21. \quad \sin\tfrac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}$$

für positive x, wenn x zwischen $4n\pi$ und $(4n+2)\pi$ liegt; und für negative x, wenn x zwischen $(4n-2)\pi$ und $(4n-4)\pi$ liegt;

$$22. \quad \sin\tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}$$

für positive x, wenn x zwischen $(4n+2)\pi$ und $(4n+4)\pi$ liegt; und für negative x, wenn x zwischen $4n\pi$ und $(4n-2)\pi$ liegt;

$$23. \quad \cos\tfrac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}$$

für positive x, wenn x zwischen $(4n+3)\pi$ und $(4n+5)\pi$ liegt; und für negative x, wenn x zwischen $(4n-3)\pi$ und $(4n-5)\pi$ liegt;

$$24. \quad \cos\tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}$$

für positive x, wenn x zwischen $(4n+1)\pi$ und $(4n+3)\pi$ liegt; und für negative x, wenn x zwischen $(4n-1)\pi$ und $(4n-3)\pi$ liegt; wie im Lehrsatze (1. 2. 3. 4.).

II. Ferner folgt aus (§. 318. 1.) $\sin x = \frac{\sin 2x}{2\cos x}$ und $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$, oder, wenn man x statt $2x$ schreibt,

25. $\sin \tfrac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\cos\tfrac{1}{2}x}$ und $\cos\tfrac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\sin x}$; wie (5.)

III. Sodann folgt aus $\frac{1}{\cos\tfrac{1}{2}x} = \sec\tfrac{1}{2}x$, wenn man aus (19.) $\cos\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)}$ setzt,

$$\sec\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{1+\cos x}\right)} = \pm\sqrt{\left(\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+1}\right)},\text{ oder}$$

26. $\sec\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x+1}\right)}$; wie (3. 4.)

Desgleichen giebt $\sec\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{1+\cos x}\right)}$, wenn man oben und unten mit $1-\cos x$ multiplicirt,
$\sec\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2(1-\cos x)}{1-\cos x^2}\right)}$, oder, weil $1-\cos x^2 = \sin x^2$ ist,

27. $\sec\tfrac{1}{2}x = \pm\frac{\sqrt{(2(1-\cos x))}}{\sin x}$; wie (3. 4.).

Da diese Ausdrücke von $\cos\tfrac{1}{2}x$ hergenommen sind, so sind ihre Zeichen denselben Regeln unterworfen, wie beim Cosinus.

III. Aus $\frac{1}{\sin\tfrac{1}{2}x} = \operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x$ folgt, wenn man $\sin\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}$ setzt, $\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{1-\cos x}\right)}$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{\frac{2}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}-1}\right)},\text{ oder}$$

28. $\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x-1}\right)}$; wie (1. 2.).

Desgleichen giebt $\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{1-\cos x}\right)}$, wenn man oben und unten mit $1+\cos x$ multiplicirt,
$\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}x = \pm\sqrt{\left(\frac{2(1+\cos x)}{1-\cos x^2}\right)}$, und weil $1-\cos x^2 = \sin x^2$,

29. $cosec \frac{1}{2} x = \pm \frac{\sqrt{(2(1 + \cos x))}}{\sin x}$; wie (1. 2.).

Da diese Ausdrücke von $\sin \frac{1}{2} x$ hergenommen sind, so sind ihre Zeichen denselben Regeln unterworfen, wie beim Sinus.

IV. Multiplicirt man $tang \frac{1}{2} x = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos \frac{1}{2} x}$ oben und unten mit $2 \cos \frac{1}{2} x$; so erhält man

$tang \frac{1}{2} x = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{2 \cos \frac{1}{2} x^2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{1 + \cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2}$; folglich weil $2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \sin x$ und $\cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2 = \cos x$ (§. 318.)

30. $tang \frac{1}{2} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$; wie (6.).

Multiplicirt man oben und unten mit $2 \sin \frac{1}{2} x$, so erhält man $tang \frac{1}{2} x = \frac{2 \sin \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} x^2 + \sin \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}$

$= \frac{1 - (\cos \frac{1}{2} x^2 - \sin \frac{1}{2} x^2)}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos x}$, also

31. $tang \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$; wie (6.).

Die Ausdrücke

32. $\cot \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ (6.)

folgen aus (30. u. 31.) unmittelbar, weil $\cot \frac{1}{2} x = \frac{1}{tang \frac{1}{2} x}$.

V. Addirt man die Ausdrücke von $\cot \frac{1}{2} x$ und $tang \frac{1}{2} x$ (30. 31. 32), so erhält man

$$\cot \frac{1}{2} x + tang \frac{1}{2} x = \frac{1 + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1 + 2 \cos x + \cos x^2 + \sin x^2}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1 + 2 \cos x + 1}{\sin x (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2 (1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2 \, cosec \, x \text{ und}$$

$$\cot \frac{1}{2} x + tang \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{1 - 2 \cos x + \cos x^2 + \sin x^2}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{1 - 2 \cos x + 1}{\sin x (1 - \cos x)}$$

$$= \frac{2 (1 - \cos x)}{\sin x (1 - \cos x)} = \frac{2}{\sin x} = 2 \, cosec \, x,$$

also auf beide Arten

33. $\cot \frac{1}{2} x + tang \frac{1}{2} x = 2 \, cosec \, x$; wie (7.).

Subtrahirt man $tang\,\frac{1}{2}x$ von $cot\,\frac{1}{2}x$, nach (30. 31. 32.) ausgedrückt, so erhält man

$$cot\,\tfrac{1}{2}x - tang\,\tfrac{1}{2}x = \frac{1+cos\,x}{sin\,x} - \frac{sin\,x}{1+cos\,x}$$

$$= \frac{1+2\,cos\,x+cos\,x^2-sin\,x^2}{sin\,x(1+cos\,x)} = \frac{cos\,x^2+2\,cos\,x+cos\,x^2}{sin\,x(1+cos\,x)}$$

$$= \frac{2\,cos\,x(1+cos\,x)}{sin\,x(1+cos\,x)} = \frac{2\,cos\,x}{sin\,x} = 2\,cot\,x \text{ und}$$

$$cot\,\tfrac{1}{2}x - tang\,\tfrac{1}{2}x = \frac{1-cos\,x}{sin\,x} - \frac{sin\,x}{1-cos\,x}$$

$$= \frac{1-2\,cos\,x+cos\,x^2-sin\,x^2}{sin\,x(1-cos\,x)} = \frac{cos\,x^2-2\,cos\,x+cos\,x^2}{sin\,x(1-cos\,x)}$$

$$= \frac{2\,cos\,x(1-cos\,x)}{sin\,x(1-cos\,x)} = \frac{2\,cos\,x}{sin\,x} = 2\,cot\,x;$$

also auf beide Arten

34. $cot\,\frac{1}{2}x - tang\,\frac{1}{2}x = 2\,cot\,x$; wie (7.).

VI. Dividirt man (34.) durch (33.), so erhält man

35. $$\frac{cot\,\frac{1}{2}x - tang\,\frac{1}{2}x}{cot\,\frac{1}{2}x + tang\,\frac{1}{2}x} = \frac{2\,cot\,x}{2\,cosec\,x} = \frac{cos\,x}{sin\,x} : \frac{1}{sin\,x} = cos\,x;$$

wie (8.), oder auch weil $cot\,\frac{1}{2}x = \dfrac{1}{tang\,\frac{1}{2}x}$,

36. $$\frac{cot\,\frac{1}{2}x - tang\,\frac{1}{2}x}{cot\,\frac{1}{2}x + tang\,\frac{1}{2}x} = \frac{\dfrac{1}{tang\,\frac{1}{2}x} - tang\,\frac{1}{2}x}{\dfrac{1}{tang\,\frac{1}{2}x} + tang\,\frac{1}{2}x} = \frac{1-tang\,\frac{1}{2}x^2}{1+tang\,\frac{1}{2}x^2};$$

wie (8.).

VII. Da $cot\,\frac{1}{2}x = \dfrac{1+cos\,x}{sin\,x}$ (32.) $= \dfrac{1}{sin\,x} + cot\,x$

und $tang\,\frac{1}{2}x = \dfrac{1-cos\,x}{sin\,x}$ (31.) $= \dfrac{1}{sin\,x} - cot\,x$,

so ist $cot\,\frac{1}{2}x - cot\,x = \dfrac{1}{sin\,x} = tang\,\frac{1}{2}x + cot\,x$, also

37. $$\frac{1}{cot\,\frac{1}{2}x - cot\,x} = \frac{1}{tang\,\frac{1}{2}x + cot\,x} = sin\,x; \text{ wie (9.).}$$

Da $tang\,\frac{1}{2}x = \dfrac{1-cos\,x}{sin\,x}$ (31.) und $cot\,\frac{1}{2}x = \dfrac{1+cos\,x}{sin\,x}$ (32.),

so ist $tang\,\frac{1}{2}x\,tang\,x = \left(\dfrac{1}{sin\,x} - \dfrac{cos\,x}{sin\,x}\right)\dfrac{sin\,x}{cos\,x} = \dfrac{1}{cos\,x} - 1$

und $cot\,\frac{1}{2}x\,tang\,x = \left(\dfrac{1}{sin\,x} + \dfrac{cos\,x}{sin\,x}\right)\dfrac{sin\,x}{cos\,x} = \dfrac{1}{cos\,x} + 1$,

also $tang\frac{1}{2}x\,tang\,x + 1 = cot\frac{1}{2}x\,tang\,x - 1 = \frac{1}{cos\,x}$, folglich

38. $\frac{1}{tang\,x\,tang\frac{1}{2}x + 1} = \frac{1}{tang\,x\,cot\frac{1}{2}x - 1} = cos\,x$; wie (10.).

VIII. Da $cosec\frac{1}{2}x = \frac{1}{sin\frac{1}{2}x} = \frac{2\,cos\frac{1}{2}x}{sin\,x}$ (5.)

und $sec\frac{1}{2}x = \frac{1}{cos\frac{1}{2}x} = \frac{2\,sin\frac{1}{2}x}{sin\,x}$ (5.),

so ist $cosec\frac{1}{2}x^2 - sec\frac{1}{2}x^2 = \frac{4(cos\frac{1}{2}x^2 - sin\frac{1}{2}x^2)}{sin\,x^2}$.

Aber $cos\frac{1}{2}x^2 - sin\frac{1}{2}x^2 = cos\,x$, also

39. $cosec\frac{1}{2}x^2 - sec\frac{1}{2}x^2 = \frac{4\,cos\,x}{sin\,x^2} = 4\,cot\,x\,cosec\,x$; wie (11.).

Auch ist $cosec\frac{1}{2}x^2 = 1 + cot\frac{1}{2}x^2$ und $sec\frac{1}{2}x^2 = 1 + tang\frac{1}{2}x^2$, also

40. $cosec\frac{1}{2}x^2 - sec\frac{1}{2}x^2 = cot\frac{1}{2}x^2 - tang\frac{1}{2}x^2$; wie (11.).

IX. Es ist

41. $sin\frac{1}{2}x^2 + cos\frac{1}{2}x^2 = 1$ und $2\,sin\frac{1}{2}x\,cos\frac{1}{2}x = sin\,x$.

Addirt und subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$sin\frac{1}{2}x^2 + 2\,sin\frac{1}{2}x\,cos\frac{1}{2}x + cos\frac{1}{2}x^2 = 1 + sin\,x$ und.

$sin\frac{1}{2}x^2 - 2\,sin\frac{1}{2}x\,cos\frac{1}{2}x + cos\frac{1}{2}x^2 = 1 - sin\,x$, oder

$(sin\frac{1}{2}x + cos\frac{1}{2}x)^2 = 1 + sin\,x$ und

$(sin\frac{1}{2}x - cos\frac{1}{2}x)^2 = 1 - sin\,x$; also

42. $sin\frac{1}{2}x + cos\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{(1 + sin\,x)}$ und

43. $sin\frac{1}{2}x - cos\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{(1 - sin\,x)}$,

woraus, wenn man addirt und subtrahirt und durch 2 dividirt,

44. $sin\frac{1}{2}x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,x)} + (\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,x)})$ und

45. $cos\frac{1}{2}x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + sin\,x)} - (\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,x)})$

folgt. Welche Zeichen zusammengehören, findet man auf eine ähnliche Art wie in (I.), nemlich:

α) Für *positive* x.

1. Es liege x zwischen $4n\pi$ und $(4n + \frac{1}{2})\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $2n\pi$ und $(2n + \frac{1}{4})\pi$. Also liegt alsdann $\frac{1}{2}x$ wie ein Bogen in der ersten Hälfte des ersten Quadranten, z. B. wie der Bogen MA_1 (Fig. 165.), wenn daselbst $MV = VG = \frac{1}{4}\pi$ ist. Die Sinus und Cosinus solcher Bogen sind beide positiv, und der Cosinus ist größer als der Sinus, denn es ist $VV_1 = V_1C$ und $A_1P_1 < VV_1$, hingegen $P_1C > V_1C$; also $P_1C > A_1P_1$. Also ist für solche Bogen nothwen-

dig $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ positiv, und, weil $\sin\frac{1}{2}x < \cos\frac{1}{2}x$ ist, $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ negativ; daher ist nothwendig in (42. u. 43.)

$$\sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x = +\sqrt{(1+\sin x)} \text{ und}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}x - \cos\tfrac{1}{2}x = -\sqrt{(1-\sin x)}, \text{ woraus}$$

$$46.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \text{ und} \\ \cos\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \end{cases}$$

folgt; für positive x zwischen $4n\pi$ und $(4n+\frac{1}{2})\pi$.

2. Es liege x zwischen $(4n+\frac{1}{2})\pi$ und $(4n+1)\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{1}{4})\pi$ und $(2n+\frac{1}{2})\pi$. Also liegt alsdann $\frac{1}{2}x$ wie ein Bogen in der zweiten Hälfte des ersten Quadranten. Z. B. wie der Bogen MB_1. Die Sinus und Cosinus solcher Bogen sind beide positiv, und der Sinus ist größer als der Cosinus, was sich auf gleiche Weise wie in (1.) zeigen läßt. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ positiv und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ ebenfalls positiv, folglich gilt in (42.) wie in (43.) das obere Zeichen, und es ist folglich

$$47.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \text{ und} \\ \cos\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}; \end{cases}$$

für positive x zwischen $(4n+\frac{1}{2})\pi$ und $(4n+1)\pi$.

3. Es liege x zwischen $(4n+1)\pi$ und $(4n+\frac{3}{2})\pi$, so liegt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{1}{2})\pi$ und $(2n+\frac{3}{4})\pi$, folglich wie z. B. der Bogen MGA_2, wenn $GV_2 = NV_2$. Die Sinus solcher Bogen sind positiv, die Cosinus negativ und es ist $\sin\frac{1}{2}x > -\cos\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ positiv, und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ ebenfalls positiv; mithin ist, wie im 2ten Falle,

$$48.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

4. Es liege x zwischen $(4n+\frac{3}{2})\pi$ und $(4n+2)\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{3}{4})\pi$ und $(2n+1)\pi$, wie MGB_2. $\sin\frac{1}{2}x$ ist positiv, $\cos\frac{1}{2}x$ negativ und $\sin\frac{1}{2}x > -\cos\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ negativ und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ positiv. Folglich gilt in (42.) das untere und in (43.) das obere Zeichen und man erhält:

$$49.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

5. Es liege x zwischen $(4n+2)\pi$ und $(4n+\frac{5}{2})\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+1)\pi$ und $(2n+\frac{5}{4})\pi$, wie $MGNA_2$. $\sin\frac{1}{2}x$ und $\cos\frac{1}{2}x$ sind beide negativ, und es ist $-\sin\frac{1}{2}x < -\cos\frac{1}{2}x$, oder $\cos\frac{1}{2}x < \sin\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ negativ und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ positiv. Folglich ist, wie im 4ten Falle,

$$50. \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

6. Es liege x zwischen $(4n+\frac{5}{2})\pi$ und $(4n+3)\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{5}{4})\pi$ und $(2n+\frac{3}{2})\pi$, wie $MGNB_3$. $\sin\frac{1}{2}x$ und $\cos\frac{1}{2}x$ sind beide negativ und es ist $-\sin\frac{1}{2}x > -\cos\frac{1}{2}x$, oder $\cos\frac{1}{2}x > \sin\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ negativ und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ ebenfalls negativ. Folglich gelten in (42.) und (43.) die untern Zeichen, und man findet:

$$51. \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

7. Es liege x zwischen $(4n+3)\pi$ und $(4n+\frac{7}{2})\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{3}{2})\pi$ und $(2n+\frac{7}{4})\pi$, wie $MGNHA_4$. $\sin\frac{1}{2}x$ ist negativ und $\cos\frac{1}{2}x$ positiv und $-\sin\frac{1}{2}x > \cos\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ negativ und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ ebenfalls negativ, folglich, wie im 6ten Falle,

$$52. \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

8. Es liege x zwischen $(4n+\frac{7}{2})\pi$ und $(4n+4)\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n+\frac{7}{4})\pi$ und $(2n+2)\pi$, wie $MGNHB_4$. $\sin\frac{1}{2}x$ ist negativ und $\cos\frac{1}{2}x$ positiv und $-\sin\frac{1}{2}x < \cos\frac{1}{2}x$. Also ist $\sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x$ positiv und $\sin\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x$ negativ. Folglich ist wie im 1sten Falle

$$53. \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}, \\ \cos\frac{1}{2}x = +\frac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)}. \end{cases}$$

Gröſsere Bogen sind wieder in einem der vorigen Fälle, weil $(4n+4)\pi$ oder $4(n+1)\pi$ auch eben so wohl durch $4n\pi$ bezeichnet wird. Die darauf folgenden Bogen sind also wieder unter den vorigen mitbegriffen und die aufgezählten 8 Fälle umfassen alle mögliche *positive* Bogen.

β. Für *negative* x.

9. Es liege x zwischen $4n\pi$ und $(4n-\frac{1}{2})\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $2n\pi$ und $(2n-\frac{1}{4})\pi$, wie MB_4. Der Fall kommt also mit dem 8ten überein und die Resultate stimmen mit (53.).

10. Es liege x zwischen $(4n-\frac{1}{2})\pi$ und $(4n-1)\pi$, so fällt $\frac{1}{2}x$ zwischen $(2n-\frac{1}{4})\pi$ und $(2n-\frac{1}{2})\pi$, wie MA_4. Also kommt der Fall mit dem 7ten überein und die Resultate stimmen mit (52.).

11. Eben so erhält man, wenn x zwischen $(4n-1)\pi$ und $(4n-\frac{3}{2})\pi$ liegt, die Resultate des 6ten Falles (51.).

12. Wenn x zwischen $(4n - \frac{3}{2})\pi$ und $(4n - 2)\pi$ fällt, findet man die Resultate des 5ten Falles (50.).

13. Wenn x zwischen $(4n - 2)\pi$ und $(4n - \frac{5}{2})\pi$ fällt, findet man die Resultate des 4ten Falles (49.).

14. Wenn x zwischen $(4n - \frac{5}{2})\pi$ und $(4n - 3)\pi$ fällt, findet man die Resultate des 3ten Falles (48.).

15. Wenn x zwischen $(4n - 3)\pi$ und $(4n - \frac{7}{2})\pi$ fällt, findet man die Resultate des 2ten Falles (47.).

16. Wenn x zwischen $(4n - \frac{7}{2})\pi$ und $(4n - 4)\pi$ fällt, findet man die Resultate des 1sten Falles (46.).

Die folgenden Bogen sind, wie bei den positiven x, wieder unter den vorigen mitbegriffen und die aufgezählten 8 Fälle (9. bis 16.) umfassen alle mögliche *negative* Bogen.

Die Resultate

im 1sten, 8ten, 9ten und 16ten Falle
im 2ten, 3ten, 14ten — 15ten —
im 4ten, 5ten, 12ten — 13ten —
im 6ten, 7ten, 10ten — 11ten —

sind einander gleich, woraus die Gleichungen (12. 13. 14. 15.) des Lehrsatzes folgen.

X. Da $sec \frac{1}{2} x = \frac{1}{cos \frac{1}{2} x} = \frac{2 sin \frac{1}{2} x}{2 sin \frac{1}{2} x \, cos \frac{1}{2} x} = \frac{2 sin \frac{1}{2} x}{sin x}$

und $cosec \frac{1}{2} x = \frac{1}{sin \frac{1}{2} x} = \frac{2 cos \frac{1}{2} x}{2 cos \frac{1}{2} x \, sin \frac{1}{2} x} = \frac{2 cos \frac{1}{2} x}{sin x}$,

so findet man die Ausdrücke von $sec \frac{1}{2} x$ und $cosec \frac{1}{2} x$ (12. 13. 14. 15.) durch $sin x$ in den verschiedenen Fällen, wenn man aus (IX.) die Ausdrücke von $2 sin \frac{1}{2} x$ und $2 cos \frac{1}{2} x$ durch $sin x$ dividirt.

XI. Die Ausdrücke $tang \frac{1}{2} x = \frac{sin \frac{1}{2} x}{cos \frac{1}{2} x}$ und $cot \frac{1}{2} x = \frac{cos \frac{1}{2} x}{sin \frac{1}{2} x}$ (16. 17.) findet man, wenn man diejenigen von $sin \frac{1}{2} x$ und $cos \frac{1}{2} x$ für die verschiedenen Fälle mit einander dividirt.

320.

Lehrsatz. *Der Sinus von einem Drittheil des rechten Winkels, oder $\frac{1}{6}\pi$, und der ihm gleiche Cosinus von $\frac{2}{3}\varrho$ oder $\frac{1}{3}\pi$ ist der Hälfte der Halbmessers gleich, so dass*

1. $sin(2n \pm \frac{1}{6})\pi = \pm \frac{1}{2}$, $sin(2n + 1 \pm \frac{1}{6})\pi = \mp \frac{1}{2}$
2. $cos(2n \pm \frac{1}{3})\pi = + \frac{1}{2}$, $cos(2n + 1 \pm \frac{1}{3})\pi = - \frac{1}{2}$.

Die Tangente der Hälfte des rechten Winkels, oder von $\frac{1}{4}\pi$, und die ihr gleiche Cotangente des nemlichen Win-

kels sind dem Halbmesser selbst gleich, so daſs

3. $tang(2n \pm \frac{1}{4})\pi = \pm 1$, $tang(2n + 1 \pm \frac{1}{4})\pi = \pm 1$;

4. $cot\ (2n \pm \frac{1}{4})\pi = \pm 1$, $cot\ (2n + 1 \pm \frac{1}{4})\pi = \pm 1$.

Alle übrigen goniometrischen Linien von rationalen Theilen des Umfangs sind irrational.

Der Sinus und der ihm gleiche Cosinus von $\frac{1}{4}\pi$ ist $\sqrt{\frac{1}{2}}$, so daſs

5. $sin\ (2n \pm \frac{1}{4})\pi = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, $sin\ (2n + 1 \pm \frac{1}{4})\pi = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}$

6. $cos\ (2n \pm \frac{1}{4})\pi = + \sqrt{\frac{1}{2}}$, $cos\ (2n + 1 \pm \frac{1}{4})\pi = - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ueberall gehören die obern Zeichen zusammen, wie die untern.

Beweis. Der Sinus von $\frac{1}{6}\pi$ ist die Hälfte der Sehne von $\frac{1}{3}\pi$. Diese Sehne aber ist die Seite des regelmäſsigen, eingeschriebenen Sechsecks, denn $\frac{1}{3}\pi$ ist der sechste Theil des Umfanges. Nun ist die Seite des regelmäſsigen Sechsecks dem Halbmesser seiner Ecken gleich, also gleich 1. Folglich ist $sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$. Daraus folgen die Gleichungen (1.), wenn man in (§. 317. 1.) $\pm \frac{1}{6}\pi$ statt x setzt.

Ferner ist $cos \frac{1}{3}\pi = sin \frac{1}{6}\pi$, weil zu Folge (§. 317. 2.) $cos(\frac{1}{2}\pi - x) = sin\, x$ ist, welches $cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi)$, oder $cos \frac{1}{3}\pi = sin \frac{1}{6}\pi$ giebt. Daraus folgen die Gleichungen (2.) wenn man in (§. 317. 2.) $\pm \frac{1}{3}\pi$ statt x setzt.

Die Tangente von $\frac{1}{4}\pi$ ist die Hälfte der Seite des regelmäſsigen, umschriebenen Vierecks; denn $\frac{1}{4}\pi$ ist der achte Theil des Umfanges. Die Seite dieses Quadrats aber ist 2. Also ist $tang \frac{1}{4}\pi = 1$. Daraus folgen die Gleichungen (3.) wenn man in (§. 317. 3.) $\pm \frac{1}{4}\pi$ statt x setzt.

Eben so folgen die Gleichungen (4.) aus (§. 317. 5.) wenn man $\pm \frac{1}{4}\pi$ statt x setzt; denn die Cotangente von $\frac{1}{4}\pi$ ist ebenfalls die Hälfte der Seite des umschriebenen Quadrats.

Der Sinus von $\frac{1}{4}\pi$ ist dem Cosinus von $\frac{1}{4}\pi$ gleich; also ist sein Quadrat die Hälfte von 1 und mithin der Sinus, wie der Cosinus, gleich $\sqrt{\frac{1}{2}}$, welches vermöge (§. 317. 1. 2.) die Ausdrücke (5. und 6.) giebt.

321.

Lehrsatz. Die Quadrate der Sinus von $(n + \frac{1}{10})\pi$ und von $(n + \frac{3}{10})\pi$, und nur diese, sind von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um das Quadrat des Sinus von $(n + \frac{1}{6})\pi$, oder um $\frac{1}{4}$ (§. 320.) verschieden, so daſs

$$1.\ \begin{cases} \sin((n+\tfrac{1}{10})\pi)^2 + \sin((n+\tfrac{1}{6})\pi)^2 = \sin(2(n+\tfrac{1}{10})\pi)^2 \text{ und} \\ \sin((n+\tfrac{3}{10})\pi)^2 + \sin((n+\tfrac{1}{6})\pi)^2 = \sin(2(n+\tfrac{3}{10})\pi)^2, \end{cases}$$

oder, wenn man den Umfang in 360 Grade theilt und statt $(n+\frac{1}{6})\pi$ *seinen Werth* $\pm\frac{1}{2}$ *setzt,*

$$2.\ \begin{cases} \sin(n\pi+18^\circ)^2 + \tfrac{1}{4} = \sin(2n\pi+36^\circ)^2 \text{ und} \\ \sin(n\pi+54^\circ)^2 + \tfrac{1}{4} = \sin(2n\pi+108^\circ)^2 \end{cases}$$

ist. Die Werthe dieser Sinus sind

$$3.\ \begin{cases} \sin\ (n+\tfrac{1}{10})\pi = \pm\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}), \\ \sin 2(n+\tfrac{1}{10})\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(+10-2\sqrt{5})}, \\ \sin\ (n+\tfrac{3}{10})\pi = \pm\tfrac{1}{4}(+1+\sqrt{5}), \\ \sin 2(n+\tfrac{3}{10})\pi = \tfrac{1}{4}\sqrt{(+10+2\sqrt{5})}. \end{cases}$$

n *ist eine beliebige ganze Zahl und das obere Zeichen gilt, wenn* n *grade, das untere, wenn* n *ungrade ist.*

Beweis. I. Um zu sehen wie viel Sinus es giebt, deren Quadrate von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um $\frac{1}{4}$ verschieden sind, setze man einen solchen Sinus gleich $z=\sin\varphi$, so ist der Sinus des doppelten Winkels, vermöge (§. 318. 1.) $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = z\sqrt{(1-z^2)}$. Es muſs also, der Bedingung zu Folge

$$4.\quad z^2+\tfrac{1}{4} = (2z\sqrt{(1-z^2)})^2$$

seyn. Daraus folgt $4z^2+1 = 16z^2(1-z^2)$, oder $16z^4 - 12z^2+1=0$, oder $(4z^2-1)^2-4z^2=0$, oder

$$5.\quad (4z^2-1-2z)(4z^2-1+2z)=0;$$

also

$$6.\ \begin{cases} 4z^2-2z-1=0, \text{ oder } z^2-\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{4}=0 \text{ und} \\ 4z^2+2z-1=0, \text{ oder } z^2+\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{4}=0. \end{cases}$$

Dieses giebt

$$7.\ \begin{cases} z = +\tfrac{1}{4}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{4}(+1\pm\sqrt{5}) \\ z = -\tfrac{1}{4}\pm\sqrt{(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4})} = \tfrac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5}). \end{cases}$$

Je zwei dieser vier Werthe von z sind an Gröſse gleich und haben nur entgegengesetzte Zeichen. Man kann also schreiben

$$8.\ \begin{cases} z = \pm\tfrac{1}{4}(+1+\sqrt{5}) \text{ und} \\ z = \pm\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}). \end{cases}$$

Es giebt demnach zwar vier verschiedene Sinus, welche die vorgeschriebene Bedingung erfüllen, aber je zwei gehören zu Winkeln, die nur um eine ungerade Zahl von halben Umfängen verschieden seyn können, indem sie an Gröſse gleich sind, und nur entgegengesetzte Zeichen haben. Abgesehen von demjenigen Unterschiede der ungleichen Winkel, die nur irgend eine Zahl von halben oder ganzen Umfängen seyn kann, giebt es also nur zwei Winkel von der vorausgesetzten Eigenschaft, nemlich, daſs die

Quadrate ihrer Sinus von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um $\frac{1}{4}$ verschieden sind.

II. Die Winkel selbst kann man vermittelst der Bedingung (6.), welche soviel ist als

$$9.\quad 4z^2 \pm 2z - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$10.\quad \frac{2z}{1 \pm 2z} = \frac{1}{2z},$$

und zwar mit Hülfe einer Figur, wie folgt finden. Weiter unten wird sich zeigen, dafs sich die Winkel auch ohne Figur finden lassen.

Man setze, die Hälften der Winkel ACB und ACD (Fig. 167.) wären die gesuchten doppelten Winkel, und nehme $AC = BC = DC = 1$ an, so dafs die Dreiecke ACB und ACD gleichschenklig sind, so sind AB und AD die doppelten Sinus der halben Winkel ACB und ACD, und folglich gleich $2z$. Nun nehme man die verschiedenen $2z$ positiv und negativ, auf dem einen Schenkel, von C aus nach E und nach F, so dafs $EC = AB = 2z$, $CF = AD = 2z$, $AE = 1 - 2z$ und $AF = 1 + 2z$ ist, so müssen die Winkel ACB und ACD von der Art seyn, dafs sie die Bedingung $\frac{2z}{1 \pm 2z} = \frac{1}{2z}$ erfüllen, und dafs also

$$11.\quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AB} \text{ und } \frac{AD}{AF} = \frac{AC}{AD}$$

ist. Die Seiten, welche in den Dreiecken ABE, ABC und ADC, ADF die Winkel bei A einschliefsen, müssen also Gleichvielfache seyn, das heifst: die Dreiecke ABE, ACB und ADF, ACD müssen ähnlich seyn. Es mufs also $BE = AB = 2z$ seyn, weil $BC = AC$ ist, und $DF = AD = 2z$, weil $AC = CD$ ist. Also müssen auch die Dreiecke BEC und DFC gleichschenklig und folglich die Winkel ECB, CBE, ABE, so wie ACD, ADF, und DCF, CDF einander gleich seyn.

Daraus folgt $ABC = 2BCA$ und weil $BAC = ABC$,

$$12.\quad BCA = \tfrac{1}{5}(2\varrho)$$

desgleichen $CDF = DCF = 2\varrho - ACD$. Also da $ADF = ACD$ seyn soll, ADC oder $ADF - CDF$ gleich $ACD - (2\varrho - ACD) = 2ACD - 2\varrho$. Eben so der gleiche Winkel $DAC = 2ACD - 2\varrho$. Also $ACD = 2\varrho - 2(2ACD - 2\varrho) = 2\varrho - 4ACD + 4\varrho$, woraus

$$13.\quad ACD = \tfrac{1}{5}(6\varrho)$$

folgt.

Da nun *ACB* und *ACD* die doppelten Winkel φ sind, so ist

$$14. \quad \varphi = \tfrac{1}{10}(2\varrho) \text{ und } \varphi = \tfrac{1}{10}(6\varrho),$$

oder, wenn man die Bogen nimmt,

$$15. \quad \varphi = \tfrac{1}{10}\pi \text{ und } \varphi = \tfrac{3}{10}\pi,$$

und weil, wie oben gefunden, die Sinus auch negativ seyn können, also noch eine beliebige Zahl von halben Umfängen hinzugesetzt oder hinweggenommen werden kann,

$$16. \quad \varphi = (n + \tfrac{1}{10})\pi \text{ und } \varphi = (n + \tfrac{3}{10})\pi;$$

das heifst: die Winkel, welche die Eigenschaft haben, dafs die Quadrate ihrer Sinus von den Quadraten der Sinus der doppelten Winkel um $\frac{1}{4}$ verschieden sind, sind $(n + \frac{1}{10})\pi$ und $(n + \frac{3}{10})\pi$; wie behauptet wurde.

III. Ihre Sinus sind zu Folge (8.) $\pm\frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$ und $\pm\frac{1}{4}(+1 + \sqrt{5})$ wie (3.), und da die Quadrate der Sinus der doppelten Winkel um $\frac{1}{4}$ gröfser sind, so sind diese Quadrate $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(1 - 2\sqrt{5} + 5)$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}(1 + 2\sqrt{5} + 5)$, oder $\frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{5})$ und $\frac{1}{16}(10 + 2\sqrt{5})$, also die Sinus der doppelten Winkel selbst,

$$17. \quad \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} \text{ und } \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})};$$

wie (3.).

322.

Anmerkung. Durch die Ausdrücke der Sinus von $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{10}\pi$, $\frac{3}{10}\pi$, $\frac{2}{10}\pi$ und $\frac{6}{10}\pi$, in den beiden vorigen Paragraphen, oder, nach der Eintheilung des Umfanges in 360 Grade, der Sinus von 30°, 45°, 60°, 18°, 54°, 36° und 108°, oder was dasselbe ist, 72°, welche Ausdrücke auch, weil $\sqrt{(1 - \sin x^2)} = \cos x^2$ ist, unmittelbar die Cosinus und daraus weiter die Tangenten, Secanten etc. der nemlichen Winkel geben, kann man ohne andere Hülfe die goniometrischen Linien aller Winkel von $\frac{1}{60}\pi$ zu $\frac{1}{60}\pi$ oder von 3 zu 3 Graden finden, und zwar durch blofse Quadrat-Wurzeln.

Durch die Ausdrücke $\sin(y \pm x) = \sin y \cos x \pm \cos y \sin x$ und $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ nemlich findet man die Sinus der Winkel von 45° — 30° = 15°, von 18° — 15° = 3°, von 2.3° = 6°, von 3° + 6° = 9°, von 3° + 9° = 12°; u. s. w. von drei zu drei Graden. Aus den Sinus und Cosinus findet man die Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten.

Man kann auch noch, wenn man will, vermittelst des Ausdrucks $\sin \frac{1}{2} x = \pm \frac{\sqrt{(1 - \cos x)}}{2}$ die Winkel wiederholt und immerfort halbiren, und folglich die Sinus so kleiner Winkel finden als man will.

Die Theilung des Winkels in andere Theile als Hälften ist aber hierunter nicht mit begriffen. Kommt es blos darauf an, die Zahlenwerthe der goniometrischen Linien gegebener Winkel zu finden, so ist die Berechnung durch Reihen, weiter unten, viel bequemer und leichter.

323.

Lehrsatz. Es ist für beliebige Bogen x *und* y

1. $\sin(x + y) + \sin(x - y) = + 2 \sin x \cos y.$
2. $\sin(x + y) - \sin(x - y) = + 2 \cos x \sin y.$
3. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = + 2 \cos x \cos y.$
4. $\cos(x + y) - \cos(x - y) = - 2 \sin x \sin y.$
5. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y). \\ \sin x \cos x + \sin y \cos y = \sin(x + y) \cos(x - y). \end{cases}$
6. $\begin{cases} \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y. \\ \sin x \cos x - \sin y \cos y = \cos(x + y) \sin(x - y). \end{cases}$
7. $\cos x + \cos y = + 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y).$
8. $\cos x - \cos y = - 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y).$
9. $\sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2 = \sin(x+y) \sin(x-y).$
10. $\cos x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \sin x^2 = \cos(x+y) \cos(x-y).$
11. $\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$
12. $\cot y \pm \cot x = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.$
13. $\cot x \mp \operatorname{tang} y = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin x \cos y}.$
14. $\frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{\cot y \pm \cot x} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y.$
15. $\frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{\cot x \mp \operatorname{tang} y} = \operatorname{tang} x \operatorname{tang}(x \pm y).$
16. $\frac{\cot y \pm \cot x}{\cot x \mp \operatorname{tang} y} = \cot y \operatorname{tang}(x \pm y).$
17. $\operatorname{tang} x^2 - \operatorname{tang} y^2 = \frac{\sin(x + y) \sin(x - y)}{\cos x^2 \cos y^2}.$
18. $\cot y^2 - \cot x^2 = \frac{\sin(x + y) \sin(x - y)}{\sin x^2 \sin y^2}.$
19. $\cot x^2 - \operatorname{tang} y^2 = \frac{\cos(x + y) \cos(x - y)}{\sin x^2 \cos y^2}.$

20.

20. $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}$.

21. $\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x \pm y)$ oder

$\frac{\cos x + \cos y}{\sin x \pm \sin y} = \cot \frac{1}{2}(x \pm y)$.

22. $\frac{\cos y - \cos x}{\sin x \pm \sin y} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x \mp y)$ oder

$\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos y - \cos x} = \cot \frac{1}{2}(x \mp y)$.

23. $\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sec y - \sec x}{\sec y + \sec x}$

$= - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)$.

24. $\frac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y} = \frac{\cos \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)}$.

25. $\frac{\sin(x+y)}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)}$.

26. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos y}$.

27. $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin y}{\cos x + \cos y}$.

28. $\cot \frac{1}{2}(x-y) + \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin x}{\cos y - \cos x}$.

29. $\cot \frac{1}{2}(x-y) - \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin y}{\cos y - \cos x}$.

30. $\cot \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos x}{\sin x + \sin y}$.

31. $\cot \frac{1}{2}(x+y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos y}{\sin x + \sin y}$.

32. $\cot \frac{1}{2}(x-y) - \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos x}{\sin x - \sin y}$.

33. $\cot \frac{1}{2}(x-y) + \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos y}{\sin x - \sin y}$.

34. $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\cot y + \cot x}{\cot y - \cot x} = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} y}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y}$.

35. $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cot y - \operatorname{tang} x}{\cot y + \operatorname{tang} x} = \frac{\cot x - \operatorname{tang} y}{\cot x + \operatorname{tang} y}$.

Ueberall gehören die oberen Zeichen zusammen, wie die unteren.

Beweis. I. Es ist

$$\left.\begin{array}{ll} 36. & \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ 37. & \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ 38. & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ 39. & \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{array}\right\} (\S.\ 316.\ 1,\ 2.)$$

Addirt man (36. und 37.), so erhält man (1.). Subtrahirt man (37.) von (36.), so erhält man (2.). Addirt und subtrahirt man (38.) und (39.), so erhält man (3. und 4.).

II. Setzt man $\frac{1}{2}(x+y)$ statt x und $\frac{1}{2}(x-y)$ statt y, so muſs man $\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)=x$ statt $x+y$ und $\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{2}(x-y)=y$ statt $x-y$ setzen. Geschieht dieses in (1. 2. 3. 4.), so erhält man die ersten Ausdrücke in (5. 6.), desgleichen (7. 8.).

Die zweiten Ausdrücke in (5. und 6.) findet man, wenn man in die ersten $2x$ statt x und $2y$ statt y setzt, weil $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ ist (§. 318.).

III. Multiplicirt man den ersten Ausdruck (5.) mit dem ersten Ausdruck (6.), und (7.) mit (8.), so erhält man linkerhand $\sin x^2 - \sin y^2$ und $\cos x^2 - \cos y^2$, rechterhand aber für Beides $4\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$, welches letztere, weil $2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x+y) = \sin 2\cdot\frac{1}{2}(x+y)$ (§. 318. 1.) $=\sin(x+y)$ und $2\sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x-y) = \sin(x-y)$ ist, so viel ist als $\sin(x+y)\sin(x-y)$. Also ist

$$\sin x^2 - \sin y^2 = \cos x^2 - \cos y^2 = \sin(x+y)\sin(x-y),$$

wie (9.).

IV. Multiplicirt man (38.) mit (39.), so erhält man

$$\begin{aligned}\cos(x+y)\cos(x-y) &= \cos x^2 \cos y^2 - \sin x^2 \sin y^2 \\ &= \cos x^2(1-\sin y^2) - (1-\cos x^2)\sin y^2 \\ &= \cos x^2 - \sin y^2, \text{ wie } (10.).\end{aligned}$$

Auch ist $\cos x^2 - \sin y^2 = 1 - \sin x^2 - 1 + \cos y^2 = \cos y^2 - \sin x^2$, wie (10.)

V. Dividirt man (36.) und (37.) auf beiden Seiten mit $\cos x \cos y$ und $\sin x \sin y$, so erhält man

$$\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y} = \frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\sin y}{\cos y} = \tang x \pm \tang y, \text{ wie } (11.),$$

und

$$\frac{\sin(x\pm y)}{\sin x \sin y} = \frac{\cos y}{\sin y} \pm \frac{\cos x}{\sin x} = \cot y \pm \cot x, \text{ wie } (12.).$$

Dividirt man (38.) und (39.) auf beiden Seiten mit $\sin x \cos y$, so erhält man (13.).

Dividirt man (11.) mit (12.), so erhält man (14.).

Dividirt man (11.) und (12.) durch (13.), so erhält man (15.) und (16.).

VI. Multiplicirt man mit einander die beiden Gleichungen, welche, nachdem man die oberen oder die unteren Zeichen nimmt, (11.) ausdrückt, so erhält man (17.). Multiplicirt man die beiden Gleichungen (12.), so erhält man (18.). Multiplicirt man die beiden Gleichungen (13.), so erhält man (19.).

VII. Da $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$ und $\sin y = \frac{1}{\operatorname{cosec} y}$, so ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\frac{1}{\operatorname{cosec} x} + \frac{1}{\operatorname{cosec} y}}{\frac{1}{\operatorname{cosec} x} - \frac{1}{\operatorname{cosec} y}},$$ oder wenn man oben und unten mit $\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y$ multiplicirt,

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x},$$ wie (20.).

Die andere Gleichung (20.) erhält man, wenn man die ersten Gleichungen (5.) und (6.) mit einander dividirt, nehmlich

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(x-y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}.$$

VIII. Die Gleichungen (21.) erhält man, wenn man (5.) und (6.) durch (7.) dividirt, die Gleichungen (22.), wenn man (8.) durch (5.) und (6.) dividirt, und die Gleichung (23.), wenn man (8.) durch (7.) dividirt.

IX. Die Gleichungen (24. und 25.) erhält man, wenn man $\sin(x+y) = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y)$ durch die ersten Gleichungen (5.) und (6.) dividirt.

X. Die Gleichungen (26.) und (27.) erhält man, wenn man die beiden Gleichungen (21.) addirt und subtrahirt. Eben so (28.) und (29.), wenn man die Gleichungen (22.) in der zweiten Gestalt addirt und subtrahirt. Die beiden Gleichungen (30.) und (31.) erhält man wenn man $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)$ aus (22.) und $\cot \frac{1}{2}(x+y)$ aus (21.) subtrahirt und addirt. Die Gleichungen (32.) und (33.) eben so, wenn man $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)$ aus (22.) und $\cot \frac{1}{2}(x-y)$ aus (21.) nimmt.

XI. Die Gleichung (34.) findet man, wenn man (36.) durch (37.) beide aber vorher durch $\sin x \sin y$ und $\cos x \cos y$ dividirt, und die Gleichung (35.), wenn man

(38.) durch (39.) und beide vorher durch $\cos x \sin y$ und $\sin x \cos y$ dividirt.

324.

Lehrsatz. *Es ist für jeden beliebigen Bogen* x

1. $\sin(\tfrac{1}{4}\pi \pm x) = \cos(\tfrac{1}{4}\pi \mp x)$.

2. $\tang(\tfrac{1}{4}\pi \pm x) = \cot(\tfrac{1}{4}\pi \mp x) = \dfrac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x}$

$$= \frac{\cos 2x}{1 \mp \sin 2x} = \frac{1 \pm \tang x}{1 \mp \tang x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x}$$

$$= \sec 2x \pm \tang 2x.$$

3. $\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) + \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)$
$= \cot(\tfrac{1}{4}\pi - x) + \cot(\tfrac{1}{4}\pi + x) = 2 \sec 2x$.

4. $\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) - \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)$
$= \cot(\tfrac{1}{4}\pi - x) - \cot(\tfrac{1}{4}\pi + x) = 2 \tang 2x$.

5. $\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x) = \cot(\tfrac{1}{4}\pi + x) \cot(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1$.

6. $2\cos(\tfrac{1}{4}\pi + x) \cos(\tfrac{1}{4}\pi - x) = \sin(\tfrac{1}{4}\pi + x) \sin(\tfrac{1}{4}\pi - x) = \cos 2x$

$$= \frac{2}{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) + \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)} = \frac{2}{\cot(\tfrac{1}{4}\pi + x) + \cot(\tfrac{1}{4}\pi - x)}.$$

7. $\sin 2x = \dfrac{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x)^2 - 1}{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x)^2 + 1} = \dfrac{1 - \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)^2}{1 + \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)^2}$

$$= \frac{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) - \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)}{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) + \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)}.$$

8. $\dfrac{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) - 1}{\tang(\tfrac{1}{4}\pi + x) + 1} = \dfrac{1 - \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tang(\tfrac{1}{4}\pi - x)} = \tang x$.

9. $\sin(\tfrac{1}{3}\pi \pm x) = \cos(\tfrac{1}{6}\pi \mp x)$.

10. $\cos(\tfrac{1}{3}\pi \pm x) = \sin(\tfrac{1}{6}\pi \mp x)$.

11. $\sin(\tfrac{1}{3}\pi + x) - \sin(\tfrac{1}{3}\pi - x) = \cos(\tfrac{1}{6}\pi - x) - \cos(\tfrac{1}{6}\pi + x) = \sin x$.

12. $\cos(\tfrac{1}{3}\pi + x) + \cos(\tfrac{1}{3}\pi - x) = \sin(\tfrac{1}{6}\pi - x) + \sin(\tfrac{1}{6}\pi + x) = \cos x$.

13. $4 \sin(\tfrac{1}{3}\pi + x) \,.\, \sin(\tfrac{1}{3}\pi - x) = 4 \cos(\tfrac{1}{6}\pi + x) \cos(\tfrac{1}{6}\pi - x)$

$$= 2 \cos 2x + 1 = 4 \cos x^2 - 1.$$

14. $4 \cos(\tfrac{1}{3}\pi + x) \,.\, \cos(\tfrac{1}{3}\pi - x) = 4 \sin(\tfrac{1}{6}\pi + x) \sin(\tfrac{1}{6}\pi - x)$

$$= 2 \cos 2x - 1 = 1 - 4 \sin x^2.$$

16. $\tang(\tfrac{1}{3}\pi + x) \tang(\tfrac{1}{3}\pi - x) = \cot(\tfrac{1}{6}\pi + x) \cot(\tfrac{1}{6}\pi - x)$

$$= \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 1}.$$

16. $\sin(\tfrac{3}{10}\pi + x) - \sin(\tfrac{1}{10}\pi + x) + \sin(\tfrac{3}{10}\pi - x) - \sin(\tfrac{1}{10}\pi - x)$
$= \cos x$.

17. $\cos(\tfrac{1}{10}\pi + x) - \cos(\tfrac{3}{10}\pi + x) - \cos(\tfrac{1}{10}\pi - x) + \cos(\tfrac{3}{10}\pi - x)$
$= \sin x$.

Die oberen Zeichen gehören mit den oberen, die unteren mit den unteren zusammen.

Beweis. I. Da $\sin z = \cos(\frac{1}{2}\pi - z)$ (§. 317. 1.), so ist $\sin(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi \pm x)) = \cos(\frac{1}{4}\pi \mp x)$; wie (1.).

II. Der erste Ausdruck von $\tan g(\frac{1}{4}\pi \pm x)$ (2.) folgt, weil $\tan g\, z = \cot(\frac{1}{2}\pi - z)$ ist, (§. 317. 6.), welches $\tan g(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cot(\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{4}\pi \pm x)) = \cot(\frac{1}{4}\pi \mp x)$ giebt.

Die andern Ausdrücke (2.) folgen aus

$$\tan g(\tfrac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi \pm x)}{\cos(\frac{1}{4}\pi \pm x)} = \frac{\sin\frac{1}{4}\pi \cos x \pm \cos\frac{1}{4}\pi \sin x}{\cos\frac{1}{4}\pi \cos x \mp \sin\frac{1}{4}\pi \sin x},$$

welches erstlich, weil $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi$ ist (§. 320. 5. 6.), $\tan g(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x}$ giebt. Dieses ist der 5te Ausdruck von $\tan g(\frac{1}{4}\pi \pm x)$ (2.). Dividirt man oben und unten mit $\cos x$, so erhält man den 4ten Ausdruck: $\frac{1 \pm \tan g x}{1 \mp \tan g x}$. Multiplicirt man oben und unten mit $\cos x \pm \sin x$, so erhält man

$$\frac{(\cos \pm \sin x)^2}{\cos x^2 - \sin x^2} = \frac{\cos x^2 \pm 2 \sin x \cos x + \sin x^2}{\cos x^2 - \sin x^2}$$

$$= \frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x};$$

welches der zweite Ausdruck ist. Multiplicirt man oben und unten mit $\cos x \mp \sin x$, so findet man

$$\frac{\cos x^2 - \sin x^2}{(\cos x \mp \sin x)^2} = \frac{\cos x^2 - \sin x^2}{\cos x^2 \mp 2 \sin x \cos x + \sin x^2}$$

$$= \frac{\cos 2x}{1 \mp \sin 2x};$$

welches der dritte Ausdruck ist. Der 6te Ausdruck folgt unmittelbar aus dem zweiten, weil $\frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$ und $\pm \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \pm \tan g 2x$ ist.

III. Die Gleichungen (3. und 4.) folgen aus (2.), wenn man den ersten und sechsten Ausdruck von $\tan g(\frac{1}{4}\pi + x)$ und $\tan g(\frac{1}{4}\pi - x)$ addirt und subtrahirt.

IV. Die Gleichung (5.) folgt aus (2.), weil z. B. $\tan g(\frac{1}{4}\pi - x) = \cot(\frac{1}{4}\pi + x)$ und $\tan g(\frac{1}{4}\pi + x) \cot(\frac{1}{4}\pi + x) = 1$ ist.

V. $2\cos(\frac{1}{4}\pi + x)\cos(\frac{1}{4}\pi - x) = 2\sin(\frac{1}{4}\pi + x)\sin(\frac{1}{4}\pi - x)$ (6.) folgt aus (1.); wie (5.) aus (2.). Ferner ist, wenn man in (§. 323. 7.) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{2}y = x$ setzt, $2\cos(\frac{1}{4}\pi + x)\cos(\frac{1}{4}\pi - x) = \cos\frac{1}{2}\pi + \cos 2x = \cos 2x$ weil $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$; welches der 2te Ausdruck in (6.) ist. Der vierte und fünfte Ausdruck (6.) folgt aus (3.), weil $2 \sec 2x = \frac{2}{\cos 2x}$ ist.

VI. Den dritten Ausdruck von $\sin 2x$ (7.) erhält man unmittelbar, wenn man (4.) durch (3.) dividirt; denn es ist $\frac{2\,\mathrm{tang}\,2x}{2\sec 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} : \frac{1}{\cos 2x} = \sin 2x$. Multicirt man nun diesen dritten Ausdruck oben und unten mit $\cot(\frac{1}{4}\pi - x)$, so erhält man den zweiten Ausdruck von $\sin 2x$, weil $\cot(\frac{1}{4}\pi - x) = \mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi + x)$ (2.) und $\cot(\frac{1}{4}\pi - x)\,\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi - x) = 1$ ist. Eben so findet man den ersten Ausdruck von $\sin 2x$, wenn man oben und unten mit $\cot(\frac{1}{4}\pi + x)$ multiplicirt.

VII. Die Gleichung (8.) folgt aus $\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \frac{1 \pm \mathrm{tang}\,x}{1 \mp \mathrm{tang}\,x}$ (2.); denn dieses giebt
$\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) \mp \mathrm{tang}\,x\,\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) = 1 \pm \mathrm{tang}\,x$, oder
$\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) - 1 = \pm\,\mathrm{tang}\,x(1 + \mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x))$, also
$\pm\,\mathrm{tang}\,x = \frac{\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) - 1}{\mathrm{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm x) + 1}$; wie (8.)

VIII. Vermöge (§. 316. 1. und 2.) und weil $\sin\frac{1}{3}\pi = \sqrt{(1 - \cos\frac{1}{3}\pi^2)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})}$ (§. 320. 2.) $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\frac{1}{6}\pi = \sqrt{(1 - \sin\frac{1}{6}\pi^2)} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})}$ (§. 320. 1.) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, ist

$$18.\quad \sin(\tfrac{1}{3}\pi + x) = \cos x.\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x.\tfrac{1}{2},$$

$$19.\quad \sin(\tfrac{1}{3}\pi - x) = \cos x.\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x.\tfrac{1}{2},$$

$$20.\quad \sin(\tfrac{1}{6}\pi + x) = \cos x.\tfrac{1}{2} + \sin x.\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$21.\quad \sin(\tfrac{1}{6}\pi - x) = \cos x.\tfrac{1}{2} - \sin x.\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$22.\quad \cos(\tfrac{1}{3}\pi + x) = \cos x.\tfrac{1}{2} - \sin x.\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$23.\quad \cos(\tfrac{1}{3}\pi - x) = \cos x.\tfrac{1}{2} + \sin x.\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$23.\quad \cos(\tfrac{1}{6}\pi + x) = \cos x.\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x.\tfrac{1}{2},$$

$$25.\quad \cos(\tfrac{1}{6}\pi - x) = \cos x.\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x.\tfrac{1}{2}.$$

Aus (18.) und (25.) und aus (19.) und (24.) folgt, dafs $\sin(\frac{1}{3}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{6}\pi \mp x)$ und aus (20.) und (23.), (21.) und (22.), dafs $\cos(\frac{1}{3}\pi \pm x) = \sin(\frac{1}{6}\pi \mp x)$ ist; welches die Ausdrücke (9.) und (10.) sind.

Ferner erhält man, wenn man (19.) von (18.) und (24.) von (25.) subtrahirt, die Gleichung (11.).

Addirt man die Gleichungen (22. und 23.) und (20. und 21.), so erhält man die Gleichungen (12.).

Multiplicirt man (18.) mit (19.), so findet man $4\sin(\frac{1}{3}\pi + x)\sin(\frac{1}{3}\pi - x) = 3\cos x^2 - \sin x^2 =$ $2(\cos x^2 - \sin x^2) + \cos x^2 + \sin x^2 = 2\cos 2x + 1$, oder gleich $4\cos x^2 - \cos x^2 - \sin x^2 = 4\cos x^2 - 1$, welches auch zugleich, vermöge (9.), das Product von $\cos(\frac{1}{6}\pi - x)$ $\cos(\frac{1}{6}\pi + x)$ ist; wie (13.).

Eben so findet man (14.) aus (22. 23. und 10.).

Die Gleichung (15.) erhält man, wenn man (13.) mit (14.) dividirt.

IX. Es ist vermöge (§. 316. 1.)

$$\sin(\tfrac{3}{10}\pi + x) = \sin\tfrac{3}{10}\pi\cos x + \cos\tfrac{3}{10}\pi\sin x,$$
$$\sin(\tfrac{3}{10}\pi - x) = \sin\tfrac{3}{10}\pi\cos x - \cos\tfrac{3}{10}\pi\sin x,$$
$$\sin(\tfrac{1}{10}\pi + x) = \sin\tfrac{1}{10}\pi\cos x + \cos\tfrac{1}{10}\pi\sin x,$$
$$\sin(\tfrac{1}{10}\pi - x) = \sin\tfrac{1}{10}\pi\cos x - \cos\tfrac{1}{10}\pi\sin x,$$
$$\cos(\tfrac{3}{10}\pi + x) = \cos\tfrac{3}{10}\pi\cos x - \sin\tfrac{3}{10}\pi\sin x,$$
$$\cos(\tfrac{3}{10}\pi - x) = \cos\tfrac{3}{10}\pi\cos x + \sin\tfrac{3}{10}\pi\sin x,$$
$$\cos(\tfrac{1}{10}\pi + x) = \cos\tfrac{1}{10}\pi\cos x - \sin\tfrac{1}{10}\pi\sin x,$$
$$\cos(\tfrac{1}{10}\pi - x) = \cos\tfrac{1}{10}\pi\cos x + \sin\tfrac{1}{10}\pi\sin x.$$

Also ist die Summe linkerhand

in (16.) gleich $+(2\sin\frac{3}{10}\pi - 2\sin\frac{1}{10}\pi)\cos x$,

in (17.) gleich $-(2\sin\frac{1}{10}\pi - 2\sin\frac{3}{10}\pi)\sin x$.

Nun ist $\sin\frac{3}{10}\pi = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ und $\sin\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5})$ (§. 321. 3.); also ist $2\sin\frac{3}{10}\pi - 2\sin\frac{1}{10}\pi = 1$; welches die beiden Gleichungen (16.) und (17.) giebt.

325.

Lehrsatz. Es ist für beliebige Bogen u, x, y, z etc.

1. $4\sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin z = -\sin(x + y + z)$
$+ \sin(x + y - z) + \sin(x - y + z) + \sin(-x + y + z),$

2. $\sin x + \sin y + \sin z = \sin(x + y + z)$
$+ 4\sin\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x + z)\sin\frac{1}{2}(y + z).$

3. $4\cos x \,.\, \cos y \,.\, \cos z = \cos(x + y + z)$
$+ \cos(x + y - z) + \cos(x - y + z) + \cos(-x + y + z).$

4. $\cos x + \cos y + \cos z = -\cos(x + y + z)$
$+ 4\cos\frac{1}{2}(x + y)\cos\frac{1}{2}(x + z)\cos\frac{1}{2}(y + z).$

5. $\tang x \,.\, \tang y \,.\, \tang z = \tang x + \tang y + \tang z$
$- \dfrac{\sin(x + y + z)}{\cos x \cos y \cos z}.$

6. $\cot x \cot y \cot z = \cot x + \cot y + \cot z + \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}$.

7. $4 \sin x \cos y \cos z = \sin(x+y+z)$
$+ \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z)$.

8. $\sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z)$
$- \sin(x+y+z)$.

9. $8 \sin u \sin x \sin y \sin z = \cos(u+x+y+z)$
$- \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z)$
$- \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z)$
$- \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z)$
$- \cos(-u+x+y+z)$.

10. $8 \cos u \cos x \cos y \cos z = \cos(u+x+y+z)$
$+ \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z)$
$+ \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z)$
$+ \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z)$
$+ \cos(-u+x+y+z)$.

11. $4 \cos u \cos x \cos y \cos z \pm 4 \sin u \sin x \sin y \sin z$
$= \cos(u+x+y\pm z) + \cos(u+x-y\mp z) + \cos(u-x+y\mp z)$
$+ \cos(-u+x+y\mp z)$.

12. $\cos u + \cos x + \cos y + \cos z$

$$= \cos\frac{u+x+y+z}{2} + \cos\frac{u+x-y-z}{2} + \cos\frac{u-x+y-z}{2} + \cos\frac{-u+x+y-z}{2}$$

$$- 8 \sin\frac{u+x+y-z}{4} \sin\frac{u+x-y+z}{4} \sin\frac{u-x+y+z}{4} \sin\frac{-u+x+y+z}{4}$$

$$= + 8 \cos\frac{u+x+y-z}{4} \cos\frac{u+x-y+z}{4} \cos\frac{u-x+y+z}{4} \cos\frac{-u+x+y+z}{4}$$

$$- \cos\frac{u+x+y+z}{2} - \cos\frac{u+x-y-z}{2} - \cos\frac{u-x+y-z}{2} + \cos\frac{-u+x+y-z}{2}.$$

13. $1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 + 2 \cos x \cos y \cos z$

$$= 4 \sin\frac{x+y+z}{2} \sin\frac{x+y-z}{2} \sin\frac{x-y+z}{2} \sin\frac{-x+y+z}{2}.$$

14. $1 - \cos x^2 - \cos y^2 - \cos z^2 - 2 \cos x \cos y \cos z$

$$= - 4 \cos\frac{x+y+z}{2} \cos\frac{x+y-z}{2} \cos\frac{x-y+z}{2} \cos\frac{-x+y+z}{2}.$$

15. $1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 - 2 \sin x \sin y \cos z$

$$= - 4 \cos\frac{x+y+z}{2} \cos\frac{x+y-z}{2} \sin\frac{x-y+z}{2} \sin\frac{-x+y+z}{2}.$$

16. $1 - \cos x^2 - \cos y^2 + \cos z^2 + 2 \sin x \sin y \cos z$

$$= + 4 \sin\frac{x+y+z}{2} \sin\frac{+x+y-z}{2} \cos\frac{x-y+z}{2} \cos\frac{-x+y+z}{2}.$$

Die oberen und die unteren Zeichen gehören zusammen.

Beweis. I. Zufolge (§. 323. 1. 2. 3. 4.) ist

17. $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$,

18. $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$,

19. $\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y,$
20. $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y.$

II. Man multiplicire (20.) mit $2\sin z$, so erhält man

21. $4\sin x \sin y \sin z = 2\cos(x-y)\sin z - 2\cos(x+y)\sin z.$

Nun ist, wenn man in (18.) z statt y und erst $x-y$, dann $x+y$ statt x setzt,

22. $2\cos(x-y)\sin z = \sin(x-y+z) - \sin(x-y-z)$
$= \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z)$ und

23. $2\cos(x+y)\sin z = \sin(x+y+z) - \sin(x+y-z).$

Setzt man (22.) und (23.) in (21.), so findet man die Gleichung (1.).

III. Schreibt man in (1.) α, β, γ statt x, y, z, so erhält man

24. $\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(-\alpha+\beta+\gamma)$
$= \sin(\alpha+\beta+\gamma) + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

Nun setze man

25. $\alpha+\beta-\gamma = x,\quad \alpha-\beta+\gamma = y,\quad -\alpha+\beta+\gamma = z,$

so ist

28. $\alpha+\beta+\gamma = x+y+z,\quad \alpha = \frac{x+y}{2},\quad \beta = \frac{x+z}{2},\quad \gamma = \frac{y+z}{2}.$

Setzt man (25.) und (26.) in (24.), so findet man die Gleichung (2.)

IV. Man multiplicire (19.) mit $2\cos z$, so erhält man

27. $4\cos x \cos y \cos z = 2\cos(x-y)\cos z + 2\cos(x+y)\cos z.$

Nun ist, wenn man in (19.) z statt y und erst $x-y$, dann $x+y$ statt x setzt,

28. $2\cos(x-y)\cos z = \cos(x-y-z) + \cos(x-y+z)$
$= \cos(-x+y+z) + \cos(x-y+z)$ und

29. $2\cos(x+y)\cos z = \cos(x+y-z) + \cos(x+y+z).$

Setzt man (28.) und (29.) in (27.), so erhält man die Gleichung (3.).

V. Schreibt man in (3.) α, β, γ statt x, y, z, so erhält man

30. $\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma)$
$= -\cos(\alpha+\beta+\gamma) + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Nun setze man, wie (25.),

31. $\alpha+\beta-\gamma = x,\quad \alpha-\beta+\gamma = y,\quad -\alpha+\beta+\gamma = z,$

so ist

32. $\alpha+\beta+\gamma = x+y+z,\quad \alpha = \frac{x+y}{2},\quad \beta = \frac{x+z}{2},\quad \gamma = \frac{y+z}{2}.$

Setzt man (31.) und (32.) in (30.), so erhält man die Gleichung (4.).

VI. Zufolge (§. 323. 11.) ist

33. $tang\,x + tang\,y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$, also

34. $tang\,x + tang\,y + tang\,z = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$

$= \frac{\sin(x+y)\cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$

$= \frac{\sin(x+y)\cos z + \sin z(\cos(x+y) + \sin x \sin y)}{\cos x \cos y \cos z}$

$= \frac{\sin(x+y+z) + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$

$= \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z} + tang\,x\, tang\,y\, tang\,z;$

welches die Gleichung (5.) giebt.

VII. Zufolge (§. 323. 12.) ist

35. $\cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$, also

36. $\cot x + \cot y + \cot z = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} + \frac{\cos z}{\sin z}$

$= \frac{\sin(x+y)\sin z + \cos z \sin x \sin y}{\sin x \sin y \sin z}$

$= \frac{\sin(x+y)\sin z - \cos(x+y)\cos z + \cos x \cos y \cos z}{\sin x \sin y \sin z}$

$= \frac{\cos x \cos y \cos z - \cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}$

$= \cot x \cot y \cot z - \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z};$

welches die Gleichung (6.) giebt.

VIII. Man multiplicire (17.) mit $2\cos z$, so erhält man

37. $4\sin x \cos y \cos z = 2\sin(x+y)\cos z + 2\sin(x-y)\cos z.$

Nun ist, wenn man in (17.) z statt y und erst $x-y$, denn $x+y$ statt x setzt,

38. $2\sin(x-y)\cos z = \sin(x-y+z) + \sin(x-y-z)$
$= \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z)$ und

39. $2\sin(x+y)\cos z = \sin(x+y+z) + \sin(x+y-z).$

Setzt man (38.) und (39.) in (37.), so erhält man die Gleichung (7.).

IX. Schreibt man in (7.) α, β, γ statt x, y, z, so erhält man

40. $\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) - \sin(-\alpha+\beta+\gamma)$
$= 4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma).$

Nun setze man, wie (25.),

41. $\alpha+\beta-\gamma=x,\quad \alpha-\beta+\gamma=y,\quad u+\beta+\gamma=z,$

so ist

42. $\alpha+\beta+\gamma=x+y+z,\quad \alpha=\frac{x+y}{2},\ \beta=\frac{x+z}{2},\ \gamma=\frac{y+z}{2}.$

Setzt man (41.) und (42.) in (40.), so erhält man die Gleichung (8.).

X. Die Gleichungen (9.), (10.) und (12.) sind für 4 Bogen u, x, y, z, was (1.), (2.) und (4.) für drei sind. Man findet sie ganz ähnlich wie diese. Die Gleichung (11.) findet man, wenn man die Gleichungen (9.) und (10.) addirt und subtrahirt.

XI. Zufolge (§. 323. 5. 6. 7. 8.) ist

43. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y),$

44. $\sin x-\sin y=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y),$

45. $\cos y+\cos x=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y),$

46. $\cos y-\cos x=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).$

XII. Man setze in (43. 44. 45. 46.) erst $y+z$ und dann $y-z$ statt y, so erhält man

47. $\sin x+\sin(y+z)=2\sin\frac{1}{2}(x+y+z)\cos\frac{1}{2}(x-y-z),$

48. $\sin x-\sin(y+z)=2\cos\frac{1}{2}(x+y+z)\sin\frac{1}{2}(x-y-z),$

49. $\cos(y+z)+\cos x=2\cos\frac{1}{2}(x+y+z)\cos\frac{1}{2}(x-y-z),$

50. $\cos(y+z)-\cos x=2\sin\frac{1}{2}(x+y+z)\sin\frac{1}{2}(x-y-z),$

51. $\sin x+\sin(y-z)=2\sin\frac{1}{2}(x+y-z)\cos\frac{1}{2}(x-y+z),$

52. $\sin x-\sin(y-z)=2\cos\frac{1}{2}(x+y-z)\sin\frac{1}{2}(x-y+z),$

53. $\cos(y-z)+\cos x=2\cos\frac{1}{2}(x+y-z)\cos\frac{1}{2}(x-y+z),$

54. $\cos(y-z)-\cos x=2\sin\frac{1}{2}(x+y-z)\sin\frac{1}{2}(x-y+z).$

Man multiplicire (50.) mit (54.), so erhält man

55. $\cos(y+z)\cos(y-z)-\cos x(\cos(y+z)+\cos(y-z))+\cos x^2$
$=-4\sin\frac{x+y+z}{2}.\sin\frac{x+y-z}{2}.\sin\frac{x-y+z}{2}.\sin\frac{-x+y+z}{2},$

oder, weil $\cos(y+z)\cos(y-z)=\cos y^2-\sin z^2$ (§. 323. 10.) und $\cos(y+z)+\cos(y-z)=2\cos y\cos z$ (§. 323. 3.),

$\cos y^2-\sin z^2-2\cos x\cos y\cos z+\cos x^2$, oder

56. $-1+\cos x^2+\cos y^2+\cos z^2-2\cos x\cos y\cos z$
$=-4\sin\frac{x+y+z}{2}.\sin\frac{x+y-z}{2}.\sin\frac{x-y+z}{2}.\sin\frac{-x+y+z}{2},$

woraus die Gleichung (13.) folgt.

Auf dieselbe Weise findet man (14.), wenn man (49.) mit (53.), (15.), wenn man (48.) mit (52.), und (16.), wenn man (47.) mit (51.) multiplicirt.

326.

Lehrsatz. *Es ist für beliebige Winkel oder Bogen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu$:

1. $$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta}\ldots\ldots+\frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu}+\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha}=0.$$

2. $$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta}\ldots\ldots+\frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu}+\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha}=0.$$

3. $$\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\ldots\ldots+\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)+\sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)=0,$$

4. $$\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)+\cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\ldots\ldots+\cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)+\cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)=0,$$

5. $$\sin\varphi+\sin(\varphi+2\psi)+\sin(\varphi+4\psi)\ldots\ldots+\sin(\varphi+2n\psi)=\frac{\sin(\varphi+n\psi)\sin(n+1)\psi}{\sin\psi}.$$

6. $$\cos\varphi+\cos(\varphi+2\psi)+\cos(\varphi+4\psi)\ldots\ldots+\cos(\varphi+2n\psi)=\frac{\cos(\varphi+n\psi)\sin(n+1)\psi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

7. $$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi\ldots\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

8. $$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi\ldots+\cos n\varphi=\frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

9. $$\operatorname{cosec}\varphi\operatorname{cosec}2\varphi+\operatorname{cosec}2\varphi\operatorname{cosec}3\varphi\ldots\ldots+\operatorname{cosec}(n-1)\varphi\operatorname{cosec}n\varphi=\sin(n-1)\varphi\operatorname{cosec}\varphi^2\operatorname{cosec}n\varphi.$$

10. $$\sec\varphi\sec 2\varphi+\sec 2\varphi\sec 3\varphi\ldots+\sec(n-1)\varphi\sec n\varphi=\sin(n-1)\varphi.\sec\varphi\operatorname{cosec}\varphi.\sec n\varphi.$$

11. $$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}\ldots\ldots+\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

wo n *jede beliebige ganze Zahl seyn kann.*

Beweis. I. Es ist zu Folge (§. 316. 1.)

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta};$$ also

$$12. \begin{cases} \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} = \cot\alpha - \cot\beta, \\ \frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} = \cot\beta - \cot\gamma, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu} = \cot\mu - \cot\nu, \\ \frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha} = \cot\nu - \cot\alpha. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man (1.); denn wie leicht zu sehen, heben sich die Glieder rechterhand auf, und ihre Summe ist Null.

II. Auf dieselbe Weise, findet man die Gleichung (2.). Die Glieder rechterhand, sind $tang\,\beta - tang\,\alpha$, $tang\,\gamma - tang\,\beta \dots tang\,\nu - tang\,\mu$, $taug\,\alpha - tang\,\nu$, und ihre Summe ist ebenfalls Null.

III. Vermöge (§. 323. 9.) ist

$$13. \begin{cases} \sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta^2 - \sin\alpha^2, \\ \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin\gamma^2 - \sin\beta^2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) = \sin\nu^2 - \sin\mu^2, \\ \sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) = \sin\alpha^2 - \sin\nu^2. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die Gleichung (3.) weil sich rechterhand Alles aufhebt.

Vermöge (§. 323. 6.) ist

$$14. \begin{cases} \cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha, \\ \cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin\gamma\cos\gamma - \sin\beta\cos\beta, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu) = \sin\nu\cos\nu - \sin\mu\cos\mu, \\ \cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu) = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\nu\cos\nu. \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen, so erhält man die Gleichung (4.) weil sich wiederum rechterhand Alles aufhebt.

IV. Man setze in (3. und 4.) für die n Bogen α, β, $\gamma \dots \nu$,

$$15. \begin{cases} \beta - \alpha = \psi \text{ und } \beta + \gamma = \varphi; \\ \gamma - \beta = \psi \\ \delta - \gamma = \psi \\ \dots\dots \\ \nu - \mu = \psi, \end{cases}$$

so erhält man, wenn man die erste Gleichung links, nemlich $\beta - \alpha = \psi$ zu der darunter stehenden folgenden Gleichung $\gamma - \beta = \psi$, ferner zu den beiden folgenden $\gamma - \beta = \psi$ und $\delta - \gamma = \psi$, zu den drei, vier, fünf

folgenden etc. bis zu den $n-1$ folgenden Gleichungen, addirt, außer der Gleichung

$$16.\quad \begin{cases} \beta-\alpha = \psi \text{ selbst}, \\ \gamma-\alpha = 2\psi, \\ \delta-\alpha = 3\psi, \\ \varepsilon-\alpha = 4\psi, \\ \dots\dots\dots \\ \mu-\alpha = (n-2)\psi, \\ \nu-\alpha = (n-1)\psi. \end{cases}$$

Addirt man dagegen die Gleichung $\beta+\alpha=\varphi$ zu den nemlichen ein, zwei, drei etc. bis $n-1$ Gleichungen, so erhält man außer der Gleichung

$$17.\quad \begin{cases} \beta+\alpha = \varphi \text{ selbst} \\ \gamma+\alpha = \varphi+\psi \\ \delta+\alpha = \varphi+2\psi \\ \varepsilon+\alpha = \varphi+3\psi \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu+\alpha = \varphi+(n-3)\psi, \\ \nu+\alpha = \varphi+(n-2)\psi. \end{cases}$$

Addirt man hierauf die erste und zweite Gleichung (16.), zur ersten und zweiten (17.), die zweite und dritte (16.), zur zweiten und dritten (17.), die dritte und vierte (16.), zur dritten und vierten (18.) u. s. w., so erhält man, außer der Gleichung

$$\beta+\alpha=\varphi,$$

$$18.\quad \begin{cases} 2\gamma+2\beta=2\varphi+4\psi \text{ oder } \gamma+\beta=\varphi+2\psi, \\ 2\delta+2\gamma=2\varphi+8\psi \text{ oder } \delta+\gamma=\varphi+4\psi, \\ 2\varepsilon+2\delta=2\alpha+12\psi \text{ oder } \varepsilon+\delta=\varphi+6\psi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\nu+2\mu=2\varphi+(4n-8)\psi \text{ oder } \nu+\mu=\varphi+2(n-2)\psi. \end{cases}$$

Setzt man nun die Werthe von $\beta-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\delta-\gamma \dots \nu-\mu$ aus (15.), von $\alpha-\nu$ aus (16.), von $\beta+\alpha$, $\gamma+\beta$, $\delta+\gamma \dots \nu+\mu$ aus (18.) und von $\nu+\alpha$ aus (17.) in (3. und 4.), so erhält man

$$\sin\varphi\sin\psi+\sin(\varphi+2\psi)\sin\psi+\sin(\varphi+4\psi)\sin\psi\dots$$
$$+\sin(\varphi+2(n-2)\psi)\sin\psi-\sin(\varphi+(n-2)\psi).\sin(n-1)\psi=0,$$

und $\cos\varphi\sin\psi+\cos(\varphi+2\psi)\sin\psi+\cos(\varphi+4\psi)\sin\psi\dots$
$$+\cos(\varphi+2(n-2)\psi)\sin\varphi-\cos\varphi+(n-2)\psi\sin(n-1)\psi=0;$$

oder wenn man die letzten Glieder auf die andere Seite bringt und mit $\sin\psi$ dividirt,

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+2\psi)+\sin(\varphi+4\psi)\dots+\sin(\varphi+2(n-2)\psi)$$
$$=\frac{\sin(\varphi+(n-2)\psi)\sin(n-1)\psi}{\sin\psi} \text{ und}$$

$$\cos\varphi + \cos(\varphi + 2\psi) + \cos(\varphi + 4\psi) \ldots + \cos(\varphi + 2(n-2)\psi)$$
$$= \frac{\cos(\varphi + (n-2)\psi)\sin(n-1)\psi}{\sin\psi}.$$

Schreibt man hierin n statt $n-2$, welches nichts ändert, weil n willkührlich ist, so findet man die Gleichungen (5. und 6.).

V. Die Gleichungen (7. und 8.) folgen aus (5. und 6.) unmittelbar, wenn man $\psi = \frac{1}{2}\varphi$ setzt.

VI. Man setze in (1. und 2.) $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$, $\delta = 4\alpha$, ... $\nu = n\alpha$; so erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha\sin 4\alpha} \ldots$$
$$+ \frac{\sin\alpha}{\sin(n-1)\alpha\sin n\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin n\alpha\sin\alpha} = 0 \text{ und}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos 3\alpha\cos 4\alpha} \ldots$$
$$+ \frac{\sin\alpha}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\cos n\alpha\cos\alpha} = 0,$$

oder wenn man die letzen Glieder auf die andere Seite bringt, überall mit $\sin\alpha$ dividirt und $cosec$ statt $\frac{1}{\sin}$, sec statt $\frac{1}{\cos}$ setzt,

$$\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}2\alpha + \operatorname{cosec}2\alpha\operatorname{cosec}3\alpha \ldots + \operatorname{cosec}(n-1)\alpha\operatorname{cosec}n\alpha$$
$$= \sin(n-1)\alpha\operatorname{cosec}\alpha^2\operatorname{cosec}n\alpha,$$

und $\sec\alpha\sec 2\alpha + \sec 2\alpha\sec 3\alpha \ldots + \sec(n-1)\alpha\sec n\alpha$
$$= \sin(n-1)\alpha\sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha\sec n\alpha;$$

welches, wenn man φ statt α setzt, die Gleichungen (9. und 10.) sind.

VII. Man setze

19. $$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = z,$$

so erhält man, wenn man mit $2\cos\frac{\pi}{2n+1}$ multiplicirt,

20. $$2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} + 2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$+ 2\cos\frac{5\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} \ldots + 2\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$+ 2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = 2z\cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Vermöge der Gleichung

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) \quad (§. 323. 3.)$$

ist aber

$$21. \begin{cases} 2\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + 1, \\ 2\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{2\pi}{2n+1}, \\ 2\cos\frac{5\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{6\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-4)\pi}{2n+1}, \\ 2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1} = \cos\frac{2n\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1}, \end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen (21.), so erhält man in (20.)

$$22.\quad 1 + 2\cos\frac{2\pi}{2n+1} + 2\cos\frac{4\pi}{2n+1} + 2\cos\frac{6\pi}{2n+1}\ldots\ldots + 2\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = 2z\cos\frac{\pi}{2n+1}.$$

Da nun $\cos x = -\cos(\pi - x)$ ist, so ist

$$23. \begin{cases} \cos\frac{2\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}, \\ \cot\frac{4\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\frac{(2n-2)\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{(2n-2)\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{3\pi}{2n+1}, \\ \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\cos\left(\pi - \frac{2n\pi}{2n+1}\right) = -\cos\frac{\pi}{2n+1}, \end{cases}$$

welches, in (22.) gesetzt,

$$24.\quad 1 - 2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} - 2\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1}\ldots\ldots - 2\cos\frac{3\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1} = 2z\cos\frac{\pi}{2n+1},$$

und vermöge (19.)

$$1 - 2z + \cos\frac{\pi}{2n+1} = 2z\cos\frac{\pi}{2n+1}$$

giebt, woraus $1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} = 2z\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right)$, also

$$z = \tfrac{1}{2},$$

das heifst,

cos

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

folgt; wie in (11.).

Die Gleichung (11.) folgt auch daraus, dafs der Mittelpunct jedes regelmäfsigen Vielecks zugleich der Mittelpunct der Entfernungen seiner Ecken für beliebige Axen ist (§. 225. II.). Stellt man sich nemlich ein regelmäfsiges Vieleck von n Seiten und eine Axe durch eine Ecke vor, wie (Fig. 127. II.), so ist die Summe der Entfernungen der Ecken von der Axe RS, wenn man die Bogen von Q an rechnet, wie leicht zu sehen,

$$2\cos\frac{\pi}{2n+1}+2\cos\frac{3\pi}{2n+1}+2\cos\frac{5\pi}{2n+1}\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1};$$

denn je zwei Ecken, wie C und D, B, und E haben gleiche Entfernungen, welche also in der Summe doppelt vorkommen und die Entfernung $AM=\frac{\cos(2n+1)\pi}{2n+1}$ $=\cos\pi$ kommt nur einmal vor. Die letzte Entfernung $AM=\cos\pi$ ist $=-1$ und die Summe der Entfernungen Null. Also ist

$$2\cos\frac{\pi}{2n+1}+2\cos\frac{3\pi}{2n+1}+2\cos\frac{5\pi}{2n+1}\ldots+2\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}=1,$$

woraus, wenn man mit 2 dividirt, die Gleichung (11.) folgt.

327.

Anmerkung. Es giebt noch eine grofse Menge anderer Gleichungen zwischen den goniometrischen Linien. Die Sätze (§. 307. bis §. 326) kommen aber am häufigsten vor, und man kann daraus leicht andere, die etwa nothwendig sind, finden.

Ausdruck der goniometrischen Linien durch die Bogen, und umgekehrt.

328.

Lehrsatz. Es ist für jeden beliebigen Bogen x:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3\ldots7}+\frac{x^9}{2.3\ldots9}-\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}+\frac{x^8}{2.3\ldots8}-\ldots$$

Die Reihen rechterhand behalten die nemlichen Werthe, wenn man auch in die erste $2n\pi+x$ oder, $(2n+1)\pi-x$ und in die zweite $2n\pi\pm x$ statt x setzt, wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

Beweis. I. Es sey in (Fig. 168.)

AQ ein beliebiger Bogen im ersten Quadranten,
AFB ein beliebiger Bogen, der bis in den 2ten Quadranten reicht,
$AFHQ$ ein beliebiger Bogen, der bis in den 3ten Quadranten reicht;
$AFHGB$ ein beliebiger Bogen, der bis in den 4ten Quadranten reicht;
QB oder BQ sey ein beliebiger Bogen, der zu jedem Bogen noch hinzukommt, der aber jedesmal in dem nemlichen Quadranten bleibt, in welchem der Endpunct des vorigen Bogen liegt. QP und BV sey auf dem Durchmesser AMH senkrecht und QC mit demselben parallel. Ferner sey QR die Tangente an Q, BR die Tangente an B, so daſs RQM und RBM rechte Winkel sind.

Alsdann ist der Bogen QK die Hälfte des Bogens QB; denn die rechtwinkligen Dreiecke RQM und RBM sind wegen $QM = BM$ und $RM = RM$, gleich, folglich sind auch die Winkel RMQ und RMB und die zugehörigen Bogen QK und BK gleich.

Nun sind die rechtwinkligen Dreiecke QCB und KIM, wenn KI auf AMH senkrecht ist, ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen. Also ist

$$\frac{BC}{QB} = \frac{MI}{MK} \text{ und } \frac{QC}{QB} = \frac{KI}{MK}, \text{ oder}$$

$$1. \quad BC = QB \cdot \frac{MI}{MK} \text{ und}$$

$$2. \quad QC = QB \cdot \frac{KI}{MK}.$$

Ferner sind die rechtwinkligen Dreiecke REQ und BDR den Dreiecken QMP und BVM ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen. Also ist

$$\frac{RE}{QR} = \frac{PM}{QM}, \ \frac{QE}{QR} = \frac{QP}{QM} \text{ und}$$
$$\frac{BD}{RB} = \frac{VM}{BM}, \ \frac{RD}{RB} = \frac{BV}{BM},$$

oder, weil die Halbmesser QM und BM dem Halbmesser MK gleich sind,

$$3. \quad RE = QR \cdot \frac{PM}{MK}, \qquad 4. \quad QE = QR \cdot \frac{QP}{MK},$$

$$5. \quad BD = RB \cdot \frac{VM}{MK}, \qquad 6. \quad RD = RB \cdot \frac{BV}{MK}.$$

Es ist $RE + BD = BC$ und $QE + RD = QC$. Desgleichen ist $QR = RB$, also, wenn man (3.) und (5.), und (4.) und (6.) addirt,

$$7. \quad BC = QR \cdot \frac{PM + VM}{MK} \text{ und}$$

$$8. \quad QC = QR \cdot \frac{QP + BV}{MK}.$$

Nun liegt der Punct I nothwendig immer zwischen P und V, weil K zwischen Q und B liegt. Also ist

$$9. \quad MI < PM;$$

Desgleichen ist nothwendig

$$10. \quad KI < BV.$$

Daraus folgt, vermöge (1.) und (2.),

$$11.\quad BC < QB.\frac{PM}{MK},$$

$$12.\quad QC < QB.\frac{BV}{MK}.$$

Ferner ist

$$13.\quad PM > VM \text{ und}$$

$$14.\quad BV > QP;$$

woraus vermöge (7.) und (8.)

$$15.\quad BC > QR.\frac{VM + VM}{MK} > 2\,QR.\frac{VM}{MK} \text{ und}$$

$$16.\quad QC > QR.\frac{QP + QP}{MK} > 2\,QR.\frac{QP}{MK}$$

folgt.

Nun ist ferner die Sehne QB kürzer als der Bogen $QKB = k$ und die Tangente $QR = RB$ länger als der Bogen $QK = BK = \frac{1}{2}k$, oder $2\,QR$ länger als k (§. 304.). Daraus folgt in (11.) und (12.) um so mehr:

$$17.\quad BC < k.\frac{PM}{MK} \text{ und}$$

$$18.\quad QC < k.\frac{BV}{MK};$$

und in (15.) und (16.) um so mehr:

$$19.\quad BC > k.\frac{VM}{MK} \text{ und}$$

$$20.\quad QC > k\,\frac{QP}{MK}.$$

Die Länge der Linie BC liegt also, zu Folge (17.) und (19.), wenn man den Halbmesser MK gleich 1 setzt, zwischen $k.PM$ und $k.VM$, und die Länge der Linie QC, zu Folge (18.) und (20.), zwischen $k.BV$ und $k.QP$. Man kann daher

$$21.\quad BC = k.MU \text{ und}$$

$$22.\quad QC = k.NS$$

setzen, wenn U und N irgendwo zwischen P und V liegen.

Alles dieses bleibt das Nemliche, wenn auch zu dem Bogen x noch eine beliebige Zahl von Umfängen 2π hinzukommt oder davon hinweggenommen wird.

Nun ist

23. im ersten und vierten Quadranten $BC = \sin(x+k) - \sin x$,
im zweiten und dritten Quadranten $BC = -(\sin(x+k) - \sin x)$
und
im ersten und zweiten Quadranten $QC = -(\cos(x+k) - \cos x)$
im dritten und vierten Quadranten $QC = \cos(x+k) - \cos x$.

Bezeichnet man die Bogen AX und AS, deren Sinus den Durchmesser AMH in U und N schneiden, und die also nothwendig zwischen x und $x+k$ liegen, weil U und N zwischen P und V fallen, durch $x + k_1$ und $x + k_2$, so ist

24. im ersten und vierten Quadranten $MU = +\cos(x+k_1)$,
im zweiten und dritten Quadranten $MU = -\cos(x+k_1)$;
und
im ersten und zweiten Quadranten $NS = +\sin(x+k_2)$
im dritten und vierten Quadranten $NS = -\sin(x+k_2)$.

Es ist also vermöge (23.), (24.) und (21.), (22.) immer

$$25.\quad \sin(x+k) - \sin x = +k\cos(x+k_1) \text{ und}$$
$$26.\quad \cos(x+k) - \cos x = -k\sin(x+k_2),$$

oder

$$27.\quad \frac{\sin(x+k)-\sin x}{k} = +\cos(x+k_1),$$
$$28.\quad \frac{\cos(x+k)-\cos x}{k} = -\sin(x+k_2);$$

welche Ausdrücke folglich für alle vier Quadranten zugleich, und mithin, weil auch noch beliebige Umfänge hinzugethan oder hinweggenommen werden können, für alle mögliche Bogen x, so grofs oder so klein sie seyn mögen, desgleichen für alle beliebige Bogen k, die zu x gethan nicht über den Quadranten hinausschreiten, in welchem sich der Endpunct von x befindet, uneingeschränkt gelten. Die Bogen k_1 und k_2 liegen nothwendig immer zwischen o und k.

II. Nun setze man, nach der Methode der unbestimmten Coefficienten,

$$29.\quad \sin x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \ldots \text{ und}$$
$$30.\quad \cos x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 \ldots$$

Lassen sich für die unbestimmten Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Werthe finden, die den Bedingungen der Aufgabe genugthun, so finden die vorausgesetzten Reihen Statt.

Es ist für jeden beliebigen Bogen x,

$$31.\quad \sin(-x) = -\sin x \text{ und}$$
$$32.\quad \cos(-x) = +\cos x.$$

Setzt man daher in (29.) und (30.) $-x$ statt $+x$, so erhält man

$$\alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 \ldots$$
$$= -\alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^3 - \alpha_4 x^4 - \alpha_5 x^5 \ldots \text{ und}$$
$$\beta_0 - \beta_1 x + \beta_2 x^2 - \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 - \beta_5 x^5 \ldots$$
$$= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 \ldots,$$

welches

$$2\alpha_0 + 2\alpha_2 x^2 + 2\alpha_4 x^4 + 2\alpha_6 x^6 \ldots = 0 \text{ und}$$
$$2\beta_1 x + 2\beta_3 x^3 + 2\beta_5 x^5 + 2\beta_7 x^7 \ldots = 0$$

giebt. Hieraus folgt nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten (Rechenkunst §. 213.)

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_6 = 0 \ldots$$
$$\beta_1 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_5 = 0,\ \beta_7 = 0 \ldots$$

In $\sin x$ sind daher die Coefficienten aller Potestäten von x mit graden Exponenten und in $\cos x$ die Coefficienten aller Potestäten von x mit ungraden Exponenten gleich Null, und es ist folglich in (29. und 30.) blos

$$33.\quad \sin x = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \ldots$$
$$34.\quad \cos x = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \ldots$$

Nun setze man $x + k$ statt x, welches angeht, weil die vorausgesetzten Reihen für jeden beliebigen Werth von x gelten, so erhält man

$$\sin(x+k) = \alpha_1(x+k) + \alpha_3(x+k)^3 + \alpha_5(x+k)^5 \ldots$$
$$\cos(x+k) = \beta_0 + \beta_2(x+k)^2 + \beta_4(x+k)^4 \ldots,$$

oder, wenn man die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz (Rechenkunst §. 224.) entwickelt,

$$35.\quad \sin(x+k) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \ldots$$
$$+ k(\alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \ldots)$$
$$+ k^2(3\alpha_3 x + 10\alpha_5 x^3 + 21\alpha_7 x^5 \ldots)$$
$$+ k^3(\alpha_3 + 10\alpha_5 x^2 + 35\alpha_7 x^4 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$36.\quad \cos(x+k) = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \ldots$$
$$+ k(2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 \ldots)$$
$$+ k^2(\beta + 6\beta_4 x^2 + 15\beta_6 x^4 \ldots)$$
$$+ k^3(4\beta_4 x + 20\beta^6 x^3 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die obersten Reihen rechterhand in (35. und 36.) sind $\sin x$ und $\cos x$ selbst. Bezeichnet man, der Kürze wegen, in den übrigen Reihen

$$37.\quad \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \ldots \text{ durch } p_1,$$
$$3\alpha_3 x + 10\alpha_5 x^3 + 21\alpha_7 x^5 \ldots \text{ durch } p_2,$$
$$\alpha_3 + 10\alpha_5 x^2 + 35\alpha_7 x^4 \ldots \text{ durch } p_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ und}$$

$$38.\quad 2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 \ldots \text{ durch } q_1,$$
$$\beta_2 + 6\beta_4 x^2 + 15\beta_6 x^3 \ldots \text{ durch } q_2,$$
$$4\beta_4 x + 20\beta_6 x^3 \ldots \text{ durch } q_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man in (35.) und (36.)

$$39.\quad \sin(x+k) = \sin x + p_1 k + p_2 k^2 + p_3 k^3 \ldots;$$
$$40.\quad \cos(x+k) = \cos x + q_1 k + q_2 k^2 + q_3 k^3 \ldots,$$

wo die Gröfsen $p_1, p_2, p_3 \ldots q_1, q_2, q_3 \ldots$ (37.) und (38.) kein k mehr, sondern nur noch x und die ebenfalls von k nicht abhängenden unbestimmten Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots$ enthalten.

Aus (39. und 40.) folgt

$$41.\quad \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = p_1 + p_2 k + p_3 k^2 \ldots \text{ und}$$

$$42.\quad \frac{\cos(x+k) - \cos x}{k} = q_1 + q_2 k + q_3 k^2 \ldots,$$

für jeden beliebigen Werth von x und k.

Nun war in (I.), ebenfalls für jeden beliebigen Werth von x und k, nemlich in (27.) und (28.),

$$\frac{\sin(x+k) - \sin k}{k} = + \cos(x+k_1) \text{ und}$$

$$\frac{\cos(x+k) - \sin k}{k} = - \sin(x+k_2):$$

also ist

$$43.\quad +\cos(x+k_1) = p_1 + p_2 k + p_3 k^2 \ldots \text{ und}$$
$$44.\quad -\sin(x+k_2) = q_1 + q_2 k + q_3 k^2 \ldots$$

wo k_1 und k_2 zwei Bogen sind, die nothwendig, was auch x und k seyn mögen, *zwischen* o und k liegen.

Da nun die Ausdrücke (43.) und (44.) für *jeden beliebigen* Werth von k gelten, unter der einzigen Bedingung, dafs die Bogen x und $x+k$ ihre Endpuncte in einem und demselben Quadranten haben, so gelten sie auch für $k=0$, welches dieser Bedingung entspricht. Wenn aber $k=0$ ist, so sind nothwendig auch k_1 und k_2 gleich Null, weil k_1 und k_2 immer *zwischen* o und k liegen.

Also geben die Ausdrücke (43.) und (44.), für $k = o$,

$$45. \quad \cos x = + p_1 \text{ und}$$
$$46. \quad \sin x = - q_1;$$

das heifst, wenn man aus (37.) und (38.) die Werthe von p_1 und q_1 setzt:

$$47. \quad \cos x = + \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \ldots,$$
$$48. \quad \sin x = - 2\beta_2 x - 4\beta_4 x^3 - 6\beta_6 x^5 - 8\beta_8 x^7 \ldots$$

Man setze in diese neuen Ausdrücke von $\cos x$ und $\sin x$ abermals $x + k$ statt x, welches wiederum angeht, weil die Ausdrücke immer für jeden beliebigen Werth von x gelten, so erhält man

$$+\cos(x+k) = \alpha_1 + 3\alpha_3(x+k)^2 + 5\alpha_5(x+k)^4 \ldots$$
$$-\sin(x+k) = 2\beta_2(x+k) + 4\beta_4(x+k)^3 + 6\beta_6(x+k)^5 \ldots;$$

oder, wenn man wiederum die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$49. \quad +\cos(x+k) = \alpha_1 + 3\alpha_3 x^2 + 5\alpha_5 x^4 + 7\alpha_7 x^6 \ldots$$
$$+ k\,(2.3\alpha_3 x + 4.5\alpha_5 x^3 + 6.7\alpha_7 x^5 \ldots)$$
$$+ k^2\,(3\alpha_3 + 10.5\alpha_5 x^2 + 15.7\alpha_7 x^4 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$50. \quad -\sin(x+k) = 2\beta_2 x + 4\beta_4 x^3 + 6\beta_6 x^5 + 8\beta_8 x^7 \ldots$$
$$+ k\,(2\beta_2 + 3.4\beta_4 x^2 + 5.6\beta_6 x^4 + 7.8\beta_8 x^6 \ldots)$$
$$+ k^2\,(3.4\beta_4 x + 10.6\beta_6 x^3 + 21.8\beta_8 x^5 \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die obersten Reihen rechterhand sind nach (47.) und (48.) $\cos x$ und $-\sin x$ selbst. Bezeichnet man für die übrigen Reihen, der Kürze wegen,

$$51. \quad 2.3\alpha_3 x + 4.5\alpha_5 x^3 + 6.7\alpha_7 x^5 \ldots \text{ durch } P_1$$
$$3\alpha_3 + 10.5\alpha_5 x^2 + 15.7\alpha_7 x^4 \ldots \text{ durch } P_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$52. \quad 2\beta_2 + 3.4\beta_4 x^2 + 5.6\beta_6 x^4 \ldots \text{ durch } Q_1$$
$$3.4\beta_4 x + 10.6\beta_6 x^3 \ldots \text{ durch } Q_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so erhält man in (49.) und (50.)

$$53. \quad +\cos(x+k) = +\cos x + P_1 k + P_2 k_2 \ldots,$$
$$54. \quad -\sin(x+k) = -\sin x + Q_1 k + Q_2 k_2 \ldots;$$

wo die Gröfsen $P_1, P_2 \ldots Q_1, Q_2$ wiederum kein k enthalten.

Es folgt aus (53.) und (54.)

$$55. \quad \frac{\cos(x+k) - \cos x}{k} = P_1 + P_2 k + P_3 k^2 \ldots \text{ und}$$

$$56. \quad \frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = - Q_1 - Q_2 k - Q_3 k^2 \ldots,$$

für jeden beliebigen Werth von x und k.

Setzt man diese Ausdrücke wiederum denen (28.) und (27.) in (I.) gleich, so erhält man

$$57. \quad -\sin(x+k_2) = + P_1 + P_2 k + P_3 k^2 \ldots \text{ und}$$
$$58. \quad +\cos(x+k_1) = - Q_1 - Q_2 k - Q_3 k_2 \ldots;$$

für jeden Werth von k.

Für $k = o$ ist, wie oben, $k_2 = o$ und $k_1 = o$; also

$$59. \quad -\sin x = + P_1 \text{ und}$$
$$60. \quad +\cos x = - Q_1$$

das heifst, wenn man aus (51.) und (52.) die Werthe von P_1 und Q_1 setzt,

$$61.\quad -\sin x = 2.3\,\alpha_3 x + 4.5\,\alpha_5 x^3 + 6.7\,\alpha_7 x^5 \ldots\ldots \text{ und}$$

$$62.\quad -\cos x = +2\beta_2 + 3.4\,\beta_4 x^2 + 5.6\,\beta_6 x^4 \ldots\ldots$$

Es war aber

$$\sin x = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 \ldots\ldots (33.) \text{ und}$$
$$\cos x = \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 \ldots\ldots (34.).$$

Also ist

$$63.\quad \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \alpha_7 x^7 \ldots\ldots$$
$$= -2.3\,\alpha_3 x - 4.5\,\alpha_5 x^3 - 6.7\,\alpha_7 x^5 - 8.9\,\alpha_9 x^7 \ldots\ldots \text{ und}$$

$$64.\quad \beta_0 + \beta_2 x^2 + \beta_4 x^4 + \beta_6 x^6 \ldots\ldots$$
$$= -2\beta_2 - 3.4\,\beta_4 x^2 - 5.6\,\beta_6 x^4 - 7.8\,\beta_8 x^6 \ldots\ldots$$

Da nun nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten, die Coefficienten zu gleichen Potestäten von x einzeln gleich seyn müssen (Rechenkunst §. 215.), so folgt hieraus

$$65.\quad \begin{cases} \alpha_1 = -2.3\,\alpha_3, \text{ also } \alpha_3 = -\dfrac{\alpha_1}{2.3} \\ \alpha_3 = -4.5\,\alpha_5, \text{ also } \alpha_5 = -\dfrac{\alpha_3}{4.5} = +\dfrac{\alpha_1}{2.3.4.5} \\ \alpha_5 = -6.7\,\alpha_7, \text{ also } \alpha_7 = -\dfrac{\alpha_5}{6.7} = -\dfrac{\alpha_1}{2.3.4.5.6.7} \\ \alpha_7 = -8.9\,\alpha_9, \text{ also } \alpha_9 = -\dfrac{\alpha_7}{8.9} = +\dfrac{\alpha_1}{2.3\ldots9} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$66.\quad \begin{cases} \beta_0 = -2\beta_2, \text{ also } \beta_2 = -\dfrac{\beta_0}{2} \\ \beta_2 = -3.4\,\beta_4, \text{ also } \beta_4 = -\dfrac{\beta_2}{3.4} = +\dfrac{\beta_0}{2.3.4} \\ \beta_4 = -5.6\,\beta_6, \text{ also } \beta_6 = -\dfrac{\beta_4}{5.6} = -\dfrac{\beta_0}{2.3\ldots.6} \\ \beta_6 = -7.8\,\beta_8, \text{ also } \beta_8 = -\dfrac{\beta_6}{7.8} = +\dfrac{\beta_0}{2.3\ldots.8} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Mithin ist in (33.) und (34.)

$$67.\quad \sin x = \alpha_1 x - \frac{\alpha_1}{2.3}x^3 + \frac{\alpha_1}{2.3.4.5}x^5 - \frac{\alpha_1}{2.3\ldots7}x^7 + \frac{\alpha_1}{2.3\ldots9}x^9 \ldots\ldots$$

$$68.\quad \cos x = \beta_0 - \frac{\beta_0}{2}x^2 + \frac{\beta_0}{2.3.4}x^4 - \frac{\beta_0}{2.3\ldots6}x^6 + \frac{\beta_0}{2.3\ldots8}x^8 \ldots\ldots$$

wo nur noch die beiden Coefficienten α_1 und β_0 zu finden sind. Der Ausdruck von $\sin x$ (67.) giebt

$$69.\quad \frac{\sin x}{x} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1}{2.3}x^2 + \frac{\alpha_1}{2.3.4.5}x^4 \ldots\ldots$$

Nun war

$$\frac{\sin(x+k) - \sin x}{k} = \cos(x + k_1) \quad (27.),$$

wo k_1 zwischen o und k liegt. Da dieser Ausdruck für jeden Werth von x gilt, so gilt er auch für $x = 0$. In diesem Falle giebt aber derselbe

$$\frac{\sin k}{k} = \cos k_1;$$

für jeden Werth von k, der nicht gröfser ist als ein Quadrant. Setzt man $k = 0$, so ist auch $k_1 = 0$, weil k_1 immer zwischen 0 und k liegt; also ist

$$\frac{\sin k}{k} = \cos 0 = 1 \text{ für } k = 0,$$

oder auch, wenn man x statt k schreibt,

$$70. \quad \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ für } x = 0.$$

In (69.) ist aber für $x = 0$, $\frac{\sin x}{x} = \alpha_1$. Also ist

$$71. \quad \alpha_1 = 1;$$

welches der eine der beiden fehlenden Coefficienten ist.

Ferner giebt der Ausdruck (68.) für $x = 0$, $\cos 0 = 1 = \beta_0$: also ist

$$72. \quad \beta_0 = 1,$$

welches der andere Coefficient β_0 ist.

Es ist daher in (67. und 68.) vollständig:

$$73. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} + \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \ldots \text{ und}$$

$$74. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3\ldots6} + \frac{x^8}{2.3\ldots8} - \ldots$$

für jeden beliebigen Werth von x; wie im Lehrsatze.

Da $\sin x = \sin(2n\pi + x) = \sin((2n+1)\pi - x)$ und $\cos x = \cos(2n\pi \pm x)$ ist (§. 317.), so behalten die Reihen rechterhand den nemlichen Werth, wenn man in die erste $2n\pi + x$ oder $(2n+1)\pi - x$ und in die zweite $2n\pi + x$ oder $2n\pi - x$ statt x setzt.

329.

Zusatz. Wenn e die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme 1 ist, so ist

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots \text{ (Rechenkunst §. 235, IV. 6.)}$$

Setzt man hierin $+ix$ und $-ix$ statt x, wo

$$i = \sqrt{-1}$$

ist, so erhält man

$$2. \quad e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^3x^3}{2.3} + \frac{i^4x^4}{2.3.4} + \frac{i^5x^5}{2.3\ldots5} + \frac{i^6x^6}{2.3\ldots6} - \ldots$$

$$3. \quad e^{-ix} = 1 - ix + \frac{i^2x^2}{2} - \frac{i^3x^3}{2.3} + \frac{i^4x^4}{2.3.4} - \frac{i^5x^5}{2.3\ldots5} + \frac{i^6x^6}{2.3\ldots6} - \ldots$$

Dieses giebt, wenn man addirt und subtrahirt,

$$4. \quad e^{+ix} + e^{-ix} = 2\left(1 + \frac{i^2x^2}{2} + \frac{i^4x^4}{2.3.4} + \frac{i^6x^6}{2.3\ldots6} + \frac{i^8x^8}{2.3\ldots8} \ldots\right) \text{ und}$$

$$5. \quad e^{+ix} - e^{-ix} = 2i\left(x + \frac{i^2x^3}{2.3} + \frac{i^4x^5}{2.3\ldots5} + \frac{i^6x^7}{2.3\ldots7} + \frac{i^8x^9}{2.3\ldots9} \ldots\right)$$

Nun ist $i^2 = -1$, $i^4 = +1$, $i^6 = -1$, $i^8 = +1$ etc. (Rechenkunst §. 255.) Also ist

$$6.\quad \frac{e^{+ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^6}{2.3\ldots6} + \frac{x^8}{2.3\ldots8} - \ldots\ldots$$

$$7.\quad \frac{e^{+ix}-e^{-ix}}{2i} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3\ldots5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7} + \frac{x^9}{2.3\ldots9} - \ldots\ldots$$

Die nemlichen Reihen waren cos x und sin x. (§. 328. 73. und 74.) *Also ist*

$$8.\quad \cos x = \frac{e^{+ix}+e^{-ix}}{2} \text{ und}$$

$$9.\quad \sin x = \frac{e^{+ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

330.

Anmerkung. Die Gleichungen (8.) und (9.) (§. 329.) sind dieselben, von welchen in der Rechenkunst, im zehnten Abschnitt, die Entwickelung der dort ohne Rücksicht auf ihre geometrische Bedeutung durch $\sin x$ und $\cos x$ bezeichneten Gröſsen ausging, so daſs also die gegenwärtige Entwickelung gleichsam der Rückweg ist.

Will man daher die Goniometrie analytisch abhandeln, so ist (§. 328.) der Fundamental-Satz, und der Gang ist folgender.

Zuerst definirt man die goniometrischen Linien nach einer Figur, wie hier oben (§. 309.) und weiset sie in der Figur für Bogen von beliebiger Gröſse nach. Sodann folgt der Satz (§. 315.) von den gegenseitigen Verhältnissen der goniometrischen Linien eines und desselben Bogens, und hierauf sogleich der Fundamental-Satz (§. 328.). Nachdem aus demselben die Ausdrücke (8.) und (9.) (§. 329.) gefunden sind, läſst sich aus diesen allein Alles übrige von (§. 316.) bis (§. 328.) ohne weitere Hülfe der Figur finden; wie in der Rechenkunst, im zehnten Abschnitt zu sehen, wo aus den Gleichungen (8. und 9.) (§. 329.) allein, und ohne Figur, die vorzüglichsten Sätze von (§. 316. und 312. III.), die auch die übrigen geben, wirklich entwickelt worden sind. Daſs auch der Satz (§. 321.) auf diesem Wege ohne Figur sich finden lasse, wird sich weiter unten zeigen *).

---

*) Zu bemerken ist, daſs wiederum bei dem Beweise des Satzes (§. 328.), der ein Gegenstand der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung zu seyn pflegt, wie man sieht, das Unendlichkleine oder sonst Höheres gar nicht vorkommt, sondern daſs der Satz ganz einfach und natürlich, blos aus Elementen der Geometrie, vermittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten gefunden wird, welches beispielsweise abermals den Beweis giebt, daſs die sogenannte höhere Rechnung in der That nichts weiter ist, als gewöhnliche Algebra.

331.

Lehrsatz. *Es ist für jeden beliebigen Bogen* x:

$$tang\,x = x + \frac{2x^3}{2.3} + \frac{16x^5}{2.3.4.5} + \frac{272x^7}{2.3.4.5.6.7} \ldots$$

$$cot\,x = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2 5} - \frac{2x^6}{3^3.5.7} - \frac{x^8}{3^3.5^2.7} - \frac{2x^{10}}{3^5.5.7.9.11} \ldots\right).$$

Der Beweis liegt in der Entwickelung dieser Ausdrücke (Rechenkunst §. 266.).

Reihen für $sec\,x$ und $cosec\,x$ kann man auf ähnliche Art finden.

332.

Lehrsatz. *Die Ausdrücke der natürlichen Logarithmen von* $cos\,x$ *und* $sin\,x$, *nemlich* ${}^e cos\,x$ *und* ${}^e sin\,x$, *sind folgende:*

$${}^e cos\,x = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{2.3.4} + \frac{16x^6}{2.3\ldots6} + \frac{272x^8}{2.3\ldots8} \ldots\right).$$

$${}^e sin\,x = {}^e x - \left(\frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2^2.3^2.5} + \frac{x^6}{3^4.5.7.9} + \frac{x^8}{3^4.5^2.7.8} \ldots\right).$$

Der Beweis liegt in der Entwickelung (Rechenkunst §. 268.).

Die Logarithmen von $tang\,x$ und $cot\,x$ findet man, wenn man die Logarithmen von $sin\,x$ und $cos\,x$ von einander abzieht, weil $tang\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$ und $cot\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x}$. Die Logarithmen von $sec\,x$ und $cosec\,x$ sind den Logarithmen von $cos\,x$ und $sin\,x$, negativ genommen, gleich, weil $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$ und $cosec\,x = \frac{1}{sin\,x}$, also ${}^e sec\,x = {}^e 1 - {}^e cos\,x = 0 - {}^e cos\,x = -{}^e cos\,x$ und ${}^e cosec\,x = {}^e 1 - {}^e sin\,x = 0 - {}^e sin\,x = -{}^e sin\,x$ ist.

333.

Lehrsatz. *Es ist für jeden beliebigen Bogen* x *im ersten positiven und im ersten negativen Quadranten:*

$$x = sin\,x + \frac{1}{2.3}sin\,x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}sin\,x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}sin\,x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}sin\,x^9 \ldots$$

$$\pm x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(cos\,x + \frac{1}{2.3}cos\,x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}cos\,x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}cos\,x^7 + \ldots\right)$$

$$x = tang\,x - \frac{tang\,x^3}{3} + \frac{tang\,x^5}{5} - \frac{tang\,x^7}{7} + \frac{tang\,x^9}{9} - \ldots$$

Beweis. Man setze der Kürze wegen

$$1. \quad sin\,x = s,$$

und nach der Methode der unbestimmten Coefficienten,

$$2. \quad x = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 \ldots,$$

wo es nun darauf ankommt, die Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ zu finden.

Da gleiche positive und negative Bogen gleiche positive und negative Sinus haben, so erhält man, wenn man $-s$ statt s setzt,

$$3. \quad -x = \alpha_0 - \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 \ldots;$$

also ist

$$+\alpha_0 - \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 + \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 + \ldots$$
$$= -\alpha_0 - \alpha_1 s - \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^3 - \alpha_4 s^4 - \alpha_5 s^5 - \ldots,$$

woraus

$$2(\alpha_0 + \alpha_2 s^2 + \alpha_4 s^4 + \alpha_6 s^6 \ldots) = 0,$$

und nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten,

$$4. \quad \alpha_0 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_4 = 0, \ \alpha_6 = 0 \ldots$$

folgt.

Es ist daher in (2.) blos

$$5. \quad x = \alpha_1 s + \alpha_3 s^3 + \alpha_5 s^5 + \alpha_7 s^7 \ldots$$

Nun setze man den zum Bogen $x + k$ gehörigen Sinus gleich $s + z$, so ist vermöge (5.)

$$6. \quad x + k = \alpha_1 (s + z) + \alpha_3 (s + z)^3 + \alpha_5 (s + z)^5 \ldots,$$

oder, wenn man die einzelnen Glieder rechterhand nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt,

$$7. \quad \begin{aligned} x + k = {} & \alpha_1 s + \alpha_3 s^3 + \alpha_5 s^5 + \alpha_7 s^7 \ldots \\ & + z\,(\alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 \ldots) \\ & + z^2 (\quad + 3\alpha_3 s + 10\alpha_5 s^3 + 21\alpha_7 s^5 \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die oberste Reihe rechterhand ist x selbst. Es hebt sich also in (7.) x auf beiden Seiten, und man erhält, wenn man der Kürze wegen,

$$8. \quad \begin{aligned} & \alpha_1 + 3\alpha_3 s^2 + 5\alpha_5 s^4 + 7\alpha_7 s^6 \ldots \text{ durch } p_1, \\ & 3\alpha_3 s + 10\alpha_5 s^3 + 21\alpha_7 s^5 \ldots \text{ durch } p_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

bezeichnet, wo die Gröfsen $p_1, p_2 \ldots$, wie man sieht, weiter kein z, sondern nur s enthalten,

$$9. \quad k = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 \ldots,$$

woraus

$$10. \quad \frac{k}{z} = p_1 + p_2 z + p_3 z^2 \ldots$$

folgt.

Da $\sin x = s$ und $\sin(x + k) = s + z$ war, so ist

$$z = \sin(x + k) - \sin x;$$

also ist die Gleichung (10.), so viel als

$$11. \quad \frac{k}{\sin(x+k) - \sin x} = p_1 + p_2 (\sin(x+k) - \sin x) + p_3 (\sin(x+k) - \sin x)^2 \ldots;$$

für jeden beliebigen Bogen x und k.

II. Nun ist vermöge (27. §. 328.)

$$12. \quad \frac{k}{\sin(x+k) - \sin x} = \frac{1}{\cos(x + k_1)},$$

ebenfalls für beliebige x und beliebige k, in dem nemlichen Quadranten, unter der Bedingung, dafs der Bogen k_1 zwischen 0 und k liegt.

Es ist also vermöge (11.) und (12.)

$$13. \quad \frac{1}{\cos(x + k_1)} = p_1 + p_2 (\sin(x+k) - \sin x) + p_3 (\sin(x+k) - \sin x)^2 \ldots$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von k gilt, so gilt sie auch für $k=0$. Dann aber ist auch k_1 Null, weil k_1 zwischen 0 und k liegt. Also ist für $k=0$ in (13.), weil alsdann auch $\sin(x+k)-\sin x=0$ ist,

$$14.\quad \frac{1}{\cos x}=p_1;$$

oder da $\cos x=\sqrt{(1-\sin x^2)}$ ist,

$$15.\quad \frac{1}{\sqrt{(1-\sin x^2)}}=p_1,$$

oder, wenn man den Werth von p_1 aus (8.) setzt, und für $\sin x$ wieder s schreibt,

$$16.\quad \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)}}=\alpha_1+3\alpha_3 s^2+5\alpha_5 s^4+7\alpha_7 s^6 \ldots$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{(1-s^2)}}$ so viel als $(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}$. Entwickelt man diese Wurzel-Gröfse nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man

$$(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}=1+(-\tfrac{1}{2}).(-s^2)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}(-s^2)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2.3}(-s^2)^3 \ldots,$$

oder

$$17.\quad (1-s^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}s^2+\frac{1.3}{2.4}s^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}s^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}s^8\ldots$$

Es ist also, zu Folge (16.):

$$18.\quad 1+\tfrac{1}{2}s^2+\frac{1.3}{2.4}s^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}s^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}s^8\ldots$$
$$=\alpha_1+3\alpha_3 s^2+5\alpha_5 s^4+\ 7\alpha_7 s^6+\ 9\alpha_9 s^8\ldots$$

Da nun, nach den Regeln der unbestimmten Coefficienten, die Coefficienten gleicher Potestäten der willkürlichen Gröfse gleich sind, so ist

$$19.\quad \begin{cases} \alpha_1=1; \\ 3\alpha_3=\frac{1}{2}, \text{ also } \alpha_3=\frac{1}{2.3}; \\ 5\alpha_5=\frac{1.3}{2.3}, \text{ also } \alpha_5=\frac{1.3}{2.4.5}; \\ 7\alpha_7=\frac{1.3.5}{2.4.6}, \text{ also } \alpha_7=\frac{1.3.5}{2.4.6.7}; \\ 9\alpha_9=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}, \text{ also } \alpha_9=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mithin ist zu Folge (5.)

$$20.\quad x=s+\frac{1}{2.3}s^3+\frac{1.3}{2.4.5}s^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}s^7\ldots$$

oder

$$21.\quad x=\sin x+\frac{1}{2.3}\sin x^3+\frac{1.3}{2.4.5}\sin x^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\sin x^9\ldots;$$

wie im Lehrsatz.

III. Die Reihe (21.) giebt nur die positiven Bogen im *ersten* und die negativen Bogen im *vierten* Quadranten. In der That giebt sie, wenn $\sin x = 0$ ist, Null, also obgleich auch $\sin m\pi = \sin 0$ ist, wo m eine beliebige ganze Zahl seyn kann, nicht $m\pi$, sondern *nur* Null. Nun wächst in der Gleichung (21.) x nur so lange $\sin x$ wächst, also nur von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$. Ueber $\frac{1}{2}\pi$ hinaus nimmt $\sin x$ wieder ab, und folglich in der Gleichung (21.) auch x. Mithin giebt die Gleichung keinen *gröfsern* Bogen als $\frac{1}{2}\pi$ und folglich nur die *positiven* Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Eben so nimmt, wenn x negativ ist, x, in der Gleichung ab, so lange $\sin x$ abnimmt, also bis $x = -\frac{1}{2}\pi$. Da über $-\frac{1}{2}\pi$ hinaus $\sin x$ wieder zunimmt, so giebt die Gleichung auch nur die *negativen* Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Der Grund dieser Einschränkung liegt *in der Voraussetzung* (2.) oder (5.). In derselben hat x nur dann *verschiedene* Werthe, wenn s *verschiedene* Werthe hat. Deshalb gilt die Gleichung nur in dem Umfange *eines* positiven und *eines* negativen Quadranten; denn darüber hinaus gehören zu den *nemlichen s andere x*; welches die *vorausgesetzte* Gleichung *nicht* ausdrückt: und da zugleich in (5.) x Null ist, wenn s Null ist, so gilt die Gleichung nur für den *ersten* positiven und für den *ersten* negativen Quadranten.

Will man daher zu dem Sinus eines gröfsern Bogens, den Bogen berechnen, so mufs man den *ihm gleichen* Sinus im ersten positiven oder negativen Quadranten nehmen, und den Bogen, welcher zwischen beiden gleichen Sinus liegt, wieder zu, oder abrechnen. Liegt z. B. der gegebene Sinus im zweiten Quadranten, so ist der Bogen, welchen die Reihe giebt, das Complement des gesuchten Bogens; denn zu einem, dem Complement gleichen Bogen gehört der dem gegebenen gleiche Sinus im ersten Quadranten.

IV. Setzt man in die Reihe (21.) $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x für ein positives x und $\frac{1}{2}\pi + x$ für ein negatives x, welche beiden Bogen ebenfalls noch im ersten positiven und im ersten negativen Quadranten liegen, so dafs für sie der Ausdruck (21.) noch pafst, so erhält man, weil $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ und $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ ist,

$$22. \quad \pm x = \tfrac{1}{2}\pi - \cos x - \frac{1}{2.3}\cos x^3 - \frac{1.3}{2.4.5}\cos x^5 \ldots;$$

wie im Lehrsatz.

V. Der Beweis des Ausdrucks von x durch $\tang x$ befindet sich in Rechenkunst (§. 267.).

334.

Zusätze. I. Die obigen Ausdrücke für die goniometrischen Linien dienen zur Berechnung von Tafeln dieser Linien und ihrer Logarithmen, worüber das Nöthigste in (Rechenkunst §. 269.) steht.

II. Aus den Ausdrücken der Bogen durch die Sinus und die Tangenten (§. 333.) findet man auch die Zahl π, das heifst den Kreis-Umfang für den Durchmesser 1. Setzt man z. B. in

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\sin x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin x^7 \ldots$$

$\sin w = \frac{1}{2}$, welcher Sinus dem Bogen $\frac{1}{6}\pi$ angehört, so erhält man $\frac{1}{6}\pi$, oder wenn man mit 6 multiplicirt,

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} \ldots\right)$$

welche Reihe sich ziemlich stark nähert.

Stärker convergirende Ausdrücke von π findet man durch den Ausdruck des Bogens durch die Tangente. Das Nöthigste davon steht in (Rechenkunst §. 267.).

Die Zahl π ist, wie in Rechenkunst (§. 267.) bemerkt, ungemein genau berechnet worden. Weiter unten, in der Zusammenstellung (§. 345.) ist sie auf 127 Decimalstellen angegeben.

Auch findet man daselbst einige von den Brüchen die derselben immer näher kommen und die durch Kettenbrüche gefunden werden. Desgleichen eine andere Reihe von Brüchen für π, deren Glieder sehr stark abnehmen.

Der Cotesische und Moivresche Lehrsatz.

335.

Lehrsatz. *Wenn a eine beliebige Linie, x einen beliebigen Bogen und n eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so ist*

1. $a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$

$$= \left(a^2 - 2a\cos\frac{x}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{n} + 1\right)$$
$$\times\left(a^2 - 2a\cos\frac{6\pi+x}{n} + 1\right)\ldots\ldots\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi+x}{n} + 1\right).$$

2. $a^{4n} - 2a^{2n}\cos x + 1$

$$= \left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{x}{2n}\right)\right)\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{2\pi+x}{2n}\right)\right)$$
$$\times\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{4\pi+x}{2n}\right)\right)\ldots\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{2(n-1)\pi+x}{2n}\right)\right).$$

3. $a^{4n+2} - 2a^{2n+1}\cos x + 1$

$$= \left(a^2 - 2a\cos\frac{x}{2n+1} + 1\right)\left(a^2 + 2a\cos\frac{\pi+x}{2n+1} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{2n+1} + 1\right)$$
$$\ldots\ldots\left(a^2 \pm 2a\cos\frac{2n\pi+x}{2n+1}\right).$$

Für den besondern Fall $x = 0$ *ist*

4. $$a^n - 1 = (a-1)\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)}\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{6\pi}{n} + 1\right)}\ldots\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + 1\right)}.$$

Für den Fall $x = \pi$ *ist*

5. $$a^{2n+1} + 1 = (a+1)\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1\right)}\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{3\pi}{2n+1} + 1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{5\pi}{2n+1} + 1\right)}\ldots\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{4n\pi}{2n+1} + 1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n+4)\pi}{2n+1} + 1\right)}\ldots\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{(4n+1)\pi}{2n+1} + 1\right)}$$

und

$$6.\quad a^{2n}+1=\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{\pi}{2n}+1\right)}\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{3\pi}{2n}+1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{5\pi}{2n}+1\right)}\ldots\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{(4n-1)\pi}{2n}+1\right)}.$$

Beweis. I. Die Factoren der Gröfse $a^{2n}-2a^n\cos x+1$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$7.\quad a^{2n}-2a^n\cos x+1=0,$$

abgezogen von a; denn gesetzt $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n}$ sind die $2n$ Wurzeln der Gleichung (7.), so ist dieselbe so viel als

$$8.\quad (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_{2n})=0 \text{ (Rechenkunst §. 275.)},$$

so dafs

$$9.\quad (a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_{2n})=a^{2n}-2a^n\cos x+1$$

ist; denn für die $2n$ Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n}$ von a, und für nicht mehr und nicht weniger, ist die Gröfse (7.) eben so wohl Null als die Gröfse (8.). Daher sind $a-a_1$, $a-a_2$, $a-a_3 \ldots a-a_{2n}$ **Factoren** von $a^{2n}-2a\cos x+1$, und man findet dieselben, **wenn man die Wurzeln der Gleichung (7.) sucht, und sie eine nach der andern von a abzieht.**

II. Die Gröfse $a^{2n}-2a^n\cos x+1$ ist aber so viel als

$$10.\quad a^{2n}-2a^n\cos(2m\pi\pm x)+1,$$

wo m jede beliebige ganze Zahl seyn kann; denn es ist $\cos(2m\pi\pm x)=\cos x$ (§. 317. 2.). Also mufs man die Wurzeln der Gleichung

$$11.\quad a^{2n}-2a^n\cos(2m\pi\pm x)+1=0$$

nehmen.

III. Setzt man $a^n=v$, so ist die Gleichung (11.) folgende:

$$12.\quad v^2-2v\cos(2m\pi\pm x)+1=0,$$

woraus

$$v=\cos(2m\pi\pm x)\pm\sqrt{(\cos(2m\pi\pm x)^2-1)},\text{ oder}$$
$$v=\cos(2m\pi\pm x)\pm\sqrt{-1}\sqrt{(1-\cos(2m\pi\pm x)^2)},\text{ oder}$$
$$13.\quad v=\cos(2m\pi\pm x)\pm i\sin(2m\pi\pm x)$$

folgt. Da nun $v=a^n$ war, so ist

$$14.\quad a^n=\cos(2m\pi\pm x)\pm i\sin(2m\pi\pm x).$$

Da ferner $\cos(2m\pi+x)=\cos(2m\pi-x)$, hingegen $\sin(2m\pi+x)=-\sin(2m\pi-x)$ ist (§. 317. 2. 1.), so drückt auch

$$15.\quad a^n=\cos(2m\pi+x)\pm i\sin(2m\pi+x)$$

das Nemliche aus wie (14.). Daher kann man auch statt (14.) die Gleichung (15.) setzen.

IV. Aus (15.) folgt

$$16.\quad a=(\cos(2m\pi+x)\pm i\sin(2m\pi+x))^{\frac{1}{n}}$$

und vermöge (Rechenkunst §. 261. 2.) ist

$$17.\quad (\cos(2m\pi+x)\pm i\sin(2m\pi+x))^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{2m\pi+x}{n}\pm i\sin\frac{2m\pi+x}{n}.$$

Also ist

$$18.\quad a=\cos\frac{2m\pi+x}{n}\pm i\sin\frac{2m\pi+x}{n}.$$

Da diese Gleichung alle $2n$ Wurzeln der Gleichung (11.) zugleich ausdrückt, und m willkürlich ist, so muſs man die $2n$ Wurzeln finden, wenn man der Reihe nach $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$ setzt, denn eben dadurch erhält man n verschiedene Werthe von a und das doppelte Zeichen von i giebt $2n$ Werthe.

Die $2n$ Wurzeln der Gleichung (11.) sind also folgende:

$$19.\quad \begin{cases} a_1 = \cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}, & a_2 = \cos\frac{x}{n} - i\sin\frac{x}{n}, \\ a_3 = \cos\frac{2\pi + x}{n} + i\sin\frac{2\pi + x}{n}, & a_4 = \cos\frac{2\pi + x}{n} - i\sin\frac{2\pi + x}{n}, \\ a_5 = \cos\frac{4\pi + x}{n} + i\sin\frac{4\pi + x}{n}, & a_6 = \cos\frac{4\pi + x}{n} - i\sin\frac{4\pi + x}{n}, \\ \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi + x}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi + x}{n}, & \\ & a_{2n} = \cos\frac{2(n-1)\pi + x}{n} - i\sin\frac{2(n-1)\pi + x}{n}. \end{cases}$$

IV. Zieht man nun, nach (I.), alle diese Wurzeln, eine nach der andern, von a ab, so erhält man die Factoren der Gröſse (10.), nemlich:

$$20.\quad \begin{cases} a - a_1,\ a - a_2, \\ a - a_3,\ a - a_4, \\ a - a_5,\ a - a_6, \\ \ldots \\ a - a_{2n-1},\ a - a_{2n}. \end{cases}$$

Aber auch beliebige Producte dieser Factoren sind nothwendig wiederum Factoren der Gröſse (10.). Also sind auch z. B.

$$21.\quad \begin{cases} (a - a_1)(a - a_2), \\ (a - a_3)(a - a_4), \\ (a - a_5)(a - a_6), \\ \ldots \\ (a - a_{2n-1})(a - a_{2n}) \end{cases}$$

Factoren der Gröſse (10.).

Setzt man in (21.) die Werthe von $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_{2n}$ aus (19.), so erhält man z. B.

$$22.\quad (a - a_1)(a - a_2) = \left(a - \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)\right)\left(a - \left(\cos\frac{x}{n} - i\sin\frac{x}{n}\right)\right)$$
$$= a^2 - 2a\cos\frac{x}{n} + \cos\frac{x^2}{n} - i^2\sin\frac{x^2}{n}$$
$$= a^2 - 2a\cos\frac{x}{n} + \cos\frac{x^2}{n} + \sin\frac{x^2}{n}$$
$$= a^2 - 2a\cos\frac{x}{n} + 1;$$

eben so

$$23. \quad \begin{cases} (a-a_3)(a-a_4) = a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{n}+1, \\ (a-a_5)(a-a_6) = a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{n}+1; \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a-a_{2n-1})(a-a_{2n}) = a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+1. \end{cases}$$

Es sind also

$$24. \quad \begin{cases} a^2 - 2a\cos\frac{x}{n}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{n}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{n}+1, \\ \dots\dots\dots \\ a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi+x}{n}+1. \end{cases}$$

die n doppelten Factoren der Gröſse

$$a^{2n} - 2a^n\cos x + 1;$$

wie im Lehrsatz (1.).

V. Wenn n grade ist, so sind je zwei Factoren, bis auf das Zeichen des mittleren Gliedes, gleich. Es sey z. B. $n=6$, so sind die 6 Factoren in (1.), weil $\cos(\pi+x) = -\cos x$ ist, folgende:

$$25. \quad \begin{cases} a^2 - 2a\cos\frac{x}{6}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{6}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{6}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{6\pi+x}{6}+1 = a^2 - 2a\cos\left(\pi+\frac{x}{6}\right)+1 \\ \qquad = a^2 + 2a\cos\frac{x}{6}+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{8\pi+x}{6}+1 = a^2 - 2a\cos\left(\pi+\frac{2\pi+x}{6}\right)+1 \\ \qquad = a^2 + 2a\cos\left(\frac{2\pi+x}{6}\right)+1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{10\pi+x}{6}+1 = a^2 - 2a\cos\left(\pi+\frac{4\pi+x}{6}\right)+1 \\ \qquad = a^2 + 2a\cos\left(\frac{4\pi+x}{6}\right)+1; \end{cases}$$

wo, wie man sieht, die drei letzten Factoren den drei ersten, bis auf das Zeichen des zweiten Gliedes, gleich sind.

Es ist also für ein grades n, wenn man die Factoren mit gleichen Cosinus mit einander multiplicirt,

26. $a^{2n} - 2a^n \cos x + 1$

$$= \left((a^2+1)^2 - 4a^2 \cos^2\left(\frac{x}{n}\right)\right)\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{2\pi+x}{n}\right)\right)$$

$$\times\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{4\pi+x}{n}\right)\right)\ldots\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{(n-2)\pi+x}{n}\right)\right),$$

welches, wenn man, um auszudrücken, dafs n grade seyn soll, $2n$ statt n setzt, die Gleichung (2.) giebt.

VI. Ist n ungrade, so kann man die Bogen in den Factoren, statt um 2π, um π fortschreiten lassen. Alsdann sind die Zeichen der zweiten Glieder abwechselnd negativ und positiv. Es sey z. B. $n = 5$, so sind die 5 Factoren in (1.) folgende:

$$27.\ \begin{cases} a^2 - 2a\cos\frac{x}{5} + 1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{5} + 1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{5} + 1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{6\pi+x}{5} + 1 = a^2 - 2a\cos\left(\pi + \frac{\pi+x}{5}\right) \\ \qquad = a^2 + 2a\cos\frac{\pi+x}{5} + 1, \\ a^2 - 2a\cos\frac{8\pi+x}{5} + 1 = a^2 - 2a\cos\left(\pi + \frac{3\pi+x}{5}\right) \\ \qquad = a^2 + 2a\cos\frac{3\pi+x}{5} + 1; \end{cases}$$

wo, wie man sieht, nach der Fortschreitung der Bogen, der vierte Factor zwischen den ersten und zweiten, und der fünfte zwischen den zweiten und dritten fällt.

Es ist also für ein ungrades n:

$$28.\ \begin{cases} a^{2n} - 2a^n\cos x + 1 \\ = \left(a^2 - 2a\cos\frac{x}{n} + 1\right)\left(a^2 + 2a\cos\frac{\pi+x}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{n} + 1\right) \\ \qquad \ldots\ldots \left(a^2 \pm 2a\cos\frac{(n-1)\pi+x}{n}\right), \end{cases}$$

welches, wenn man, um auszudrücken, dafs n ungrade seyn soll, $2n+1$ statt n setzt, die Gleichung (3.) giebt.

VII. Ist $x = 0$, so ist $\cos x = 1$; also geht in diesem Falle die Gleichung (1.) in folgende über:

29. $a^{2n} - 2a^n + 1$

$$= (a^2 - 2a + 1)\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{4\pi}{n} + 2\right)$$

$$\times\left(a^2 - 2a\cos\frac{6\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + 1\right).$$

Zieht man auf beiden Seiten die zweite Wurzel aus, so erhält man, weil $\sqrt{(a^{2n} - 2a^n + 1)} = a^n - 1$ ist, die Gleichung (4.) im Lehrsatz.

VIII. Ist $x = \pi$, so ist $\cos x = -1$. Also geht in diesem Falle die Gleichung (1.) für ein ungrades n in folgende über:

$$50.\quad a^{2n} + 2a^n + 1$$
$$= \left(a^2 - 2a\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{5\pi}{n} + 1\right)$$
$$\ldots + \left(a^2 - 2a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{n\pi}{n} + 1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{(n+1)\pi}{n} + 1\right)$$
$$\ldots \left(a^2 - 2a\cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + 1\right).$$

Unter den verschiedenen Factoren rechterhand ist der mittlere $a^2 - 2a\cos\frac{n\pi}{n} + 1$ gleich $a^2 - 2a\cos\pi + 1$, gleich $a^2 + 2a + 1$. Zieht man also auf beiden Seiten die zweite Wurzel aus, so erhält man, weil $\sqrt{(a^{2n} + 2a^n + 1)} = a^n + 1$ und $\sqrt{(a^2 + 2a + 1)} = a + 1$ ist;

$$a^n + 1$$
$$= (a+1)\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{\pi}{n} + 1\right)}\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{3\pi}{n} + 1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{5\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(a^2 - 2a\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1\right)},$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{(n+2)\pi}{n} + 1\right)\ldots\left(a^2 - 2a\cos\frac{(2n-1)\pi}{n} + 1\right)},$$

und wenn man, um auszudrücken, dafs n ungrade seyn soll, $2n+1$ statt n setzt, die Gleichung (5.) im Lehrsatze.

Für ein grades n erhält man, wenn man in (1.) π statt x, und um auszudrücken, dafs n grade seyn mufs, $2n$ setzt und auf beiden Seiten die zweite Wurzel aussieht, die Gleichung (6.) unmittelbar.

Man kann die Sätze (5. und 6.), wenn man will, auch auf die Weise wie den Satz (1.) in (V.) verwandeln.

336.

Anmerkung. Die Sätze (§. 335.) haben geometrische Bedeutungen am Kreise. Die besonderen Fälle (4. 5. 6.) des allgemeinen Satzes (1.) sind von Cotes im Anfange des 18ten Jahrhunderts gefunden und heifsen nach ihrem Erfinder *Cotesischer Satz*. Der allgemeinere Satz ist etwas später von Moivre gefunden und heifst, nach ihm, *Moivrischer Satz*. Doppel-Factoren, wie in diesem Satze, nennt man auch *trinomische Factoren*.

Ausdrücke der goniometrischen Linien durch Factoren.

337.

Lehrsatz. Es ist für jeden beliebigen Bogen x:

$$1.\quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots,$$
$$2.\quad \cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\ldots,$$

oder für beliebige ganze Zahlen m *und* n,

$$3.\quad \sin\frac{m}{2n}\pi=\pi\cdot\frac{m}{2n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\cdots,$$

$$4.\quad \sin\frac{m}{2n}\pi=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdots,$$

$$5.\quad \cos\frac{m}{2n}\pi=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdots,$$

$$6.\quad \cos\frac{m}{2n}\pi=\pi\cdot\frac{n-m}{2n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}\cdot\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdots,$$

$$7.\quad \pi=\sin\frac{m}{2n}\pi\cdot\frac{2n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdot\frac{6n}{6n-m}\cdots,$$

$$8.\quad \pi=\cos\frac{m}{2n}\pi\cdot\frac{2n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{2n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots,$$

$$9.\quad \pi=2\cdot\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots},$$

$$10.\quad \pi=2\cdot\frac{4.4.8.8.12.12.16.16\ldots}{3.5.7.9.11.13.15.17\ldots}\cdot\sqrt{2},$$

$$11.\quad \pi=3\cdot\frac{6.6.12.12.18.18.24.24}{5.7.11.13.17.19.23.25}.$$

etc.

Beweis. I. Es ist

$$12.\quad \sin x=x\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots7}+\ldots\right)\text{ und}$$

$$13.\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}+\ldots$$

Man bezeichne die Wurzeln der Gleichungen

$$14.\quad P\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots7}\ldots\right)=0\text{ und}$$

$$15.\quad Q\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}\ldots\right)=0,$$

in welchen P, Q willkührliche Factoren seyn sollen, die kein x enthalten, durch

$$16.\quad \begin{cases} x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ldots\text{ und}\\ {}_1x,\ {}_2x,\ {}_3x,\ {}_4x\ \ldots,\end{cases}$$

so kann man die Gleichungen (14. 15.) auch wie folgt ausdrücken:

$$17.\quad (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots=0\text{ und}$$

$$18.\quad (x-{}_1x)(x-{}_2x)(x-{}_3x)(x-{}_4x)\ldots=0;$$

denn die Gröſsen $(x-x_1)(x-x_2)\ldots$ und $(x-{}_1x)(x-{}_2x)\ldots$, sind offenbar für $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3,\ldots$ und für $x={}_1x$, $x={}_2x$, $x={}_3x$ etc. gleich Null und die Gröſsen $P\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\ldots\right)$ und $Q\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\ldots\right)$ sind es ebenfalls, weil nach der Voraussetzung $x_1, x_2, x_3\ldots$ und ${}_1x, {}_2x, {}_3x\ldots$ die Wurzeln der Gleichungen (14. und 15.), das heiſst, diejenigen Werthe von x sind, für welche die Gröſsen $P\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\ldots\right)$ und $Q\left(1-\frac{x^2}{2}\ldots\right)$ verschwinden.

Man kann also setzen:

19. $P\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots7}\ldots\right)$
$=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots$ und

20. $Q\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3\ldots6}\ldots\right)$
$=(x-{}_1x)(x-{}_2x)(x-{}_3x)(x-{}_4x)\ldots$

Das Glied ohne x ist in der Gleichung (19.) linkerhand P, und rechterhand, wie leicht zu sehen, $x_1.x_2.x_3.x_4\ldots$ Also ist

21. $P=x_1.x_2.x_3.x_4\ldots$

In der Gleichung (20.) ist das Glied ohne x linkerhand Q und rechterhand ${}_1x.{}_2x.{}_3x.{}_4x\ldots$ Also ist

22. $Q={}_1x.{}_2x.{}_3x.{}_4x\ldots$

Dividirt man daher die Gleichung (19.) durch $P=x_1x_2x_3\ldots$ und die Gleichung (20.) durch $Q={}_1x\,{}_2x\,{}_3x\ldots$, so erhält man

23. $\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\ldots\right)=\left(\frac{x}{x_1}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}-1\right)\left(\frac{x}{x_3}-1\right)\ldots$

24. $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\ldots=\left(\frac{x}{{}_1x}-1\right)\left(\frac{x}{{}_2x}-1\right)\left(\frac{x}{{}_3x}-1\right)\ldots$

Es waren aber $x_1, x_2, x_3\ldots$ und ${}_1x, {}_2x, {}_3x\ldots$ die Wurzeln der Gleichungen (14. und 15.), das heißt, diejenigen Werthe von x, für welche die Größen $P\left(1-\frac{x^2}{2.3}\ldots\right)$ und $Q\left(1-\frac{x^2}{2}\ldots\right)$ verschwinden, und diese Größen sind so viel als $\frac{P\sin x}{x}$ und $Q\cos x$ (12.) (13.). Also sind $x_1, x_2, x_3\ldots$ und ${}_1x, {}_2x, {}_3x\ldots$ diejenigen Werthe von x, für welche $\frac{P\sin x}{x}$ und $Q\cos x$, oder, weil P und Q kein x enthalten, $\frac{\sin x}{x}$ und $\cos x$ verschwinden.

Dergleichen Werthe von x sind der Reihe nach für $\frac{\sin x}{x}$: $+\pi$, $-\pi$, $+2\pi$, -2π, $+3\pi$, -3π etc.; denn es ist $\sin \pm n\pi=0$ (§. 312. 7.) und für $\cos x$, $+\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $+\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, $+\frac{5}{2}\pi$, $-\frac{5}{2}\pi$ etc.; denn es ist $\cos(2n\pm\frac{1}{2})\pi=0$ (§. 312. 7.). Also ist

25. für den Sinus:
$x_1=+\pi$, $x_2=-\pi$, $x_3=+2\pi$, $x_4=-2\pi$, $x_5=+3\pi$ etc.,

26. und für den Cosinus:
${}_1x=+\frac{1}{2}\pi$, ${}_2x=-\frac{1}{2}\pi$, ${}_3x=+\frac{3}{2}\pi$, ${}_4x=-\frac{3}{2}\pi$, ${}_5x=+\frac{5}{2}\pi$ etc.;

folglich ist, weil vermöge (23.) und (24.)

$$\sin x=x\left(\frac{x}{x_1}-1\right)\left(\frac{x}{x_2}-1\right)\left(\frac{x}{x_3}-1\right)\ldots \text{ und}$$

$$\cos x=\left(\frac{x}{{}_1x}-1\right)\left(\frac{x}{{}_2x}-1\right)\left(\frac{x}{{}_3x}-1\right)\ldots \text{ ist,}$$

$$\sin x=x\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(\frac{x}{-\pi}-1\right)\left(\frac{x}{2\pi}-1\right)\left(\frac{x}{-2\pi}-1\right)\left(\frac{x}{3\pi}-1\right)\ldots$$

$$\cos x=\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}-1\right)\left(\frac{x}{-\frac{1}{2}\pi}-1\right)\left(\frac{x}{\frac{3}{2}\pi}-1\right)\left(\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi}-1\right)\left(\frac{x}{\frac{5}{2}\pi}-1\right)\ldots$$

oder

$$\sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

$$\cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\ldots$$

oder

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots;$$

wie im Lehrsatz (1.) (2.)

II. Man setze in (1.) und (2.)

$$x = \frac{m}{2n}\pi,$$

so erhält man

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{2n}\pi\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right)\ldots,$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right)\ldots;$$

oder

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \pi.\frac{m}{2n}.\frac{4n^2-m^2}{4n^2}.\frac{16n^2-m^2}{16n^2}.\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\ldots$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \frac{n^2-m^2}{n^2}.\frac{9n^2-m^2}{9n^2}.\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\ldots;$$

woraus, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke (3. und 5.) folgen.

III. Setzt man in (3. und 5.) $n-m$ statt m, so erhält man, weil

$$\sin\frac{n-m}{2n}\pi = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi-\frac{m}{2n}\pi\right) = \cos\frac{m}{2n}\pi \text{ und}$$

$$\cos\frac{n-m}{2n}\pi = \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\frac{m}{2n}\pi\right) = \sin\frac{m}{2n}\pi \text{ ist,}$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \pi.\frac{n-m}{2n}.\frac{n+m}{2n}.\frac{3n-m}{2n}.\frac{3n+m}{4n}.\frac{5n-m}{4n}\ldots \text{ und}$$

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{n-m}{n}.\frac{2n-m}{n}.\frac{2n+m}{3n}.\frac{4n-m}{3n}.\frac{4n+m}{5n}\ldots;$$

welches die Ausdrücke (6. und 4.) sind.

Aus (3. und 6.) folgen unmittelbar die Gleichungen (7.) und (8.). Da m und n gänzlich willkührlich sind, so geben diese Gleichungen unzählige Ausdrücke von π.

Setzt man in (7.) $m=1$, $n=1$, so erhält man, weil alsdann $\sin\frac{m}{2n}\pi = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ ist, wie leicht zu sehen, den Ausdruck (9.).

Setzt man in (7.) $m=1$, $n=2$, so erhält man, weil alsdann $\sin\frac{m}{2n}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, den Ausdruck (10.).

Setzt man in (7.) $m = 1$, $n = 3$, so erhält man, weil alsdann $\sin \frac{m}{2n}\pi = \sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ ist, den Ausdruck (11.) u. s. w.

Der Ausdruck (9.) von π heifst nach seinem Erfinder Wallis, der Wallisische.

338.

Anmerkung. I. Da $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, so ist es leicht, aus den Ausdrücken der Sinus und Cosinus im vorigen Lehrsatze ähnliche Ausdrücke für die übrigen goniometrischen Linien zu finden.

II. Da der Logarithme eines Products, der Summe der Logarithmen der Factoren gleich ist, so sind die Ausdrücke der goniometrischen Linien im vorigen Lehrsatze besonders bequem, die Logarithmen dieser Linien, so wie auch den Logarithmen der Zahl π zu finden. Man sehe deshalb die weitern Entwickelungen im eilften Capitel des ersten Buches von „Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen."

Den natürlichen und den Briggischen Logarithmen von π findet man, auf diese Weise berechnet, nach Euler, weiter unten in der Zusammenstellung.

339.

Lehrsatz. Die Zahl π, welche den Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser 1 ausdrückt, kann weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn, sondern ist nothwendig irrational.

Beweis. I. Es ist

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots} \quad (337.\ 9.)$$

oder

$$\pi = 2 \cdot \frac{2^2.1^2.2^2.2^2.2^2.3^2.2^2.4^2.2^2.5^2.2^2.6^2\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13\ldots}.$$

Nun kann ein Bruch nur aufgehen, wenn sein Zähler die nemlichen Primzahlen zu Factoren hat wie der Nenner (Rechenkunst §. 141). Der Bruch für π aber hat, so weit man denselben auch nehmen mag, im Nenner offenbar gröfsere Primzahlen zu Factoren als im Zähler. Also kann π keine ganze Zahl seyn.

II. Gesetzt, π könne ein Bruch $\frac{m}{n}$ seyn, so multiplicire man denselben mit $1.2.3.4\ldots n$, welches

$$m = 2 \cdot \frac{2^2.1^2.2^2.2^2.3^2.3^2.2^2.4^2\ldots 2^2.\ n^2\ .\ 2^2\ .(n+1)^2\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots 2n.2n+1.2n+1.2n+3\ldots}$$

giebt. Auch dieser Bruch kann nicht aufgehen, weil der Nenner offenbar gröfsere Primzahlen zu Factoren hat, als der Zähler. Also kann m keine ganze Zahl und folglich π auch kein Bruch $\frac{m}{n}$ seyn.

Mithin ist π nothwendig irrational.

340.

Anmerkung. Es giebt noch mehrere Beweise von Lambert, Legendre und Anderen, dafs π, und selbst das Quadrat von π nothwendig irrational ist. Daraus folgt, dafs die sogenannte Quadratur des Kreises, das heifst die Aufgabe: eine Zahl oder einen Bruch zu finden, der den Umfang eines Kreises ausdrückt, dessen Halbmesser irgend eine gegebene Zahl ist, vergeblich gesucht wird. Bekanntlich hat man sich um diese Aufgabe vielfältig bemüht, allein ohne Erfolg, weil eine irrationale Zahl nicht rational gemacht werden kann. Auch hat die Aufgabe gar nicht einmal einen Nutzen, weil man π wirklich mit leichter Mühe, so genau als man nur immer will, finden kann, und also nicht abzusehen ist, was gewonnen wäre, wenn es für π wirklich einen Bruch gäbe, der diese Zahl genau ausdrückte. Denn in jedem Falle würden Zähler und Nenner dieses Bruches gröfser seyn, als Zähler und Nenner aller der Brüche, die sich für π durch Kettenbrüche finden lassen, und die dieser Zahl näher kommen als alle andere Brüche in *kleineren* Zahlen. (Weiter unten, in der Zusammenstellung (§. 345.) stehen einige dieser Brüche). Der Bruch für π würde also in jedem Falle so ungeheuer grofse Zahlen haben, dafs er dennoch keinen Nutzen hätte. Es ist übrigens wohl nur zufällig, dafs dergleichen Bemühungen grade auf den Kreis gefallen sind. Wahrscheinlich deshalb, weil der Gegenstand so sehr sinnlich ist, dafs Jeder, der auch die Mathematik nicht kennt, sich dennoch wenigstens eine ungefähre Vorstellung davon machen kann. Es giebt aufserdem noch viel einfachere Aufgaben der Art, um die man sich ebenfalls vergeblich bemühen würde, z. B. eine Zahl oder einen Bruch zu finden, der die Diagonal eines Quadrats ausdrückt, dessen Seite eine gegebene ganze Zahl ist. Solcher Aufgaben sind so viele als irrationale Zahlen. Niemand aber, der von dem worauf es ankommt richtige Begriffe hat, wird an solchen Dingen Zeit und Mühe verschwenden.

341.

Lehrsatz. Wenn x einen beliebigen Bogen und n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so ist

1. $\sin x = 2^{n-1} . \sin\frac{x}{n} . \sin\frac{\pi+x}{n} . \sin\frac{2\pi+x}{n} . \sin\frac{3\pi+x}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi+x}{n}.$

2. $\sin x = 2^{n-1} \sin\frac{\pi-x}{n} . \sin\frac{2\pi-x}{n} . \sin\frac{3\pi-x}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n\pi-x)}{n}.$

3. $2^{n-1} \sin\frac{\pi}{2n} . \sin\frac{3\pi}{2n} . \sin\frac{5\pi}{2n} \ldots\ldots \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = 1.$

4. $2^{n} . \sin^2\frac{\pi}{4n} . \sin^2\frac{5\pi}{4n} . \sin^2\frac{9\pi}{4n} \ldots\ldots \sin^2\frac{(4n-3)\pi}{4n} = 1,$

5. $2^{n} . \sin^2\frac{3\pi}{4n} . \sin^2\frac{7\pi}{4n} . \sin^2\frac{11\pi}{4n} \ldots\ldots \sin^2\frac{(4n-1)\pi}{4n} = 1.$

6. $2^{n} . \sin\frac{\pi}{6n} . \sin\frac{7\pi}{6n} . \sin\frac{13\pi}{4n} \ldots\ldots \sin\frac{(6n-1)\pi}{6n} = 1.$

7. $2^{n} . \sin\frac{5\pi}{6n} . \sin\frac{11\pi}{6n} . \sin\frac{17\pi}{6n} \ldots\ldots \sin\frac{(6n-1)\pi}{6n} = 1.$

8. $\sin x = 2^n \cos \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{4}x \cos \tfrac{1}{8}x \cos \tfrac{1}{16}x \ldots \cos \frac{1}{2^n}x \,.\, \sin \frac{1}{2^n}x.$

9. $\sin x = x \cos \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{4}x \cos \tfrac{1}{8}x \cos \tfrac{1}{16}x \ldots \cos 0.$

10. $\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x \ldots$

Beweis. I. Man setze in (§. 535.) $a = 1$, so erhält man

$$2 - 2\cos x$$
$$= \left(4 - 4\cos^2\frac{x}{2n}\right)\left(4 - 4\cos^2\left(\frac{2\pi+x}{2n}\right)\right)\ldots\left(4 - 4\cos^2\left(\frac{2(n-1)\pi+x}{2n}\right)\right),$$

oder weil rechterhand n Factoren vorhanden sind,

$$2(1-\cos x)$$
$$= 2^{2n}\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{2n}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{2\pi+x}{2n}\right)\right)\ldots\left(1-\cos^2\left(\frac{2(n-1)\pi+x}{2n}\right)\right),$$

oder weil $1 - \cos x = 2\sin\tfrac{1}{2}x^2$ (§. 318. 2.) und

$1 - \cos^2\left(\frac{x}{2n}\right) = \sin^2\left(\frac{x}{2n}\right)$ etc. ist,

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2$$
$$= 2^{2n-2}\sin^2\left(\frac{x}{2n}\right).\sin^2\left(\frac{2\pi+x}{2n}\right).\sin^2\left(\frac{4\pi+x}{2n}\right)\ldots\sin^2\left(\frac{2(n-1)\pi+x}{2n}\right),$$

und wenn man auf beiden Seiten die zweite Wurzel auszieht und $2x$ statt x schreibt,

$$\sin x = 2^{n-1}.\sin\frac{x}{n}.\sin\frac{\pi+x}{n}.\sin\frac{2\pi+x}{n}.\sin\frac{3\pi+x}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi+x}{n};$$

wie im Lehrsatz (1.).

II. Da für ein beliebiges m

11. $\sin\frac{(n-m)\pi+x}{n} = \sin\left(\pi + \frac{x-m\pi}{n}\right) = -\sin\frac{x-m\pi}{n} = \sin\frac{m\pi-x}{n},$

also $\sin\frac{(n-1)\pi+x}{n} = \sin\frac{\pi-x}{n},\ \sin\frac{(n-2)\pi+x}{n} = \sin\frac{2\pi-x}{n}$

ist etc., und der Ausdruck (1.), wenn man die Factoren in umgekehrter Ordnung nimmt, wie folgt sich schreiben läſst:

$$\sin x = 2^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi+x}{n}.\sin\frac{(n-2)\pi+x}{n}.\sin\frac{(n-3)\pi+x}{n}\ldots\sin\frac{x}{n},$$

so ist auch

12. $\sin x = 2^{n-1}\sin\frac{\pi-x}{n}.\sin\frac{2\pi-x}{n}.\sin\frac{3\pi-x}{n}\ldots\sin\frac{n\pi-x}{n};$

wie im Lehrsatz (2.).

III. Für $x = \tfrac{1}{2}\pi$ giebt die Gleichung (1.), weil dann $\sin x = 1$ ist,

13. $1 = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}.\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n};$

wie (3.).

IV. Für $x = \tfrac{1}{4}\pi$ giebt die Gleichung (1.), weil dann $\sin x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist,

14. $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{5\pi}{4n}.\sin\frac{9\pi}{4n}.\sin\frac{13\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(4n-3)\pi}{4n},$

und die Gleichung (2.)

15. $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2^{n-1}\sin\frac{3\pi}{4n}\sin\frac{7\pi}{4n}.\sin\frac{11\pi}{4n}.\sin\frac{15\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(4n-5)\pi}{4n}.$

Multiplicirt man alles mit sich selbst und noch mit 2, so erhält man die Gleichungen (4. und 5.).

V. Für $x = \frac{1}{6}\pi$ giebt die Gleichung (1.), weil dann $\sin x = \frac{1}{2}$ ist,

16. $\frac{1}{2} = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{6n} \sin\frac{7\pi}{6n} \sin\frac{13\pi}{6n} \dots \sin\frac{(6n-5)\pi}{6n}$,

und die Gleichung (2.)

17. $\frac{1}{2} = 2^{n-1} \sin\frac{5\pi}{6n} . \sin\frac{11\pi}{6n} . \sin\frac{17\pi}{6n} \dots \sin\frac{(6n-1)\pi}{6n}$.

Multiplicirt man mit 2, so erhält man die Gleichungen (6. u. 7.).

VI. Es ist

18. $\begin{cases} \sin x = 2\cos\frac{1}{2}x \sin\frac{1}{2}x \text{ (318. 1.) und eben so} \\ \sin\frac{1}{2}x = 2\cos\frac{1}{4}x \sin\frac{1}{4}x, \\ \sin\frac{1}{4}x = 2\cos\frac{1}{8}x \sin\frac{1}{8}x, \end{cases}$
etc.

Daraus folgt

$\sin x = 2^2 \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{4}x \sin\frac{1}{4}x$,
$\sin x = 2^3 \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{4}x \cos\frac{1}{8}x \sin\frac{1}{8}x$,
u. s. w.

also überhaupt $\sin x = 2^n . \cos\frac{1}{2}x . \cos\frac{1}{4}x . \cos\frac{1}{8}x \dots \cos\frac{1}{2^n}x \sin\frac{1}{2^n}x$; wie (8.).

VII. Es ist $\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} \dots$ (§. 328.). Also ist

19. $\sin\frac{1}{2^n}x = \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}.2.3} + \frac{x^5}{2^{5n}.2.3.4.5} \dots$,

folglich in (8.)

$\sin x = 2^n \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{4}x \cos\frac{1}{8}x \dots \cos\frac{1}{2^n}x \left(\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}.2.3} + \frac{x^5}{2^{5n}.2.3.4.5} \dots\right)$,

oder

20. $\sin x = \cos\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{4}x \cos\frac{1}{8}x \dots \cos\frac{1}{2^n}x \left(x - \frac{x^3}{2^{2n}.2.3} + \frac{x^5}{2^{4n}.2.3.4.5} \dots\right)$.

Setzt man nun n unendlich grofs, so ist $\frac{1}{2^n} = 0$, also alsdann

$\sin x = x \cos\frac{1}{2}x . \cos\frac{1}{4}x . \cos\frac{1}{8}x \dots \cos 0$;

wie (9.).

VIII. Es ist

21. ${}^e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$
21. ${}^e\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \dots$
(Rechenkunst §. 229.)

Daraus folgt ${}^e(1+x) - {}^e(1+x)$ oder,

${}^e\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right)$ oder ${}^e\left(\frac{x(1+x)}{1+x}\right)$ oder,

23. ${}^e x = x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right) \dots$

Nun sey $x = e^{iz}$, so ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{e^{iz}} = e^{-iz}$, also $x - \frac{1}{x} = e^{iz} - e^{iz}$. Desgleichen ist ${}^e x = iz$. Also ist in (23.)

$$iz = e^{iz} - e^{-iz} - \tfrac{1}{2}(e^{2iz} - e^{-2iz}) + \tfrac{1}{3}(e^{3iz} - e^{-3iz}) \ldots\ldots,$$

oder

$$24.\quad \tfrac{1}{2}z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{e^{3iz} - e^{-3iz}}{2i}\right) \ldots.$$

Nun ist aber $\frac{e^{niz} - e^{-niz}}{2i} = \sin nz$. Also ist

$$\tfrac{1}{2}z = \sin z - \tfrac{1}{2}\sin 2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z - \tfrac{1}{4}\sin 4z \ldots\ldots,$$

welches, wenn man x statt z schreibt, die Gleichung (10) giebt.

342.

Anmerkung. Den Sätzen (§. 341.) kann man auch leicht eine geometrische Bedeutung geben.

Es sey z. B. der beliebige Bogen AB_5 (Fig. 169.) *gleich* x *und der nte, z. B. der fünfte Theil davon,* AB_1. *Ferner sey* $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5$ *der fünfte Theil des halben Umfanges, und der zu* $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ *und* $\frac{4}{5}$ *des halben Umfanges hinzugefügte Bogen* $D_1E_1 = D_2E_2 = D_3E_3 = D_4E_4$ *sey gleich* $AB_1 = \frac{1}{5}x$, *so ist*

die Sehne $B_1B_0 = 2\sin\frac{x}{5}$,

die Sehne $E_1F_1 = 2\sin\frac{\pi + x}{5}$,

die Sehne $E_2F_2 = 2\sin\frac{2\pi + x}{5}$,

die Sehne $E_3F_3 = 2\sin\frac{3\pi + x}{5}$,

die Sehne $E_4F_4 = 2\sin\frac{4\pi + x}{5}$,

die Sehne $B_5P = 2\sin x$.

Nun ist nach (§. 341.)

$$2^5 \sin\frac{x}{5}\,\sin\frac{\pi + x}{5}\,\sin\frac{2\pi + x}{5}\,\sin\frac{3\pi + x}{5}\,\sin\frac{4\pi + x}{5} = 2\sin x.$$

Also ist das Product der Sehnen B_1B_0, E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 und E_4F_4 der Sehne B_5P gleich.

Aehnliche Sätze lassen sich aus den übrigen Sätzen (§. 341.) abnehmen.

343.

Lehrsatz. Wenn x *einen beliebigen Bogen, und* n *und* m *beliebige positive ganze Zahlen bezeichnen, so ist*

$$1.\quad (2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots.$$

$$2.\quad (2\sin x)^m = \cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x - \ldots.$$

für $m = 4n$.

3. $(2\sin x)^m = -(\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x - \ldots)$
für $m = 4n+2$.

4. $(2\sin x)^m = \quad \sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x - \ldots)$
für $m = 4n+1$.

5. $(2\sin x)^m = -(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x - \ldots)$
für $m = 4n+3$.

6. $$\cos mx = \cos x^m - \frac{m.m-1}{2}\cos x^{m-2}\sin x^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\cos x^{m-4}\sin x^4 \ldots$$

7. $$\sin mx = m\cos x^{m-1}\sin x - \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\cos x^{m-3}\sin x^3 + \ldots$$

Der **Beweis** liegt in der Entwickelung dieser Ausdrücke (Rechenkunst §. 263.).

344.

Anmerkung. Setzt man in die Ausdrücke (6. und 7.) (§. 343.) der Reihe nach $m = 2, 3, 4, 5$ etc., so erhält man:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos x^2 - \sin x^2 \\
\cos 3x &= \cos x^3 - 3\cos x \sin x^2, \\
\cos 4x &= \cos x^4 - 6\cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4, \\
\cos 5x &= \cos x^5 - 10\cos x^3 \sin x^2 + 5\cos x \sin x^4,
\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\cos x \sin x \\
\sin 3x &= 3\cos x^2 \sin x - \sin x^3 \\
\sin 4x &= 4\cos x^3 \sin x - 4\cos x \sin x^3 \\
\sin 5x &= 5\cos x^4 \sin x - 10\cos x^2 \sin x^3 + \sin x^5,
\end{aligned}$$

. . . .

Setzt man in die Ausdrücke der Cosinus vielfacher Bogen, $1 - \cos x^2$ statt $\sin x^2$, und in die Ausdrücke der Sinus **ungrader** Vielfachen von x, $1 - \sin x^2$ statt $\cos x^2$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= 2\cos x^2 - 1, \\
\cos 3x &= 4\cos x^3 - 3\cos x, \\
\cos 4x &= 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1, \\
\cos 5x &= 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x,
\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin x^3, \\
\sin 5x &= 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5,
\end{aligned}$$

. . . .

Setzt man der Reihe nach $2x = \frac{1}{2}\pi$, $3x = \frac{1}{2}\pi$, $4x = \frac{1}{2}\pi$, $5x = \frac{1}{2}\pi$ und der Kürze wegen $\cos x = q$, so erhält man, weil $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ ist, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
2q^2 - 1 &= 0, \\
3q^3 - 3q &= 0, \\
8q^4 - 8q^2 + 1 &= 0, \\
16q^5 - 20q^3 + 5q &= 0;
\end{aligned}$$

woraus der Reihe nach

$q = \cos \frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ also $\sin \frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

$q = \cos \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - $\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$,

$q = \cos' \frac{1}{8}\pi = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$ - $\sin \frac{1}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2}-2\sqrt{2})}$,

$q = \cos \frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})}$ - $\sin \frac{1}{10}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}} = \pm\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

etc. folgt.

Setzt man $3x = \pi$, $5x = \pi$ .... und $\sin x = p$, so erhält man, weil $\sin \pi = 0$ ist,

$$3p - 4p^3 = 0,$$
$$5p - 20p^3 + 16p^5 = 0;$$

woraus

$p = \sin \frac{1}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, also $\cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$;

$p = \sin \frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{(10 \pm 2\sqrt{5})}$ - $\cos \frac{1}{5}\pi = \pm\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

folgt.

Diese Werthe von $\sin \frac{1}{10}\pi$ und $\sin \frac{1}{5}\pi = \sin \frac{2}{10}\pi$ oder von $\sin(n+\frac{1}{10})\pi$ und $\sin(n+\frac{2}{10})\pi$ stimmen mit denen in (§. 324.) überein, und aus

$$\sin \tfrac{3}{10}\pi = \sin \tfrac{1}{10}\pi \cos \tfrac{2}{10}\pi + \sin \tfrac{2}{10}\pi \cos \tfrac{1}{10}\pi,$$
$$\cos \tfrac{3}{10}\pi = \cos \tfrac{1}{10}\pi \cos \tfrac{2}{10}\pi - \sin \tfrac{1}{10}\pi \sin \tfrac{2}{10}\pi \text{ und}$$
$$\sin \tfrac{6}{10}\pi = 2\sin \tfrac{3}{10}\pi \cos \tfrac{3}{10}\pi$$

findet man auch den dortigen Werth von $\sin(n+\frac{3}{10})\pi$ und $\sin(n+\frac{3}{10})\pi$; desgleichen durch eine leichte Rechnung, was der Satz von dem Unterschiede der Quadrate dieser Sinus aussagt, so dafs der Satz (§. 321.) auch ohne Figur aus allgemeinen Ausdrücken durch Rechnung gefunden werden kann, wie wie in (§. 330.) bemerkt.

345.

Anmerkung. Es giebt noch eine grofse Menge anderer Ausdrücke für die Abhängigkeit der goniometrischen Linien von einander und von ihren Bogen. Die obigen kommen aber am häufigsten vor.

Wegen des öfteren Gebrauchs dieser Sätze, wollen wir sie in folgender Tafel zusammenstellen.

In allen folgenden Ausdrücken bedeuten die Buchstaben $x, y, \alpha, \beta, \gamma \ldots \nu$, wo keine Einschränkungen besonders bemerkt sind, *beliebige* positive oder negative Kreisbogen, für den Halbmesser 1, so groß oder so klein als man will.

π ist der halbe Umfang und a ist eine beliebige Linie.

m und n sind beliebige positive *ganze* Zahlen.

1. $\sin n\pi = 0$, $\sin (2n + \frac{1}{2})\pi = +1$, $\sin (2n - \frac{1}{2})\pi = -1$.
2. $\cos 2n\pi = +1$, $\cos (2n+1)\pi = -1$, $\cos (2n \pm \frac{1}{2})\pi = 0$.
3. $\tang n\pi = 0$, $\tang (2n \pm \frac{1}{2})\pi = \infty$.
4. $\cot n\pi = \infty$, $\cot (2n \pm \frac{1}{2})\pi = 0$.
5. $\sec 2n\pi = +1$, $\sec (2n+1)\pi = -1$, $\sec (2n \pm \frac{1}{2})\pi = \infty$.
6. $\operatorname{cosec} n\pi = \infty$, $\operatorname{cosec} (2n + \frac{1}{2})\pi = +1$, $\operatorname{cosec} (2n - \frac{1}{2})\pi = -1$.

(No. 1. bis 6. aus §. 312. 7.)

7. $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.
8. $\sec x^2 - \tang x^2 = 1$.
9. $\operatorname{cosec} x^2 - \cot x^2 = 1$.

(No 7. bis 9. aus §. 314. 1—3.)

10. $$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\sec x \cot x} = \cos x \tang x = \frac{\tang x}{\sec x} = \frac{\cos x}{\cot x}.$$

11. $$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\tang x \operatorname{cosec} x} = \sin x \cot x = \frac{\sin x}{\tang x} = \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}.$$

12. $$\tang x = \frac{1}{\cot x} = \frac{1}{\cos x \operatorname{cosec} x} = \sin x \sec x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}.$$

13. $$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cot x} = \tang x \operatorname{cosec} x = \frac{\tang x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot x}.$$

14. $\cot x = \frac{1}{\tang x} = \frac{1}{\sin x \sec x} = \cos x \operatorname{cosec} x$
$= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x}$.

15. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \tang x} = \cot x \sec x$
$= \frac{\sec x}{\tang x} = \frac{\cot x}{\cos x}$.

(No. 10. bis 15. aus §. 315. 1. bis 6.)

16. $\sin - x = - \sin x$.
17. $\cos - x = + \cos x$.
18. $\tang - x = - \tang x$.
19. $\cot - x = - \cot x$.
20. $\sec - x = + \sec x$.
21. $\operatorname{cosec} - x = - \operatorname{cosec} x$.

(No. 16. bis 21. aus §. 316. 7. bis 12.)

22. $\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y = \frac{\tang x \pm \tang y}{\sec x \sec y}$.

23. $\cos (x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}$.

24. $\tang (x \pm y) = \frac{\tang x \pm \tang y}{1 \mp \tang x \tang y} = \frac{\cot y \pm \cot x}{\cot x \cot y \mp 1}$.

25. $\sec (x \pm y) = \frac{\sec x \sec y}{1 \mp \tang x \tang y} = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot x \cot y \mp 1}$.

26. $\cot (x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x} = \frac{1 \mp \tang x \tang y}{\tang x \pm \tang y}$.

27. $\operatorname{cosec} (x \pm y) = \frac{\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} y}{\cot y \pm \cot x} = \frac{\sec x \sec y}{\tang x \pm \tang y}$.

(No. 22. bis 27. aus §. 316. 1. bis 6. x und y sind gegen dort verwechselt.)

28. $\begin{cases} \sin (2n\pi \pm x) = \pm \sin x, \\ \sin ((2n+1)\pi \pm x) = \mp \sin x. \\ \sin ((2n \pm \frac{1}{2})\pi + x) = \pm \cos x, \\ \sin ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \pm \cos x. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \cos (2n\pi \pm x) = + \cos x, \\ \cos ((2n+1)\pi \pm x) = - \cos x. \\ \cos ((2n \pm \frac{1}{2})\pi + x) = \mp \sin x, \\ \cos ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \pm \sin x. \end{cases}$

30. $\begin{cases} tang\ (2n\pi \pm x) = \pm\ tang\, x, \\ tang\,((2n+1)\pi \pm x) = \pm\ tang\, x. \\ tang\,((2n \pm \frac{1}{2})\pi + x) = -\ cot\, x, \\ tang\,((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = +\ cot\, x. \end{cases}$

31. $\begin{cases} sec\ (2n\pi \pm x) = +\ sec\, x, \\ sec\ ((2n+1)\pi \pm x) = -\ sec\, x, \\ sec\ ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \mp\ cosec\, x, \\ sec\ ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \pm\ cosec\, x. \end{cases}$

32. $\begin{cases} cot\ (2n\pi \pm x) = \pm\ cot\, x, \\ cot\ ((2n+1)\pi \pm x) = \pm\ cot\, x. \\ cot\ ((2n \pm \frac{1}{2})\pi + x) = -\ tang\, x, \\ cot\ ((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = +\ tang\, x. \end{cases}$

33. $\begin{cases} cosec\ (2n\pi \pm x) = \pm\ cosec\, x, \\ cosec\,((2n+1)\pi \pm x) = \mp\ cosec\, x. \\ cosec\,((2n+\frac{1}{2})\pi + x) = \pm\ sec\, x, \\ cosec\,((2n \pm \frac{1}{2})\pi - x) = \pm\ sec\, x. \end{cases}$

No. 26. bis 33. aus §. 317. 1. bis 6.)

34. $sin\, 2x = 2\, sin\, x\ cos\, x = \frac{2\, tang\, x}{sec\, x^2}.$

35. $cos\, 2x = cos\, x^2 - sin\, x^2 = 1 - 2\, sin\, x^2$
$= 2\, cos\, x^2 - 1 = \frac{cot\, x^2 - 1}{cosec\, x^2}.$

36. $tang\, 2x = \frac{2\, tang\, x}{1 - tang\, x^2} = \frac{2\, cot\, x}{cot\, x^2 - 1}.$

37. $sec\, 2x = \frac{sec\, x^2}{1 - tang\, x^2} = \frac{cosec\, x^2}{cot\, x^2 - 1}.$

38. $cot\, 2x = \frac{cot\, x^2 - 1}{2\, cot\, x} = \frac{1 - tang\, x^2}{2\, tang\, x}.$

39. $cosec\, 2x = \frac{cosec\, x^2}{2\, cot\, x} = \frac{sec\, x^2}{2\, tang\, x}.$

(No. 34. bis 39. aus §. 318. 1. bis 6.)

0. $\begin{cases} sin\ \frac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{1 - cos\, x}{2}\right)} \\ cosec\, \frac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{2\, sec\, x}{sec\, x - 1}\right)} = +\frac{\sqrt{(2(1 + cos\, x))}}{sin\, x} \end{cases}$

ır **positive** x zwischen $4n\pi$ und $(4n+2)\pi$ und
ır **negative** x zwischen $(4n-2)\pi$ und $(4n-4\pi.)$

41. $$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x - 1}\right)} = -\frac{\sqrt{(2(1+\cos x))}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+2)\pi$ und $(4n+4)\pi$, und für **negative** x zwischen $4n\pi$ und $(4n-2)\pi$.

42. $$\begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = +\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} = +\frac{\sqrt{(2(1-\cos x))}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+3)\pi$ und $(4n+5)\pi$, und für **negative** x zwischen $(4n-3)\pi$ und $(4n-5)\pi$.

43. $$\begin{cases} \cos \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = -\sqrt{\left(\frac{2\sec x}{\sec x + 1}\right)} = -\frac{\sqrt{(2(1-\cos x))}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+1)\pi$ und $(4n+3)\pi$, und für **negative** x zwischen $(4n-1)\pi$ und $(4n-3)\pi$.

44. $\sin \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{2\cos \frac{1}{2}x}$; $\cos \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{2\sin \frac{1}{2}x}$.

45. $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$;

$\cot \tfrac{1}{2}x = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

46. $\cot \tfrac{1}{2}x + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = 2\operatorname{cosec} x$; $\cot \tfrac{1}{2}x - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = 2\cot x$.

47. $\dfrac{\cot \frac{1}{2}x - \operatorname{tang} \frac{1}{2}x}{\cot \frac{1}{2}x + \operatorname{tang} \frac{1}{2}x} = \dfrac{1-\operatorname{tang} \frac{1}{2}x^2}{1+\operatorname{tang} \frac{1}{2}x^2} = \cos x$.

48. $\dfrac{1}{\cot \frac{1}{2}x - \cot x} = \dfrac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}x + \cot x} = \sin x$.

49. $\dfrac{1}{\operatorname{tang} x \operatorname{tang} \frac{1}{2}x + 1} = \dfrac{1}{\operatorname{tang} x \cot \frac{1}{2}x - 1} = \cos x$.

50. $\operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x^2 - \sec \tfrac{1}{2}x^2 = \cot \tfrac{1}{2}x^2 - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x^2 = 4\cot x \operatorname{cosec} x$.

51. $$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$ und $(4n+\tfrac{9}{2})\pi$, und
für **negative** x zwischen $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{9}{2})\pi$.

52. $$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos \tfrac{1}{2}x = +\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{+\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+\tfrac{1}{2})\pi$ und $(4n+\tfrac{3}{2})\pi$, und
für **negative** x zwischen $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$.

53. $$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+\tfrac{3}{2})\pi$ und $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$, und
für **negative** x zwischen $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$.

54. $$\begin{cases} \sin \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \cos \tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin x)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin x)} \\ \sec \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \\ \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{-\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sin x} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$ und $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$, und
für **negative** x zwischen $(4n-\tfrac{1}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$.

55. $$\begin{cases} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}} \\ \cot \tfrac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)} + \sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)} - \sqrt{(1-\sin x)}} \end{cases}$$

für **positive** x zwischen $(4n+\tfrac{3}{2}\pi)$ und $(4n+\tfrac{5}{2})\pi$ und
zwischen $(4n+\tfrac{7}{2})\pi$ und $(4n+\tfrac{9}{2})\pi$, und
für **negative** x zwischen $(4n-\tfrac{3}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{5}{2})\pi$ und
zwischen $(4n-\tfrac{7}{2})\pi$ und $(4n-\tfrac{9}{2})\pi$.

56. $\begin{cases} \tan g\,\frac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)}+\sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)}-\sqrt{(1-\sin x)}} \\ \cot\,\frac{1}{2}x = \dfrac{\sqrt{(1+\sin x)}-\sqrt{(1-\sin x)}}{\sqrt{(1+\sin x)}+\sqrt{(1-\sin x)}} \end{cases}$

für **positive** x zwischen $(4n+\frac{1}{2})\pi$ und $(4n+\frac{3}{2})\pi$ und zwischen $(4n+\frac{5}{2})\pi$ und $(4n+\frac{7}{2})\pi$, und für **negative** x zwischen $(4n-\frac{1}{2})\pi$ und $(4n-\frac{3}{2})\pi$ und zwischen $(4n-\frac{5}{2})\pi$ und $(4n-\frac{8}{2})\pi$.

(No. 40. bis 56. aus §. 319. 1. bis 17.)

57. $\sin(2n\pm\frac{1}{6})\pi = \pm\frac{1}{2}$, $\sin(2n+1\pm\frac{1}{6})\pi = \mp\frac{1}{2}$.
58. $\cos(2n\pm\frac{1}{3})\pi = \pm\frac{1}{2}$, $\cos(2n+1\pm\frac{1}{3})\pi = \mp\frac{1}{2}$.
59. $\tan g(2n\pm\frac{1}{4})\pi = \pm 1$, $\tan g(2n+1\pm\frac{1}{4})\pi = \pm 1$.
60. $\cot(2n\pm\frac{1}{4})\pi = \pm 1$, $\cot(2n+1\pm\frac{1}{4})\pi = \pm 1$.
61. $\sin(2n\pm\frac{1}{4})\pi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sin(2n+1\pm\frac{1}{4})\pi = \mp\sqrt{\frac{1}{2}}$.
62. $\cos(2n\pm\frac{1}{4})\pi = +\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\cos(2n+1\pm\frac{1}{4})\pi = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.
63. $\sin(n+\frac{1}{10})\pi = \pm\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$,
$\sin(n+\frac{3}{10})\pi = \pm\frac{1}{4}(+1+\sqrt{5})$.
64. $\sin 2(n+\frac{1}{10})\pi = +\frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$,
$\sin 2(n+\frac{3}{10}\pi) = +\frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$.

(No. 57. bis 64. aus §. 320. 1. bis 6. und §. 321. 3.)

65. $\sin(x+y) + \sin(x-y) = +2\sin x\cos y$.
66. $\sin(x+y) - \sin(x-y) = +2\cos x\sin y$.
67. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = +2\cos x\cos y$.
68. $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$.

(No. 65. bis 68. aus §. 323. 1. bis 4.)

69. $\sin(x+y)\cos(x-y) = \sin x\cos x + \sin y\cos y$.
70. $\cos(x+y)\sin(x-y) = \sin x\cos x - \sin y\cos y$.
71. $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \cos x^2$.
72. $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos x^2 - \sin y^2 = \cos y^2 - \sin x^2$.

(No. 69. bis 72. aus §. 323. 5. 6. 9. 10.)

73. $\sin x + \sin y = +2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$.
74. $\sin x - \sin y = +2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.
75. $\cos x + \cos y = +2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$.
76. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$.

(No. 73. bis 76. aus §. 323. 5. 6. 7. 8.)

77. $\tan g x \pm \tan g y = \dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$.

78. $\cot y \pm \cot x = \dfrac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$.

79. $\cot x \mp \tang y = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin x \cos y}$.

(No. 77. bis 79. aus §. 323. 11. 12. 13.)

80. $\tang x^2 - \tang y^2 = \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos x^2 \cos y^2}$.

81. $\cot y^2 - \cot x^2 = \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\sin x^2 \sin y^2}$.

82. $\cot x^2 - \tang y^2 = \frac{\cos(x+y)\cos(x-y)}{\sin x^2 \cos y^2}$.

(No. 80. 81. 82. aus §. 323. 17. 18. 19.)

83. $\frac{\tang x \pm \tang y}{\cot x \pm \cot y} = \tang x \tang y$.

84. $\frac{\tang x \pm \tang y}{\cot x \pm \tang y} = \tang x \tang(x \pm y)$.

85. $\frac{\cot y \mp \cot x}{\cot x \pm \tang y} = \cot y \tang(x \pm y)$.

(No. 83. 84. 85. aus §. 323. 14. 15. 16.)

86. $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\operatorname{cosec} y + \operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} y - \operatorname{cosec} x} = \frac{\tang \frac{1}{2}(x+y)}{\tang \frac{1}{2}(x-y)}$.

87. $\frac{\sin x \pm \sin y}{\cos x + \cos y} = \tang \frac{1}{2}(x \pm y) = \frac{1}{\cot \frac{1}{2}(x \pm y)}$.

88. $\frac{\cos y - \cos x}{\sin x \pm \sin y} = \tang \frac{1}{2}(x \mp y) = \frac{1}{\cot \frac{1}{2}(x \mp y)}$.

89. $\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sec y - \sec x}{\sec y + \sec x}$

$= - \tang \frac{1}{2}(x+y) \tang \frac{1}{2}(x-y)$.

(No. 86. bis 89. aus §. 323. 20. bis 23.)

90. $\frac{\sin(x+y)}{\sin x + \sin y} = \frac{\cos \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)}$.

91. $\frac{\sin(x+y)}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\sin \frac{1}{2}(x-y)}$.

92. $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tang x + \tang y}{\tang x - \tang y} = \frac{\cot y + \cot x}{\cot y - \cot x}$.

93. $\frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{\cot x - \tang y}{\cot x + \tang y} = \frac{\cot y - \tang x}{\cot y + \tang x}$.

(No. 90. bis 93. aus §. 323. 24. 25. 34. 35.)

94. $\tang \frac{1}{2}(x+y) + \tang \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin x}{\cos x + \cos y}$.

95. $\tang \frac{1}{2}(x+y) - \tang \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \sin y}{\cos x + \cos y}$.

96. $\cot \frac{1}{2}(x-y) + \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin x}{\cos y - \cos x}$.

97. $\cot \frac{1}{2}(x-y) - \cot \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \sin y}{\cos y - \cos x}$.

98. $\cot \frac{1}{2}(x+y) - \tang \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos x}{\sin x + \sin y}$.

99. $\cot \frac{1}{2}(x+y) + \tang \frac{1}{2}(x-y) = \frac{2 \cos y}{\sin x + \sin y}$.

100. $\cot \frac{1}{2}(x-y) - \tang \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos x}{\sin x - \sin y}$.

101. $\cot \frac{1}{2}(x-y) + \tang \frac{1}{2}(x+y) = \frac{2 \cos y}{\sin x - \sin y}$.

(No. 94. bis 101. aus §. 323. 26. bis 33.)

102. $\sin(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{4}\pi \mp x)$.

103. $$\left\{\begin{array}{l} \tang(\frac{1}{4}\pi \pm x) = \cot(\frac{1}{4}\pi \mp x) = \frac{1 \pm \sin 2x}{\cos 2x} \\ = \frac{\cos 2x}{1 \mp \sin 2x} = \frac{1 \pm \tang x}{1 \mp \tang x} = \frac{\cos x \pm \sin x}{\cos x \mp \sin x} \\ = \sec 2x \pm \tang 2x. \end{array}\right.$$

104. $\tang(\frac{1}{4}\pi + x) + \tang(\frac{1}{4}\pi - x)$
$= \cot(\frac{1}{4}\pi - x) + \cot(\frac{1}{4}\pi + x) = 2 \sec 2x$.

105. $\tang(\frac{1}{4}\pi + x) - \tang(\frac{1}{4}\pi - x)$
$= \cot(\frac{1}{4}\pi - x) - \cot(\frac{1}{4}\pi + x) = 2 \tang 2x$.

106. $\tang(\frac{1}{4}\pi+x)\tang(\frac{1}{4}\pi-x) = \cot(\frac{1}{4}\pi+x)\cot(\frac{1}{4}\pi-x) = 1$.

107. $$\left\{\begin{array}{l} 2\cos(\frac{1}{4}\pi+x)\cos(\frac{1}{4}\pi-x) = 2\sin(\frac{1}{4}\pi+x)\sin(\frac{1}{4}\pi-x) = \cos 2x \\ = \frac{2}{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)+\tang(\frac{1}{4}\pi-x)} = \frac{2}{\cot(\frac{1}{4}\pi+x)+\cot(\frac{1}{4}\pi-x)} \end{array}\right.$$

108. $$\left\{\begin{array}{l} \frac{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)^2-1}{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)^2+1} = \frac{1-\tang(\frac{1}{4}\pi-x)^2}{1+\tang(\frac{1}{4}\pi-x)^2} \\ = \frac{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)-\tang(\frac{1}{4}\pi-x)}{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)+\tang(\frac{1}{4}\pi-x)} = \sin 2x. \end{array}\right.$$

109. $$\frac{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)-1}{\tang(\frac{1}{4}\pi+x)+1} = \frac{1-\tang(\frac{1}{4}\pi-x)}{1+\tang(\frac{1}{4}\pi-x)} = \tang x.$$

(No. 102. bis 109. aus §. 324. 1. bis 8.)

110. $\sin(\frac{1}{3}\pi \pm x) = \cos(\frac{1}{6}\pi \mp x)$.

111. $\cos(\frac{1}{3}\pi \pm x) = \sin(\frac{1}{6}\pi \mp x)$.

112. $\sin(\frac{1}{3}\pi + x) - \sin(\frac{1}{3}\pi - x) = \cos(\frac{1}{6}\pi - x) - \cos(\frac{1}{6}\pi + x)$
$= \sin x$.

113. $\cos(\frac{1}{3}\pi + x) + \cos(\frac{1}{3}\pi - x) = \sin(\frac{1}{6}\pi - x) + \sin(\frac{1}{6}\pi + x)$
$= \cos x$.

114. $4 \sin(\frac{1}{3}\pi + x) \sin(\frac{1}{3}\pi - x) = 4 \cos(\frac{1}{6}\pi + x) \cos(\frac{1}{6}\pi - x)$
$= 2 \cos 2x + 1 = 4 \cos x^2 - 1$.

115. $4 \cos(\frac{1}{3}\pi + x) \cos(\frac{1}{3}\pi - x) = 4 \sin(\frac{1}{6}\pi + x) \sin(\frac{1}{6}\pi - x)$
$= 2 \cos 2x - 1 = 1 - 4 \sin x^2$.

116. $\mathrm{tang}(\frac{1}{3}\pi + x) \mathrm{tang}(\frac{1}{3}\pi - x) = \cot(\frac{1}{6}\pi + x) \cot(\frac{1}{6}\pi - x)$
$= \frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos 2x - 1}$.

117. $\sin(\frac{3}{10}\pi + x) - \sin(\frac{1}{10}\pi + x)$
$+ \sin(\frac{3}{10}\pi - x) - \sin(\frac{1}{10}\pi - x) = \cos x$.

118. $\cos(\frac{1}{10}\pi + x) - \cos(\frac{3}{10}\pi + x)$
$- \cos(\frac{1}{10}\pi - x) + \cos(\frac{3}{10}\pi - x) = \sin x$.

(No. 110. bis 118. aus §. 324. 9. bis 17.)

119. $4 \sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin z = - \sin(x+y+z)$
$+ \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z)$.

120. $\sin x + \sin y + \sin z = + \sin(x+y+z)$
$+ 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x+z) \sin \frac{1}{2}(y+z)$.

121. $4 \cos x \,.\, \cos y \,.\, \cos z = + \cos(x+y+z)$
$+ \cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z)$.

122. $\cos x + \cos y + \cos z = - \cos(x+y+z)$
$+ 4 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z)$.

123. $\mathrm{tang}\, x \,.\, \mathrm{tang}\, y \,.\, \mathrm{tang}\, z = \mathrm{tang}\, x + \mathrm{tang}\, y + \mathrm{tang}\, z$
$- \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$.

124. $\cot x \cot y \cot z = \cot x + \cot y + \cot z + \frac{\cos(x+y+z)}{\sin x \sin y \sin z}$.

125. $4 \sin x \cos y \cos z = \sin(x+y+z)$
$+ \sin(x+y-z) + \sin(x-y+z) - \sin(-x+y+z)$.

126. $\sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin\frac{1}{2}(x+y) \cos\frac{1}{2}(x+z) \cos\frac{1}{2}(y+z)$
$- \sin(x+y+z)$.

127. $8 \sin u \sin x \sin y \sin z = \cos(u+x+y+z)$
$- \cos(u+x+y-z) + \cos(u+x-y-z)$
$- \cos(u+x-y+z) + \cos(u-x+y-z)$
$- \cos(u-x+y+z) + \cos(-u+x+y-z)$
$- \cos(-u+x+y+z)$.

128. $8\cos u\cos x\cos y\cos z = \cos(u+x+y+z)$
$+\cos(u+x+y-z)+\cos(u+x-y-z)$
$+\cos(u+x-y+z)+\cos(u-x+y-z)$
$+\cos(u-x+y+z)+\cos(-u+x+y-z)$
$+\cos(-u+x+y+z)$.

129. $4\cos u\cos x\cos y\cos z \pm 4\sin u\sin x\sin y\sin z$
$=\cos(u+x+y\pm z)+\cos(u+x-y\mp z)+\cos(u-x+y\mp z)$
$+\cos(-u+x+y\mp z)$.

130. $\cos u+\cos x+\cos y+\cos z$
$=\cos\frac{u+x+y+z}{2}+\cos\frac{u+x-y-z}{2}+\cos\frac{u-x+y-z}{2}+\cos\frac{-u+x+y-z}{2}$
$-8\sin\frac{u+x+y-z}{4}\sin\frac{u+x-y+z}{4}\sin\frac{u-x+y+z}{4}\sin\frac{-u+x+y+z}{4}$
$=8\cos\frac{u+x+y-z}{4}\cos\frac{u+x-y+z}{4}\cos\frac{u-x+y+z}{4}\cos\frac{-u+x+y+z}{4}$
$-\cos\frac{u+x+y+z}{2}-\cos\frac{u+x-y-z}{2}-\cos\frac{u-x+y-z}{2}+\cos\frac{-u+x+y-z}{2}$.

131. $1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2+2\cos x\cos y\cos z$
$=+4\sin\frac{x+y+z}{2}\sin\frac{x+y-z}{2}\sin\frac{x-y+z}{2}\sin\frac{-x+y+z}{2}$.

132. $1-\cos x^2-\cos y^2-\cos z^2-2\cos x\cos y\cos z$
$=-4\cos\frac{x+y+z}{2}\cos\frac{x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2}\cos\frac{-x+y+z}{2}$.

133. $1-\cos x^2-\cos y^2+\cos z^2-2\sin x\sin y\cos z$
$=-4\cos\frac{x+y+z}{2}\cos\frac{x+y-z}{2}\sin\frac{x-y+z}{2}\sin\frac{-x+y+z}{2}$.

134. $1-\cos x^2-\cos y^2+\cos z^2+2\sin x\sin y\cos z$
$=+4\sin\frac{x+y+z}{2}\sin\frac{+x+y-z}{2}\cos\frac{x-y+z}{2}\cos\frac{-x+y+z}{2}$.

(No. 119. bis 134. aus §. 325. 1. bis 16.)

135. $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin\gamma\sin\delta}\dots$
$\dots+\frac{\sin(\nu-\mu)}{\sin\mu\sin\nu}+\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\sin\nu\sin\alpha}=0$.

136. $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\cos\gamma\cos\delta}\dots$
$\dots+\frac{\sin(\nu-\mu)}{\cos\mu\cos\nu}+\frac{\sin(\alpha-\nu)}{\cos\nu\cos\alpha}=0$.

137. $\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\dots$
$\dots+\sin(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)+\sin(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)=0$.

138. $\cos(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)+\cos(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta)\dots$
$\dots+\cos(\nu+\mu)\sin(\nu-\mu)+\cos(\alpha+\nu)\sin(\alpha-\nu)=0$.

(No. 135. bis 138. aus §. 326. 1. bis 4.)

139. $\sin x + \sin(x+2y) + \sin(x+4y) \ldots\ldots + \sin(x+2ny)$
$$= \frac{\sin(x+ny)\sin(n+1)y}{\sin y}.$$

140. $\cos x + \cos(x+2y) + \cos(x+4y) \ldots\ldots + \cos(x+2ny)$
$$= \frac{\cos(x+ny)\sin(n+1)y}{\sin y}.$$

(No. 139. 140. aus §. 326. 5. 6. Statt der dortigen φ und ψ sind hier x und y gesetzt.)

141. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x \ldots\ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x . \sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x}.$

142. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \ldots\ldots + \cos nx = \dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x . \sin\frac{1}{2}nx}{\sin\frac{1}{2}x}.$

143. $\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 2x \operatorname{cosec} 3x \ldots\ldots$
$\ldots\ldots + \operatorname{cosec}(n-1)x \operatorname{cosec} nx = \sin(n-1)x \operatorname{cosec} x^2 \operatorname{cosec} nx.$

144. $\sec x \sec 2x + \sec 2x \sec 3x \ldots\ldots + \sec(n-1)x \sec nx$
$$= \sin(n-1)x \sec x \operatorname{cosec} x \sec nx.$$

No. 141. bis 144. aus §. 326. 7. bis 10. Statt φ ist x gesetzt.)

145. $\cos\dfrac{\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{3\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{5\pi}{2n+1} + \cos\dfrac{7\pi}{2n+1} \ldots\ldots$
$$\ldots\ldots + \cos\frac{(2n-3)\pi}{2n+1} + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

(No. 145. aus §. 326. 11.)

46. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^5}{2.3.4.5} - \dfrac{x^7}{2.3\ldots7} + \dfrac{x^9}{2.3\ldots9} - \ldots\ldots \infty.$

47. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2.3.4} - \dfrac{x^6}{2.3\ldots6} + \dfrac{x^8}{2.3\ldots8} - \ldots\ldots \infty.$

48. $\operatorname{tang} x = x + \dfrac{2x^3}{2.3} + \dfrac{16x^5}{2.3.4.5} + \dfrac{272 . x^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots \infty.$

49. $\cot x = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{3^2.5} - \dfrac{2x^5}{3^3.5.7} - \dfrac{x^7}{3^3.5^2.7} - \dfrac{2x^9}{3^3.5.7.9.11} - \ldots\ldots\right).$

(No. 146. bis 149. aus §. 328. und 331.)

50. $\cos x = \dfrac{e^{+ix} + e^{-ix}}{2}.$

51. $\sin x = \dfrac{e^{+ix} - e^{-ix}}{2i}.$

(No. 150. und 151. aus §. 329. 8. und 9.)

152. $${}^{e}\cos x = -\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2x^4}{2.3.4}+\frac{16x^6}{2.3\ldots6}+\frac{272x^8}{2.3\ldots8}\ldots\infty\right).$$

153. $${}^{e}\sin x = {}^{e}x - \left(\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2^2.3^2.5}+\frac{x^6}{3^2.5.7.9}+\frac{x^8}{3^3.5^2.7.8}\ldots\infty\right).$$

(No. 152. 153. aus §. 332.)

154. $$x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\sin x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}\sin x^9\ldots\infty.$$

155. $$\pm x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\cos x + \frac{1}{2.3}\cos x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}\cos x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\cos x^7\ldots\infty\right).$$

156. $$x = \operatorname{tang} x - \frac{\operatorname{tang} x^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} x^5}{5} - \frac{\operatorname{tang} x^7}{7} + \frac{\operatorname{tang} x^9}{9} - \ldots$$

(No. 154. 155. 156. aus §. 333.)

In No. 154. 155. und 156. darf x nur im ersten positiven, oder im ersten negativen Quadranten liegen.

157. $$a^{2n} - 2a^n\cos x + 1$$
$$= \left(a^2 - 2a\cos\frac{x}{n}+1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi+x}{n}+1\right)$$
$$\times\left(a^2 - 2a\cos\frac{4\pi+x}{n}+1\right)\left(a^2 - 2a\cos\frac{6\pi+x}{n}+1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi+x}{n}+1\right).$$

158. $$a^{4n} - 2a^{2n}\cos x + 1$$
$$= \left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{x}{2n}\right)\right)\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{2\pi+x}{n}\right)\right)$$
$$\times\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\left(\frac{4\pi+x}{2n}\right)\right)\ldots\left((a^2+1)^2 - 4a^2\cos^2\frac{2(n-1)\pi+x}{2n}\right).$$

159. $$a^{4n+2} - 2a^{2n+1}\cos x + 1$$
$$= \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{x}{2n+1}\right)+1\right)\left(a^2 + 2a\cos\left(\frac{\pi+x}{2n+1}\right)+1\right)$$
$$\times\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{2\pi+x}{2n+1}\right)+1\right)\left(a^2 + 2a\cos\left(\frac{4\pi+x}{2n+1}\right)+1\right)\ldots$$
$$\ldots\left(a^2 \pm 2a\cos\left(\frac{2n\pi+x}{2n+1}\right)+1\right).$$

160. $$a^n - 1$$
$$= (a-1)\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)}\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)}$$
$$\times\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{6\pi}{n}+1\right)}\ldots\sqrt{\left(a^2 - 2a\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+1\right)}.$$

161. $a^{2n+1}+1$

$$= (a+1)\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)+1\right)}\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)+1\right)}$$

$$\times\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{5\pi}{2n+1}\right)+1\right)}\dots\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{4n\pi}{2n+1}\right)+1\right)}$$

$$\times\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{2n+4}{2n+1}\pi\right)+1\right)}\dots\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{4n+1}{2n+1}\pi\right)+1\right)}.$$

162. $a^{2n}+1$

$$=\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{\pi}{n}+1\right)}\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)}$$

$$\times\sqrt{\left(a^2-2a\cos\frac{5\pi}{n}+1\right)}\dots\sqrt{\left(a^2-2a\cos\left(\frac{4n-1}{2n}\right)\pi+1\right)}.$$

(No. 157. bis 162. aus §. 335. 1. bis 6.)

163. $\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\dots\infty$

164. $\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\dots\infty$

(No. 163. 164. aus §. 337. 1. 2.)

165. $\sin\frac{m}{2n}\pi = \pi\,.\,\frac{m}{2n}\,.\,\frac{2n-m}{2n}\,.\,\frac{2n+m}{2n}\,.\,\frac{4n-m}{4n}\,.\,\frac{4n+m}{4n}\,.\,\frac{6n-m}{6n}\dots\infty$

166. $\sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n}\,.\,\frac{2n-m}{n}\,.\,\frac{2n+m}{3n}\,.\,\frac{4n-m}{3n}\,.\,\frac{4n+m}{5n}\,.\,\frac{6n-m}{5n}\dots\infty$

167. $\cos\frac{m}{2n}\pi = \frac{n-m}{n}\,.\,\frac{n+m}{n}\,.\,\frac{3n-m}{3n}\,.\,\frac{3n+m}{3n}\,.\,\frac{5n-m}{5n}\,.\,\frac{5n+m}{5n}\dots\infty$

168. $\cos\frac{m}{2n}\pi = \pi\,.\,\frac{n-m}{2n}\,.\,\frac{n+m}{2n}\,.\,\frac{3n-m}{2n}\,.\,\frac{3n+m}{4n}\,.\,\frac{5n-m}{4n}\,.\,\frac{5n+m}{6n}\dots\infty$

(No. 165. bis 168. aus §. 337. 3. bis 5.)

169. $\sin x = 2^{n-1}\sin\frac{x}{n}\,.\sin\frac{\pi+x}{n}\,.\sin\frac{2\pi+x}{n}\dots\sin\frac{(n-1)\pi+x}{n} = \sin x.$

170. $\sin x = 2^{n-1}\sin\frac{\pi-x}{n}\,.\sin\frac{2\pi-x}{n}\,.\sin\frac{3\pi-x}{n}\dots\sin\frac{(n\pi-x)}{n} = \sin x.$

171. $2^{n-1}\,.\sin\frac{\pi}{2n}\,.\,\sin\frac{3\pi}{2n}\,.\,\sin\frac{5\pi}{2n}\dots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n} = 1.$

172. $2^n\,.\,\sin^2\left(\frac{\pi}{4n}\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4n}\right)\sin^2\left(\frac{9\pi}{4n}\right)\dots\sin^2\frac{(4n-3)\pi}{4n} = 1.$

173. $2^n\,.\,\sin^2\left(\frac{3\pi}{4n}\right)\sin^2\left(\frac{7\pi}{4n}\right)\sin^2\left(\frac{11\pi}{4n}\right)\dots\sin^2\frac{(4n-1)\pi}{4n} = 1.$

174. $2^n\,.\,\sin\left(\frac{\pi}{6n}\right)\sin\left(\frac{7\pi}{6n}\right)\sin\left(\frac{13\pi}{6n}\right)\dots\sin\frac{(6n-5)\pi}{6n} = 1.$

175. $2^n\,.\,\sin\left(\frac{5\pi}{6n}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{6n}\right)\sin\left(\frac{17\pi}{6n}\right)\dots\sin\frac{(6n-1)\pi}{6n} = 1.$

(No. 169. bis 175. und §. 341. 1. bis 7.)

176. $\sin x = 2^n \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x \ldots \cos \frac{1}{2^n}x \cdot \sin \frac{1}{2^n}x.$

177. $\sin x = x \cos \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{4}x \cos \frac{1}{8}x \cos \frac{1}{16}x \ldots \cos 0.$

178. $\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \ldots \infty.$

(No. 176. bis 178. aus §. 341. 8. bis 10.)

179. $(2\cos x)^m = +(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x \ldots$

180. $(2\sin x)^m = +(\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x - \ldots$
für $m = 4n.$

181. $(2\sin x)^m = +(\cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\cos(m-4)x - \ldots$
für $m = 4n + $

182. $(2\sin x)^m = +(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x - \ldots$
für $m = 4n + $

183. $(2\sin x)^m = -(\sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m.m-1}{2}\sin(m-4)x - \ldots$
für $m = 4n + $

184. $\cos mx = +\cos x^m - \frac{m.m-1}{2}\cos x^{m-2}\sin x^2$
$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\cos x^{m-4}\sin x^4 \ldots$

185. $\sin mx = m\cos x^{m-1}\sin x - \frac{m.m-1.m-2}{2.3}\cos x^{m-3}\sin x^3 + \ldots$

(No. 179. bis 185. aus §. 343. 1. bis 7.)

186. $\begin{cases} \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2 = 2\cos x^2 - 1 \\ \cos 3x = \cos x^3 - 3\cos x \sin x^2 = 4\cos x^3 - 3\cos x \\ \cos 4x = \cos x^4 - 6\cos x^2 \sin x^2 + \sin x^4 \\ \qquad = 8\cos x^4 - 8\cos x^2 + 1. \\ \cos 5x = \cos x^5 - 10\cos x^3 \sin x^2 + 5\cos x \sin x^4 \\ \qquad = 16\cos x^5 - 20\cos x^3 + 5\cos x \\ \ldots \end{cases}$

(Aus §. 344.)

187. $\begin{cases} \sin 2x = 2\cos x \sin x \\ \sin 3x = 3\cos x^2 \sin x - \sin x^3 = 3\sin x - 4\sin x^3 \\ \sin 4x = 4\cos x^3 \sin x - 4\cos x \sin x^3 \\ \sin 5x = 5\cos x^4 \sin x - 10\cos x^2 \sin x^3 + \sin x^5 \\ \qquad = 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5 \\ \ldots \end{cases}$

(Aus §. 344.)

188. $\pi = \left(\sin\frac{m}{2n}\pi\right) \cdot \frac{2n}{m} \cdot \frac{2n}{2n-m} \cdot \frac{2n}{2n+m} \cdot \frac{4n}{4n-m} \cdot \frac{4n}{4n+m} \cdot \frac{6n}{6n-m} \ldots$

189. $\pi = \left(\cos\frac{m}{2n}\pi\right) \cdot \frac{2n}{n-m} \cdot \frac{2n}{n+m} \cdot \frac{2n}{3n-m} \cdot \frac{2n}{3n+m} \cdot \frac{4n}{5n-m} \cdot \frac{6n}{5n+m} \ldots$

(No. 188. 189. aus §. 337. 7. 8.)

[1]90. $\pi = 2 . \dfrac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12 \ldots \infty}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13 \ldots \infty}$.

[1]91. $\pi = 2 . \dfrac{4.4.8.8.12.12.16.16.20.20 \ldots \infty}{3.5.7.9.11.13.15.17.19.21 \ldots \infty} . \sqrt{2}$,

[1]92. $\pi = 3 . \dfrac{6.6.12.12.18.18.24.24.30.30 \ldots \infty}{5.7.11.13.17.19.23.25.29.31 \ldots \infty}$.

(No. 190. bis 192. aus §. 337. 9. bis 11.)

[1]93. ${}^{e}\pi = 1,144729\ 885849\ 400174\ 14342 \ldots$

[1]94. ${}^{10}\pi = 0,497149\ 872694\ 133854\ 35126 \ldots$

[1]95. $\pi = 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279$
$502884\ 197169\ 399375\ 105820\ 974944$
$592307\ 816406\ 286208\ 998628\ 034825$
$342117\ 067982\ 148086\ 513282\ 306647$
$093844\ 6 + \ldots$

[1]96. $\pi > \frac{3}{1}, \frac{333}{106}, \frac{103093}{33102}, \frac{208341}{66317}, \frac{833719}{265381}, \frac{4272943}{1360120},$
$\frac{80143857}{25510582}, \frac{245850922}{78256779}, \frac{1068866896}{340262731}, \frac{6167950454}{1963319607},$
$\frac{21053343141}{6701487259}, \frac{3587785776203}{1142027682070}, \frac{8958837768937}{2851718461508},$
$\frac{428224593349304}{136308121570117}, \frac{6134899525417045}{1952799169684491},$
$\frac{66627445592888887}{21208174623389167}, \frac{2646693125139304345}{842468587426513207}$ etc.

[1]97. $\pi < \frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{312689}{99532}, \frac{1146408}{364913}, \frac{5419351}{1725033},$
$\frac{165707065}{52746197}, \frac{411557987}{131002976}, \frac{2549491779}{811528438}, \frac{14885392687}{4738167652 1},$
$\frac{1783366216531}{567663097408}, \frac{5371151992734}{1709690779488}, \frac{139755218526789}{44485467702853},$
$\frac{57066749320677741}{18164910481143 74}, \frac{30246273033735921}{962768772685338},$
$\frac{430010946591069243}{136876735467187340}, \frac{3076704071730373588}{979345322893700547}$ etc.

[1]98. $\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.47051}$
$+ \frac{1}{7.113.4739.47051.499762} \ldots$

346.

Anmerkung. Ueberall ist nach (§. 308.) der Halbmesser des Kreises, in welchem man die goniometrischen Linien nimmt, gleich 1 gesetzt worden. Will man ihm eine beliebige Gröfse, z. B. r, geben, und die goniometrischen Linien für einen solchen Halbmesser durch *Sin*, *Cos*, *Sec*, *Tang*, *Cot*, *Cosec* bezeichnen, so ist z. B. für den Bogen x

$$Sin\,x = r\sin x, \qquad Cos\,x = r\cos x$$
$$Tang\,x = r\,tang\,x, \qquad Cot\,x = r\cot x$$
$$Sec\,x = r\sec x, \qquad Cosec\,x = r\,cosec\,x$$

und man darf also nur $r\sin x$, $r\cos x$ etc. statt $Sin\,x$, $Cos\,x$ etc. setzen, wenn man von goniometrischen Linien für den Halbmesser r zu anderen für den Halbmesser 1 übergehen will, und $\frac{Sin\,x}{r}$, $\frac{Cos\,x}{r}$ etc. statt $\sin x$, $\cos x$ etc. im umgekehrten Falle. Allein die Halbmesser anders als gleich 1 anzunehmen, ist wenigstens für den Gebrauch der goniometrischen Linien nicht nothwendig.

Anwendung der Goniometrie auf drei- und mehrseitige Figuren, oder Trigonometrie und Polygonometrie.

347.

Erläuterung. Da die goniometrischen Linien Winkel messen (§. 307.), indem zu einer gegebenen goniometrischen Linie nur bestimmte Winkel gehören, und umgekehrt, so kann man sich der goniometrischen Linien, überall wo Winkel vorkommen, statt der Winkel selbst bedienen. Aus goniometrischen Tafeln findet man zu gegebenen Winkeln die goniometrischen Linien und ihre Logarithmen, und umgekehrt zu gegebenen goniometrischen Linien die Winkel.

Nun hängen in jeder Figur die Seiten, Diagonalen und andere bestimmte Linien, nebst den Winkeln die sie einschliefsen, nothwendig von einander ab. Nur die bestimmenden Stücke der Figur können sich ohne Einflufs auf einander ändern. Sind sie gegeben, so sind

es auch alle übrigen Linien und Winkel. Es müssen also auch aus gegebenen bestimmenden Stücken einer Figur die übrigen Stücke gefunden werden können.

Winkel an sich würde man aber nicht durch Linien, von welchen sie abhängen, und umgekehrt Linien durch Winkel, vermittelst Zahlen ausdrücken, und folglich nicht finden können, weil Winkel und Linien, Gröſsen von verschiedener Art sind, und verschiedene Einheiten haben. Setzt man aber die goniometrischen Linien statt der Winkel, so sind alsdann nur Linien allein zu vergleichen; und folglich dienen die goniometrischen Linien: Winkel, Seiten und Diagonalen einer Figur, und überhaupt Linien in bestimmten Lagen aus den bestimmenden Stücken der Figur zu finden, welches ohne sie, in so fern man sich der Zahl bedienen will, nicht angehen würde. Sie sind also für die rechnende Geometrie, das heiſst, überall wo es darauf ankommt, aus gegebenen Stücken einer Figur andere Stücke zu finden, wesentlich nothwendig und unentbehrlich. Zugleich sind sie, wegen der Kürze der Ausdrücke, auch zu anderen, blos calculativen Untersuchungen nützlich und bequem.

*Die Anwendung der trigonometrischen Linien auf Ausrechnung beliebiger Stücke einer Figur, aus gegebenen bestimmenden Stücken derselben insbesondere, heiſst, wenn die Figuren dreiseitig oder Dreiecke sind, Trigonometrie, und wenn die Figuren mehr als drei Seiten haben, Polygonometrie. Für vierseitige Figuren nennt man sie auch wohl Tetragonometrie *).*

348.

Erläuterung. Um aus gegebenen bestimmenden Linien und Winkeln einer Figur andere Linien und Winkel zu finden, kommt es offenbar nur darauf an, aus den geometrischen Eigenschaften der Figur Gleichungen aufzustellen, die auſser den bestimmenden Stücken die gesuchten Stücke enthalten; denn alsdann darf man nur die gesuchten Gröſsen aus diesen Gleichungen, ohne daſs weiter geometrische Hülfsmittel nöthig wären, nach den Re-

---

*) Gewöhnlich pflegt man die Goniometrie von der Trigonometrie und Polygonometrie grade nicht abzusondern. Sie sind aber wesentlich verschieden. Die Goniometrie gehört ganz der Rechenkunst an und bedarf keiner Figur, die Trigonometrie und Polygonometrie gehört ganz der Geometrie. Die Goniometrie bedarf der Trigonometrie und Polygonometrie nicht, wohl aber bedürfen diese jener.

geln der Rechenkunst entwickeln. Dergleichen Gleichungen sollen **auflösende Gleichungen** heifsen.

In diesen auflösenden Gleichungen können auch wieder die gesuchten Stücke zu bestimmenden und umgekehrt von letzteren diese oder jene als gesucht betrachtet werden, so dafs jede Gleichung nicht blos eine, sondern so viel Aufgaben auflöset, als auf verschiedene Weise diese oder jene darin vorkommenden Gröfsen, bestimmende Stücke seyn können. Gesetzt z. B. man habe eine Gleichung zwischen den drei Seiten eines beliebigen Dreiecks und einem Winkel desselben, oder vielmehr irgend einer goniometrischen Linie dieses Winkels, so können von diesen vier Stücken entweder die drei Seiten, oder es können der Winkel und die beiden ihn einschliefsenden Seiten, oder der Winkel und die eine anliegende nebst der gegenüberliegenden Seite, in so fern diese die gröfste von den beiden ist, bestimmende Stücke seyn. Denn jede solche drei Stücke bestimmen das ganze Dreieck und folglich auch das vierte Stück. Die Gleichung enthält also die Auflösung von drei Aufgaben zugleich, nemlich: den einen Winkel aus den drei Seiten, die dritte Seite aus dem Winkel und den beiden ihn einschliefsenden Seiten und die dritte Seite aus dem Winkel und der einen anliegenden und der gröfsern gegenüberliegenden Seite zu finden. Diese Auflösungen der Gleichung kann man machen, ohne weitere Hülfe der Geometrie.

Enthalten Gleichungen zwischen beliebigen Stücken einer Figur, wie man sie aus den geometrischen Eigenschaften der Figur aufgestellt hat, mehr Stücke als ein gesuchtes, aufser den nothwendigen bestimmenden Stücken, so darf man nur zwischen ihnen so lange Stücke eliminiren, bis man Gleichungen findet, die nur ein Stück mehr enthalten, als zur Bestimmung der Figur nöthig sind. Diese letzten Gleichungen sind dann auflösende, in welchen jedes Stück das gesuchte seyn kann und aus den übrigen sich finden läfst.

Die nächste Anwendung der Goniometrie auf drei und mehrseitige Figuren, also der nächste Gegenstand der Trigonometrie und Polygonometrie, ist die Aufgabe: aus den bestimmenden Seiten und Winkeln, oder auch wohl aus den bestimmenden Seiten und Diagonalen und den Winkeln zwischen diesen Linien die übrigen Stücke der Figur zu finden. Nächstdem kommt der Inhalt der Figuren in Betracht und hierauf die Untersuchung beliebiger anderer Eigenschaften der Figuren, die sich nach Belieben vervielfältigen lassen.

A. Trigonometrie.

Rechtwinklige Dreiecke.

349.

Erläuterung. Das rechtwinklige Dreieck ist für trigonometrische und polygonometrische Auflösungen deshalb das einfachste und dasjenige, von welchem die Auflösung der Aufgaben von allen anderen Figuren ausgeht, weil die goniometrischen Linien selbst Seiten rechtwinkliger Dreiecke sind (§. 309.). Es kommt also zunächst auf die Auflösung der Aufgaben von rechtwinkligen Dreiecken an.

Da der rechte Winkel immer eins der bestimmenden Stücke seyn soll, indem nur von einem Dreiecke die Rede ist, dessen einer Winkel ein rechter ist, so kommen beim rechtwinkligen Dreiecke, außer dem rechten Winkel nur noch zwei bestimmende Stücke in Betracht. Die auflösenden Gleichungen (§. 348.) dürfen den rechten Winkel gar nicht mehr enthalten, weil es nicht mehr darauf ankommt diesen Winkel zu finden, welcher vielmehr gegeben ist. Sie dürfen also überhaupt nur drei Stücke enthalten, welche folgende seyn können:

1) *Ein spitzer Winkel und die den rechten Winkel einschließenden Seiten (die Catheten).*
2) *Ein spitzer Winkel und die ihn einschließenden Seiten (die Cathete und die Hypothenuse, welche den Winkel einschließen).*
3) *Ein spitzer Winkel nebst der ihm gegenüber liegenden und der, dem rechten Winkel gegenüber, ihm anliegenden Seite (die andere Cathete und die Hypothenuse).*
4) *Die drei Seiten.*

Je zwei von diesen drei Stücken bestimmen, nebst dem überall hinzukommenden rechten Winkel, zusammengenommen das ganze Dreieck und folglich das dritte Stück, so daß aus zwei Stücken jeder Gleichung das dritte muß gefunden werden können.

Mehr Fälle als die vier giebt es nicht; denn drei Winkel bestimmen das Dreieck nicht.

Die auflösenden Gleichungen für die vier obigen Fälle sind in folgendem Lehrsatze enthalten.

350.

350.

Lehrsatz. *Wenn die Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks* ABC (Fig. 170.) *durch* a *und* b, *die denselben gegenüberliegenden Winkel durch* α *und* β *und die Hypothenuse der Dreiecks durch* c *bezeichnet werden, so ist*

1. $\begin{Bmatrix} b = a \tan\beta \\ a = b \cot\beta \end{Bmatrix}$ *und* $\begin{Bmatrix} a = b \tan\alpha \\ b = a \cot\alpha \end{Bmatrix}$,
2. $\begin{Bmatrix} a = c \cos\beta \\ c = a \sec\beta \end{Bmatrix}$ *und* $\begin{Bmatrix} b = c \cos\alpha \\ c = b \sec\alpha \end{Bmatrix}$,
3. $\begin{Bmatrix} b = c \sin\beta \\ c = b \operatorname{cosec}\beta \end{Bmatrix}$ *und* $\begin{Bmatrix} a = c \sin\alpha \\ c = a \operatorname{cosec}\alpha \end{Bmatrix}$,
4. $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis. I. Es sey $EB = 1$ und DE auf BC senkrecht, so ist ED gleich $\tan\beta$. Nun sind die rechtwinkligen Dreiecke ACB und DEB ähnlich. Also ist $\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE}$, das heifst: $\frac{b}{a} = \frac{\tan\beta}{1}$, woraus $b = a \tan\beta$ folgt; welches die erste Gleichung (1.) ist.

Aus $b = a \tan\beta$ folgt, $a = \frac{b}{\tan\beta} = b \cdot \frac{1}{\tan\beta}$. Aber $\frac{1}{\tan\beta}$ ist gleich $\cot\beta$. Also ist $a = b \cot\beta$. Dieses die zweite Gleichung in (1.).

Ferner ist $\alpha + \beta = \varrho$, also $\beta = \varrho - \alpha$. Nun ist $\cot\beta = \cot(\varrho - \alpha) = \tan\alpha$; also ist die zweite Gleichung $a = b \cot\beta$ (1.) so viel als $a = b \tan\alpha$; welches die dritte Gleichung (1.) ist.

Eben so ist, wegen $\tan\beta = \tan(\varrho - \alpha) = \cot\alpha$, die erste Gleichung $b = a \tan\beta$ (1.) so viel als $b = a \cot\alpha$; welches die vierte Gleichung (1.) ist.

II. Es sey $DB = 1$, und wie vorhin DE auf BC senkrecht, so ist $EB = \cos\beta$. Nun ist in den ähnlichen Dreiecken ACB und DEB, $\frac{CB}{AB} = \frac{EB}{DB}$, das heifst: $\frac{a}{c} = \frac{\cos\beta}{1}$. Also ist $a = c \cos\beta$. Dieses ist die erste Gleichung in (2.).

Es folgt daraus $c = \frac{a}{\cos\beta} = a \cdot \frac{1}{\cos\beta}$, und weil $\frac{1}{\cos\beta} = \sec\beta$ ist, $c = a \sec\beta$. Dieses ist die zweite Gleichung in (2.).

Es sey $AF = 1$ und FG auf AC senkrecht, so ist $AG = \cos\alpha$. Nun ist in den ähnlichen Dreiecken ACB und AGF, $\frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AF}$, das heifst: $\frac{b}{c} = \frac{\cos\alpha}{1}$, woraus $b = c\cos\alpha$ folgt; welches die dritte Gleichung in (2.) ist.

Es folgt daraus $c = \frac{b}{\cos\alpha} = b \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = b\sec\alpha$; welches die vierte Gleichung in (2.) ist.

III. Es ist $\cos\beta = \cos(\varrho - \alpha) = \sin\alpha$. Also folgt aus der ersten Gleichung in (2.), nemlich aus $a = c\cos\beta$, $a = c\sin\alpha$; welches die dritte Gleichung in (3.) ist.

Aus der zweiten Gleichung in (2.), nemlich aus $c = a\sec\beta$, folgt, wenn man $\varrho - \alpha$ statt β setzt, $c = a\sec(\varrho - \alpha) = a\,\mathrm{cosec}\,\alpha$; welches die vierte Gleichung in (3.) ist.

Aus der dritten Gleichung in (2.) folgt auf dieselbe Weise, wenn man $\varrho - \beta$ statt α setzt, $b = c\cos(\varrho - \beta) = c\sin\beta$; welches die erste Gleichung in (3.) ist.

Aus der vierten Gleichung in (2.) folgt, wenn man wieder $\varrho - \beta$ statt α setzt, $c = b\sec(\varrho - \beta) = b\,\mathrm{cosec}\,\beta$; welches die zweite Gleichung in (3.) ist.

IV. Die Gleichung (4.) drückt den pythagorischen Lehrsatz aus (§. 124.).

351.

Anmerkung. Die Gleichungen des vorigen Lehrsatzes kommen bei ferneren goniometrischen Untersuchungen sehr häufig vor. Es ist daher gut, wenn man ihre unmittelbare leichte Herleitung aus der Figur merkt. Diese geschieht, wenn man sich bei dem Anblick eines rechtwinkligen Dreiecks einen Augenblick vorstellt, eine seiner Seiten, und zwar eine von denen, welche man in die Gleichung einführen will, sey der Halbmesser 1 selbst. Alsdann sind die andern beiden Seiten *unmittelbar* goniometrische Linien. Und wenn nun die für den Halbmesser genommene Seite nicht 1 ist, so multiplicirt man, um die andere Seite, welche für die goniometrische Linie genommen wurde, auszudrücken, diese letztere mit dem Werthe der für den Halbmesser genommenen Seite. Denn so viel mal jene Seite gröfser oder kleiner ist, ist es, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke, auch diese.

Man stelle sich z. B. vor CB in (Fig. 170.) sey der Halbmesser 1, so ist $AC = b$ die Tangente und $AB = c$ die Secante des Winkels β, oder ersteres die Cotangente, letzteres die Cosecante seines Complements α. Wäre also a gleich 1, so wäre

$$b = tang\,\beta = cot\,\alpha \text{ und } c = sec\,\beta = cosec\,\alpha.$$

Nun ist aber BC nicht gleich 1, sondern $= a$. Deshalb muſs man die goniometrischen Linien noch mit a multipliciren und findet also:

$$b = a\,tang\,\beta = a\,cot\,\alpha \text{ und}$$
$$c = a\,sec\,\beta = a\,cosec\,\alpha.$$

Dieses ist in (§. 350.) die erste und vierte Gleichung in (1.), die zweite Gleichung in (2.) und die vierte Gleichung in (3.).

Man nehme an, AC sey der Halbmesser 1, so ist $BC = a$ die Tangente und $AB = c$ die Secante des Winkels α, oder ersteres die Cotangente, letzteres die Cosecante seines Complements β. Wäre also b gleich 1, so wäre

$$a = tang\,\alpha = cot\,\beta \text{ und } c = sec\,\alpha = cosec\,\beta.$$

Nun ist aber AC nicht gleich 1, sondern gleich b. Also muſs man die goniometrischen Linien noch mit b multipliciren und findet also:

$$a = b\,tang\,\alpha = b\,cot\,\beta \text{ und}$$
$$c = b\,sec\,\alpha = b\,cosec\,\beta.$$

Dieses ist in (§. 350.) die dritte und zweite Gleichung in (1.), die vierte Gleichung in (2.) und zweite Gleichung in (4.).

Man nehme an, AB sey der Halbmesser 1, so ist $AC = b$ der Sinus und $BC = a$ der Cosinus des Winkels β, oder ersteres der Cosinus, letzteres der Sinus des Winkels α. Wäre also c gleich 1, so wäre

$$b = sin\,\beta = cos\,\alpha \text{ und } a = cos\,\beta = sin\,\alpha.$$

Nun ist aber AB nicht gleich 1, sondern gleich c. Also muſs man die goniometrischen Linien noch mit c multipliciren und findet also:

$$b = c\,sin\,\beta = c\,cos\,\alpha \text{ und}$$
$$a = c\,cos\,\beta = c\,sin\,\alpha.$$

Dieses ist in (§. 350.) die erste Gleichung in (3.), die dritte Gleichung in (2.), die erste Gleichung in (2.) und die dritte Gleichung in (3.).

So lassen sich alle Gleichungen (1. 2. 3.) (§. 350.) aus dem bloſsen Anblick der Figur aufstellen.

Auch die Gleichung (4.) (§. 350.) findet man unmittelbar, da sie blos den pythagorischen Lehrsatz ausdrückt.

352.

Anmerkung. Vermittelst der Gleichungen (§. 350.) lassen sich nun alle Aufgaben: aus den bestimmmenden Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke zu finden, auflösen.

Da aus je zwei von den drei Stücken, welche die Gleichungen (§. 350.) enthalten (§. 349.), das dritte gefunden werden kann, so läſst sich aus den Gleichungen folgendes finden.

Aus den Gleichungen (1.):

1) *Eine Cathete aus der andern und dem der ersten gegenüberliegenden spitzen Winkel.*
2) *Eine Cathete aus der andern und dem der letzten gegenüberliegenden spitzen Winkel.*
3) *Ein spitzer Winkel aus den beiden Catheten.*

Aus den Gleichungen (2.):

4) *Eine Cathete aus der Hypothenuse und dem zwischen beiden liegenden spitzen Winkel.*
5) *Die Hypothenuse aus der einen Cathete und dem zwischen beiden liegenden spitzen Winkel.*
6) *Ein spitzer Winkel aus der Hypothenuse und der Cathete, die ihn einschlieſsen.*

Aus den Gleichungen (3):

7) *Eine Cathete aus dem ihr gegenüber liegenden spitzen Winkel und der Hypothenuse.*
8) *Die Hypothenuse aus der einen Cathete und dem ihr gegenüber liegenden Winkel.*
9) *Ein spitzer Winkel aus der ihm gegenüber liegenden Cathete und der Hypothenuse.*

Aus den Gleichungen (4.):

10) *Die Hypothenuse aus den beiden Catheten.*
11) *Eine Cathete aus der andern und der Hypothenuse.*

Dieses sind auch, wie leicht zu sehen, grade die sämmtlichen Aufgaben, **welche vorkommen können.** *Wo es mehrere Auflösungen einer und derselben Aufgabe giebt, bedient man sich derjenigen, für welche die goniometrischen Linien in den Tafeln, die man grade zur Hand hat, zu finden sind. Die Auflösung der Aufgaben ist folgende.*

353.

Aufgabe. I. *Aus der Cathete* a (Fig. 170.) *und dem Winkel* β *die Cathete* b *zu finden.*

Auflösung. $b = a \; tang \, \beta$ (§. 350. 1. erste Gleichung).

Beispiel. Es sey $a = 275{,}048$, $\beta = 34° \; 55' \; 12''$, nach alter Bogen-Theilung zu 90 Graden, 60 Minuten, 60 Secunden etc., so erhält man nach den Vegaschen Tafeln:

$$^{10}275{,}04 = 0{,}4393959 + 2$$
$$126 \ldots \text{ Pr. Theil für } 8$$
$$^{10}tang \; 34° \; 55' \; 12'' = 0{,}7576878 - 1$$
$$362 \ldots \text{ Pr. Theil für } 12''$$
$$^{10}(a \; tang \, \beta) = 1{,}1971326 + 1 = {}^{10}b$$
$$= 0{,}1971326 + 2.$$
$$\text{Also } b = 137{,}463$$

Aufgabe. II. *Aus der Cathete* a *und dem Winkel* α *die Cathete* b *zu finden.*

Auflösung. $b = a \cot \alpha = \frac{a}{tang \, \alpha}$ (§. 350. I. vierte Gleichung).

Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ganz ähnlich.

Aufgabe. III. *Aus den Catheten* a *und* b *den Winkel* β *zu finden.*

Auflösung. $tang \, \beta = \frac{b}{a}$ vermöge (§. 350. I. erste Gleichung).

Beispiel. Es sey $a = 6801{,}32$ und $b = 148{,}0053$, so erhält man:

$$^{10}148{,}0053 = 1{,}1702617 + 1, \text{ mit Einschluſs des Prop. Theils für } 0053.$$
$$^{10}6801{,}32 = 0{,}7635268 + 3, \text{ desgl. für } 2.$$
$$^{10}\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}4067349 - 2$$
$$= 8{,}4067349 - 10 = {}^{10}(tang \, \beta).$$
$$\text{Also } \beta = 1° \; 27' \; 40{,}9''.$$

Aufgabe. IV. *Aus der Hypothenuse* c *und dem Winkel* β *die Cathete* a *zu finden.*

Auflösung. $a = c \cos \beta$ (§. 350. 2. erste Gleichung). Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

Aufgabe. V. *Aus der Cathete* a *und dem Winkel* β *die Hypothenuse* c *zu finden.*

Auflösung. $c = a \sec\beta$ (§. 350. 2. zweite Gleichung). Da man die Logarithmen der **Secanten** in den Tafeln nicht findet, so muſs man statt $c = a \sec\beta$ den Ausdruck

$$c = \frac{a}{\cos\beta}$$

nehmen.

Beispiel. Es sey $a = 100,1587$, $\beta = 89^\circ.15'.4,6''$, so erhält man

$^{10}100,1587 = 1,0006549 + 1$ mit Einschluſs der Prop. Theile für 87 (Vegasche Tafel S. 180.)

Abgezogen

$^{10}\sin 89^\circ.15'.4,6''$
$= {}^{10}\cos 0^\circ.44'.55,4'' = 0,1161850 - 2$ (Vegasche Tafel S. 198.)

$$^{10}\left(\frac{a}{\cos\beta}\right) = 0,8844699 + 3.$$

Also $c = 7664,253$.

Aufgabe. VI. *Aus der Hypothenuse c und der Cathete a den eingeschlossenen Winkel β zu finden.*

Auflösung. α) $\cos\beta = \frac{a}{c}$, vermöge (§. 350. 2. erste Gleichung).

β) Ist der Winkel β **sehr klein**, so weichen die Cosinus verschiedener Winkel nur sehr wenig von einander ab. Man kann also alsdann aus $\cos\beta = \frac{a}{c}$, wenn auch a und c **genau** gegeben sind, den Winkel β nicht mit **eben** der Schärfe finden. Um in solchem Falle β **genauer** zu finden, berechne man den **Sinus** von $\frac{1}{2}\beta$, wie folgt. Es ist $\cos\beta = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\beta^2$ (§. 345. 35.). Also ist $1 - 2\sin\frac{1}{2}\beta^2 = \frac{a}{c}$, Daraus folgt $1 - \frac{a}{c} = 2\sin\frac{1}{2}\beta^2$, oder $\frac{c-a}{2c} = \sin\frac{1}{2}\beta^2$, oder

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)}.$$

Beispiel. Es sey $a = 8571,23$ und $c = 8571,31$, so erhält man, wenn man nach dem ersten Ausdruck $\cos\beta = \frac{a}{c}$ rechnet,

$$^{10}a = 1,9330431 + 2$$
$$^{10}c = 0,9330472 + 3$$
$$^{10}\left(\frac{a}{c}\right) = 9,9999959 - 10.$$

Dieser Logarithme gehört zu dem Cosinus des Winkels $0^\circ.15'.0''$. Aber die Logarithmen der Cosinus von Winkeln, die um 10 Secunden grösser oder kleiner sind, sind nur in der letzten Stelle um 1 von dem obigen verschieden (Vegasche Tafeln S. 194.). Man ist also mit dem Winkel β um 10 Secunden ungewiss; denn er kann möglicherweise um 5 Secunden grösser oder kleiner seyn.

Rechnet man dagegen nach dem zweiten Ausdruck $\sin\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
{}^{10}(c-a) &= {}^{10}0,08 &&= 0,9030900-2\\
{}^{10}(2c) &= {}^{10}17142,62 &&= 0,2340772+4\\
{}^{10}\left(\frac{c-a}{2c}\right) & &&= 0,6690128-6\\
{}^{10}\left(\sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)}\right) &= 7,3345064-10 &&= {}^{10}(\sin\tfrac{1}{2}\beta).
\end{aligned}$$

Dieser Logarithme giebt den Winkel $\frac{1}{2}\beta$ nach der Vegaschen Tafel (S. 193.) gleich $0^\circ.7'.25,6''$, also $\beta = 0^\circ.14'.51''$, und zwar bis auf eine Secunde genau. Dieser Winkel ist, wie man sieht, von dem Winkel $0^\circ.15'$, nach der ersten Rechnung, wirklich um 9 Secunden verschieden und also um so viel genauer.

Aufgabe. VII. *Aus der Hypothenuse* c *und dem Winkel* β *die gegenüberliegende Cathete* b *zu finden.*

Auflösung. $b = c\sin\beta$ (§. 350. 3. erste Gleichung). Die Rechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

Aufgabe. VIII. *Aus der Cathete* b *und dem ihr gegenüberliegenden Winkel* β *die Hypothenuse* c *zu finden.*

Auflösung. $c = b\,\mathrm{cosec}\,\beta$ (§. 350. 3. zweite Gleichung), oder, wegen der Logarithmen der Tafeln,

$$c = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Die Rechnung in Zahlen ist der in (V.) ähnlich.

Aufgabe. IX. *Aus der Cathete* b *und der Hypothenuse* c *den Winkel* β *zu finden.*

Auflösung. α) $\sin\beta = \frac{b}{c}$, vermöge (§. 350. 3. erste Gleichung).

β) Kommt der Winkel β einem rechten nahe, so ist es ein Fall, wie in (VI. β). Man thut dann besser, den Sinus des halben Winkels zu berechnen. Es ist $\sin\beta = \cos(\varrho-\beta) = 1 - 2\sin\frac{1}{2}(\varrho-\beta)^2$, also

$1 - 2\sin\frac{1}{2}(\varrho - \beta)^2 = \frac{b}{c}$, woraus $2\sin\frac{1}{2}(\varrho-\beta)^2 = 1 - \frac{b}{c}$
$= \frac{c-b}{c}$, und mithin

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varrho - \beta) = \sqrt{\left(\frac{c-b}{2c}\right)}$$

folgt.

Die Rechnung in Zahlen ist der in (VI. β.) ähnlich.

Aufgabe. X. *Aus den beiden Catheten* a *und* b *die Hypothenuse* c *zu finden.*

Auflösung. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ (§. 350. 4.).

Beispiel. Es sey $a = 80543{,}1$, $b = 49571{,}5$. Wollte man ganz mit Logarithmen rechnen, so müßte man die Logarithmen von 80543,1 und 49571,5 suchen, sie mit 2 multipliciren und zu den Producten wieder die Zahlen nehmen, welche a^2 und b^2 wären. Dieses aber ist wohl beschwerlicher, als wenn man a und b mit sich selbst multiplicirt und die Quadrate addirt. Man findet

$$\begin{aligned} a^2 &= 6487190957{,}61 \\ b^2 &= 2457333612{,}25 \\ \hline a^2 + b^2 &= 8944524569{,}76 \\ {}^{10}(a^2 + b^2) &= 1{,}9515573 + 8 \\ {}^{10}(\sqrt{(a^2 + b^2)}) &= 0{,}9757786 + 4 \\ c &= 94575{,}5. \end{aligned}$$

Aufgabe. XI. *Aus der Hypothenuse* c *und der Cathete* a, *die Cathete* b *zu finden.*

Auflösung. $b = \sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{((c+a)(c-a))}$ vermöge (§. 350. 4.).

Beispiel. Es sey $c = 508{,}137$ und $a = 483{,}081$, so ist $c + a = 991{,}218$ und $c - a = 25{,}056$, also

$$\begin{aligned} {}^{10}(c+a) &= 0{,}9961692 + 2 \\ {}^{10}(c-a) &= 0{,}3989117 + 1 \\ \hline {}^{10}((c+a)(c-a)) &= 2{,}3950809 + 2 \\ {}^{10}(\sqrt{(c+a)(c-a)}) &= 1{,}1975404 + 1 = {}^{10}b; \\ b &= 157{,}594. \end{aligned}$$

354.

Erläuterung. Der Inhalt eines Dreiecks muß sich jedesmal aus den Stücken, die das Dreieck bestimmen, berechnen lassen, weil mit den bestimmenden Stücken das ganze Dreieck gegeben ist.

Die bestimmenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks sind

I. *zwei Seiten, und zwar:*
1) *die beiden Catheten; oder*
2) *die Hypothenuse und eine Cathete.*

II. *Eine Seite und ein spitzer Winkel, und zwar:*
3) *eine Cathete und der anliegende spitze Winkel; oder*
4) *eine Cathete und der gegenüberliegende spitze Winkel; oder*
5) *die Hypothenuse und ein spitzer Winkel.*

Aus diesen Stücken mufs sich also der Inhalt finden lassen; welches folgende Aufgaben giebt.

355.

Aufgabe. I. *Aus den beiden Catheten* a *und* b *des rechtwinkligen Dreiecks* ABC (Fig. 170.) *den Inhalt des Dreiecks zu finden.*

Auflösung. Die Cathete b ist die Höhe des Dreiecks über der Grundlinie a, weil AC auf CB senkrecht ist, und umgekehrt: a ist die Höhe über der Grundlinie b. Also ist der Inhalt des Dreiecks, welcher durch $\triangle$ bezeichnet werden mag, zu Folge (§. 162. IV.)

$$1. \quad \triangle = \frac{ab}{2} = \tfrac{1}{2}a.b = \tfrac{1}{2}b.a.$$

Die Rechnung nach diesem Ausdrucke kann auch durch Logarithmen geschehen und hat keine Schwierigkeit. Man mufs nur, damit von den möglich-kleinsten Zahlen die Logarithmen zu nehmen sind, nicht das Product ab, sondern einen der Factoren halbiren. In den meisten Fällen ist es indessen kürzer, blos zu multipliciren, weil das Aufschlagen von drei Zahlen in den Tafeln mehr Mühe macht als eine einfache Multiplication. Rechnet man ohne Logarithmen, so kann man, wenn einer der Factoren mit 2 aufgeht, welches an der letzten Ziffer zu erkennen, den Factor, ehe man multiplicirt, halbiren. Geht kein Factor mit 2 auf, so multiplicirt man erst und halbirt dann das Product. Multiplications-Tafeln, deren in (§. 160. Rechenkunst) erwähnt, kommen bei dieser Inhalts-Berechnung ebenfalls zu Statten.

Aufgabe. II. *Aus der Hypothenuse* c *und der einen Cathete* a *den Inhalt des Dreiecks* $\triangle$ *zu finden.*

Auflösung. a) Da $\triangle = \frac{ab}{2}$ (I.) und $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ (§. 350. 4.) ist, so ist

$$2.\quad \Delta = \frac{a\sqrt{(c^2 - a^2)}}{2} = \frac{a\sqrt{((c-a)(c+a))}}{2},$$

wodurch man Δ aus a und c findet.

β) Es ist auch $b = a \tan \beta = c \sin \beta$ und $a = c \cos \beta$, also

$$3.\quad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Nimmt man aus diesem Ausdruck, oder wenn der Winkel β sehr klein ist, β aus

$$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)} \quad (\S.\ 353.\ \text{VI.}\ \beta.),$$

so erhält man $\frac{ab}{2}$, oder

$$4.\quad \Delta = \tfrac{1}{2}a^2 \tan\beta = \tfrac{1}{2}\,a\,c\sin\beta.$$

Die Ausdrücke (3. und 4.) sind zur Rechnung mit Logarithmen ebenfalls bequem.

Beispiel. Es sey $c = 837{,}24$ und $a = 651{,}01$, so ist

$$
\begin{aligned}
{}^{10}a &= 1{,}8135877 + 1\\
{}^{10}c &= 0{,}9228500 + 2\\
{}^{10}\left(\frac{a}{c}\right) &= 0{,}8907377 - 1\\
&= 9{,}8907377 - 10 = {}^{10}\cos\beta.
\end{aligned}
$$

$$\text{Also } \beta = 38^\circ.\,57'.\,42''$$

$$
\begin{aligned}
{}^{10}\tan\beta &= 9{,}9077749 - 10\\
{}^{10}(a^2) = 2\,.\,{}^{10}a &= 3{,}6271754 + 2\\
&\quad 0{,}5349503 + 5 = {}^{10}(a^2 \tan\beta) = {}^{10}(2\Delta).
\end{aligned}
$$

Also $2\Delta = 342728{,}6$ und
$\Delta = 171369{,}2.$

Aufgabe. III. *Aus der Cathete* a *und dem anliegenden spitzen Winkel* β *den Inhalt des Dreiecks* Δ *zu finden.*

Auflösung. Es ist $a \tan\beta = b$, also, da $\Delta = \frac{ab}{2}$ ist (I.),

$$5.\quad \Delta = \tfrac{1}{2}a^2 \tan\beta.$$

Die Berechnung in Zahlen hat keine Schwierigkeit. Die Division mit 2 geschieht zuletzt.

Aufgabe. IV. *Aus der Cathete* a *und dem gegenüber liegenden spitzen Winkel* α *den Inhalt des Dreiecks* Δ *zu finden.*

Auflösung. Es ist $b = a \cot\alpha$, also, da $\Delta = \frac{ab}{2}$ ist (I.),

$$6. \quad \triangle = \tfrac{1}{2} a^2 \cot \alpha,$$

die Berechnung in Zahlen wie (III.).

Aufgabe. V. *Aus der Hypothenuse* c *und dem spitzen Winkel* β *den Inhalt des Dreiecks* $\triangle$ *zu finden.*

Auflösung. Es ist $a = c \cos \beta$ und $b = c \sin \beta$, also da $\triangle = \frac{ab}{2}$ ist

$$7. \quad \triangle = \tfrac{1}{2} c^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Da $2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta$, so ist auch

$$8. \quad \triangle = \tfrac{1}{4} c^2 \sin 2\beta.$$

Der Ausdruck (8.) ist zur Berechnung bequemer als (7.), sobald Secunden und kleinere Theile von dem Winkel β gegeben sind, für welche man die Proportional-Theile der Logarithmen in den Tafeln suchen muſs, weil die Ergänzung alsdann nur einmal, hingegen in Ausdruck (7.) zweimal, für den Sinus und für den Cosinus zu nehmen ist.

Beliebige Dreiecke.

356.

Erläuterung. Die bestimmenden Stücke eines beliebigen Dreiecks sind zu Folge (§. 56.):

1) *eine Seite und zwei Winkel;*
2) *zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;*
3) *zwei Seiten und der eine anliegende Winkel. Liegt derselbe der gröſsern Seite gegenüber, so ist nur ein Dreieck möglich. Liegt er der kleinern gegenüber, so sind zwei Dreiecke möglich.*
4) *Die drei Seiten.*

Die auflösenden Gleichungen (§. 348.), *in welchen auſser den bestimmenden Stücken noch irgend ein viertes Stück vorkommen soll, müssen also enthalten:*

1) *zwei Seiten und die beiden anliegenden Winkel;*
2) *zwei Seiten, einen eingeschlossenen und einen anliegenden Winkel;*
3) *drei Seiten und einen Winkel.*

Vermittelst dieser Gleichungen müssen jedesmal aus den bestimmenden Stücken die übrigen gefunden werden können.

Man findet diese Gleichungen aus folgendem Lehrsatze.

357.

Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC (Fig. 171. I. und II.) *durch* a, b, c *und die*

gegenüber liegenden Winkel durch α, β, γ, *oder auch durch* cb, ac *und* ba *bezeichnet, so ist*

1. $b \sin\gamma = c \sin\beta$ *oder* $b \sin ba = c \sin ca$,
2. $c \sin\alpha = a \sin\gamma$ *oder* $c \sin cb = a \sin ab$,
3. $a \sin\beta = b \sin\alpha$ *oder* $a \sin ac = b \sin bc$;
4. $c \cos\beta + b \cos\gamma = a$ *oder* $c \cos ca + b \cos ba = a$,
5. $a \cos\gamma + c \cos\alpha = b$ *oder* $a \cos ab + c \cos cb = b$,
6. $b \cos\alpha + a \cos\beta = c$ *oder* $b \cos bc + a \cos ac = c$.

Beweis. I. Wenn z. B. AD auf BC senkrecht ist, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck ACD, zu Folge (§. 350. oder 351.) $AD = b \sin\gamma = b \sin ba$ und in dem rechtwinkligen Dreiecke ABD, $AD = c \sin\beta = c \sin ca$. Also ist

$$b \sin\gamma = c \sin\beta \text{ oder } b \sin ba = c \sin ca;$$

welches die erste Gleichung des Lehrsatzes ist.

Die zweite und dritte Gleichung findet man aus der ersten durch bloſses *Weiterrücken der Buchstaben.* Es ist besser, sie nicht erst aus der Figur nehmen. Da nemlich die erste Gleichung, wie man sieht, für jede Gestalt des Dreiecks gilt, so gilt sie auch, wenn man z. B. b statt a, hierauf c statt b zur Grundlinie nimmt, welches geschieht wenn man mit allen Buchstaben um einen weiter geht. Auf a folgt b, auf b, c, auf c wieder a, auf α folgt β, auf β, γ und auf γ wieder α. Schreibt man auf diese Weise statt aller Buchstaben die zunächst folgenden, so kann man aus der ersten Gleichung die zweite und aus dieser die dritte unmittelbar *niederschreiben.* Geht man über die letzte Gleichung hinaus, so muſs man wieder die erste finden, welches zugleich zur Probe der Verwandlung dient. Dieses Verfahren ist besser, leichter und sicherer, als wenn man Gleichungen, *die, wie hier, nur in den Buchstaben verschieden sind,* aus der Figur nimmt.

II. In dem rechtwinkligen Dreieck ABD ist $BD = c \cos\beta$ und in dem rechtwinkligen Dreieck ACD ist $\pm CD = b \cos\gamma$. Nun ist BC oder a gleich $BD \pm CD$. Also ist

$$c \cos\beta + b \cos\gamma = a \text{ oder } c \cos ca + b \cos ba = a.$$

Dieses ist die vierte Gleichung des Lehrsatzes. Die fünfte und sechste findet man aus der vierten wieder durch bloſses Weiterrücken der Buchstaben.

Aus diesen Gleichungen findet man die auflösenden Gleichungen des Dreiecks, wie folgt.

358.

Lehrsatz. *Die auflösenden Gleichungen* (§. 356.) *für ein beliebiges Dreieck* ABC (Fig. 171. I. u. II.) *sind folgende:*

1. $b \sin\gamma = c \sin\beta$
2. $c \sin\alpha = a \sin\gamma$
3. $a \sin\beta = b \sin\alpha$

für zwei Seiten und die beiden anliegenden Winkel.

4. $a \sin\gamma = c(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = c\sin(\beta+\gamma)$
5. $a \sin\beta = b(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = b\sin(\beta+\gamma)$
6. $b \sin\alpha = a(\sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha) = a\sin(\gamma+\alpha)$
7. $b \sin\gamma = c(\sin\gamma\cos\alpha + \cos\gamma\sin\alpha) = c\sin(\gamma+\alpha)$
8. $c \sin\beta = b(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = b\sin(\alpha+\beta)$
9. $c \sin\alpha = a(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = a\sin(\alpha+\beta)$

für zwei Seiten und einen eingeschlossenen und einen anliegenden Winkel.

10. $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$
11. $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$
12. $c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta = b^2$

für drei Seiten und einen Winkel.

Beweis. I. Die ersten drei Gleichungen sind die Gleichungen (1. 2. 3.) in (§. 357.) selbst.

II. *A.* Multiplicirt man in (§. 357.) die Gleichung (1.) mit $\cos\gamma$ und die Gleichung (4.) mit $\sin\gamma$, so erhält man

$$b\sin\gamma\cos\gamma = c\sin\beta\cos\gamma \text{ und}$$
$$c\cos\beta\sin\gamma = b\cos\gamma\sin\gamma = a\sin\gamma.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$c\cos\beta\sin\gamma = a\sin\gamma - c\sin\beta\cos\gamma, \text{ oder}$$
$$a\sin\gamma = c(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma),$$

oder auch, weil $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma)$ ist (§. 345. 22.),

$$a\sin\gamma = c\sin(\beta+\gamma).$$

Dieses ist die Gleichung (4.) des Lehrsatzes. Durch Weiterrücken der Buchstaben findet man aus derselben die Gleichungen (6. und 8.).

Dividirt man die Gleichung (4.) des Lehrsatzes durch die Gleichung (1.), so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta},$$

oder

$$a\sin\beta = b(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = b\sin(\beta+\gamma).$$

Dieses ist die Gleichung (6.) des Lehrsatzes, und durch Weiterrücken der Buchstaben findet man daraus die Gleichungen (7. und 9.).

B. Es ist auch wegen $\alpha+\beta+\gamma=2\varrho$, $\alpha=2\varrho-(\beta+\gamma)$ und da $\sin(2\varrho-(\beta+\gamma))=\sin(\beta+\gamma)$ ist (§. 345. 28.) $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$. Dieses in die Gleichung (2.) gesetzt giebt ebenfalls $c\sin(\beta+\gamma)=a\sin\gamma$, wie (4.) und durch Weiterrücken der Buchstaben die Gleichungen (6. und 8.). Ferner die Gleichungen (5. 7. und 9.), wie in (*A.*).

C. Da in (*A.*) $a\sin\gamma=c(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)$ und in (*B.*), unabhängig von dem Satze (§. 316.), $a\sin\gamma=c\sin(\beta+\gamma)$ gefunden wurde, so folgt daraus auch, hier mit Hülfe des Dreiecks, der Satz

$$\sin(\beta+\gamma)=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma \quad (\text{§. } 316.)$$

aber unmittelbar nur für solche Winkel β und γ, die, wie im Dreieck, zusammen kleiner als zwei Rechte sind. Mann kann zwar den Satz weiter auch auf gröſsere Winkel ausdehnen und ihn folglich auch allgemein aus dem Dreiecke beweisen. Der Beweis ist aber weniger natürlich, und weitläuftiger als der Beweis (§. 316.).

III. *A.* Die Gleichungen (§. 357. 1. und 4.) sind

$$b\sin\gamma-c\sin\beta=0 \text{ und}$$
$$b\cos\gamma+c\cos\beta=a.$$

Man quadrire sie und addire die Quadrate, so erhält man

$$b^2\sin\gamma^2-2bc\sin\gamma\sin\beta+c^2\sin\beta^2$$
$$+b^2\cos\gamma^2+2bc\cos\gamma\cos\beta+c^2\cos\beta^2=a^2, \text{ oder}$$
$$b^2+2bc(\cos\gamma\cos\beta-\sin\gamma\sin\beta)+c^2=a^2, \text{ oder}$$
$$b^2+2bc\cos(\beta+\gamma)+c^2=a^2, \text{ oder weil } \beta+\gamma=2\varrho-\alpha,$$
$$b^2-2bc\cos\alpha+c^2=a^2;$$

welches die Gleichung (11.) des Lehrsatzes ist.

B. Auch kann man auf folgende Weise verfahren.

Man multiplicire in (§. 357.) die Gleichung (4.) mit a, die Gleichung (5.) mit b und die Gleichung (6.) mit c, so erhält man

$$ac\cos\beta+ab\cos\gamma=a^2,$$
$$ba\cos\gamma+bc\cos\alpha=b^2,$$
$$cb\cos\alpha+ca\cos\beta=c^2.$$

Man ziehe die erste Gleichung von der Summe der beiden andern ab, so erhält man

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2, \text{ oder}$$
$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=a^2.$$

Dieses ist ebenfalls die Gleichung (11.) des Lehrsatzes. Durch Weiterrücken der Buchstaben findet man aus derselben die Gleichungen (12. und 10.).

359.

Erläuterung. Die Aufgaben: aus den bestimmenden Stücken eines Dreiecks die übrigen Stücke zu finden, sind nun folgende:

Gegeben.	*Gesucht.*
Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,	1) *eine zweite Seite.*
Eine Seite, ein an- und ein abliegender Winkel,	2) *die zwischen den beiden Winkeln liegende Seite,*
	3) *die dritte Seite.*
Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,	4) *ein zweiter Winkel,*
	5) *die dritte Seite.*
Zwei Seiten und ein anliegender Winkel,	6) *der andere anliegende Winkel,*
	7) *der eingeschlossene Winkel,*
	8) *die dritte Seite.*
Drei Seiten.	9) *Ein Winkel.*

Die Auflösung dieser Aufgaben geschieht durch die auflösenden Gleichungen (§. 358.) wie folgt.

360.

Aufgabe. I. *Aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln eines Dreiecks, eine der beiden übrigen Seiten zu finden, also*

aus a, β *und* γ .... c *oder* b
aus b, γ *und* α .... a *oder* c
und aus c, α *und* β .... b *oder* a.

Auflösung. A. Die auflösenden Gleichungen (4. und 6.) (§. 358.) geben:

$$1.\ \begin{cases} c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} \text{ und } b = a\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}, \text{ also, weiterrückend,} \\ a = b\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+\alpha)} \text{ und } c = b\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\alpha)}, \\ b = c\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ und } a = c\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

B. Mit den gegebenen drei Stücken, z. B. a, β und γ, nemlich mit einer Seite und zwei Winkeln, ist nur ein Dreieck möglich, also kann das gesuchte vierte Stück z. B. c, nur einen Werth haben.

C. Sind die Winkel, von welchen in diesen Ausdrücken die Sinus vorkommen, entweder sehr klein oder einem oder zwei rechten Winkeln sehr nahe, und man verlangt eine grofse Genauigkeit, so kann man sich der Reihen (§. 528.) bedienen, welche die Sinus und Cosinus durch den Bogen ausdrücken, nemlich der Reihen

$$2. \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3....7} \dots \text{ und} \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.4....6} \dots \end{cases}$$

Wäre z. B. der Winkel γ in dem Ausdruck $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$ sehr klein oder einem rechten sehr nahe, und man bezeichnet die Länge des im ersten Fall zu dem Winkel γ selbst, im andern zu seinem Supplement gehörigen Bogens, für den Halbmesser 1, durch γ_1, so kann man setzen:

$$3. \quad c = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\left(\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{2.3} + \frac{\gamma_1^5}{2.3.4.5} - \dots\right).$$

Es werden, weil γ_1 sehr klein vorausgesetzt wird, in der Regel nur die beiden ersten Glieder nöthig seyn. Wäre $\beta + \gamma$ sehr klein, und man bezeichnet die dazu gehörigen Bogen durch β_1 und γ_1, so wäre

$$4. \quad c = a\frac{\gamma_1 - \frac{\gamma_1^3}{2.3} + \frac{\gamma_1^5}{2.3.4.5} \dots}{(\beta_1+\gamma_1) - \frac{(\beta_1+\gamma_1)^3}{2.3} + \frac{(\beta_1+\gamma_1)^5}{2.3.4.5} - \dots}.$$

Wäre z. B. γ einem rechten Winkel sehr nahe, so schreibe man statt $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$, $c = a\frac{\cos(\varrho-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}$. Alsdann ist

$$5. \quad c = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\left(1 - \frac{(\varrho-\gamma_1)^2}{2} + \frac{(\varrho-\gamma_1)^4}{2.3.4} - \dots\right);$$

und so bei den andern Winkeln. Die Länge der Bogen für eine beliebige Zahl von Graden, Minuten und Secunden findet man gewöhnlich in den trigonometrischen Tafeln schon berechnet, z. B. in den Vegaschen Tafeln auf (S. 297.).

D. Verlangt man übrigens nicht mehr als diejenige Genauigkeit, welche die Logarithmen-Tafeln geben, so sind die allgemeinen Ausdrücke (1.) für alle Fälle gleich passend; denn obgleich allerdings die Sinus, z. B. von Winkeln, die einem rechten nahe kommen, nur wenig von einander abweichen, und wie die Tafeln zeigen (Vegasche Tafeln S. 193.) ein Winkel sogar von einem rechten um 90 Secunden oder $1\frac{1}{2}$ Minuten verschieden seyn kann, ohne dafs sich der Logarithme seines Sinus auch nur in der siebenten Decimalstelle änderte, so ist dennoch die Genauigkeit immer die nemliche, eben weil die Logarithmen nicht von einander verschieden sind. Denn gesetzt in dem Ausdrucke

c

$$c = a\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

läge γ zwischen 90^b und 90°, $1\frac{1}{2}'$, so ist nach den Tafeln für alle verschiedenen Werthe von γ der Logarithme von $\sin\gamma$ der nemliche. Dieses beweiset, dafs die Verschiedenheit der Winkel γ auf c, in denjenigen Decimalstellen, bis auf welche man c findet, keinen Einflufs hat. Hätte man daher den Logarithmen von $\sin\gamma$ auch genauer, so könnte daraus doch immer nur eine Abweichung der höhern Decimalstellen von c entstehen. Daher giebt der allgemeine Ausdruck sein Resultat in allen Fällen mit der nemlichen Genauigkeit.

Beispiel für den allgemeinen Ausdruck. Es sey $\alpha = 1758{,}043$, $\beta = 35°.41'.3''$ und $\gamma = 121°.8'.25''$, so ist $\beta + \gamma = 156°.49'.28''$ und

$$\begin{aligned}
{}^{10}a &= 0{,}2450296+3\\
+{}^{10}(\sin\gamma) = {}^{10}(\cos 31°.8'.25'') &= \underline{0{,}9324247-1}\\
&\ 1{,}1774542+2.\\
\text{Abgezogen}\ {}^{10}(\sin(\beta+\gamma)) = {}^{10}(\sin 23°.10'.32'') &= \underline{0{,}5949997-1}\\
\text{giebt}\ {}^{10}c &= 0{,}5824545+3;\\
\text{also}\ c &= 3823{,}44.
\end{aligned}$$

Aufgabe. II. *Aus einer Seite eines Dreiecks und den beiden, sie nicht einschliefsenden Winkeln, die zwischen diesen beiden Winkeln liegenden Seiten zu finden, also*
aus a, α *und* γ .... b, *oder aus* a, α *und* β .... c;
aus b, β *und* α .... c, *oder aus* b, β *und* γ .... a;
aus c, γ *und* β .... a, *oder aus* c, γ *und* α .... b.

Auflösung. *A.* Die auflösenden Gleichungen (6. und 9. §. 358.) geben

$$6.\begin{cases}
b = a\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} \text{ und } c = a\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}, \text{ und durch Weiterrücken,}\\
c = b\dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\beta}, \quad a = b\dfrac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta},\\
a = c\dfrac{\sin(\gamma+\beta)}{\sin\gamma}, \quad b = c\dfrac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma}.
\end{cases}$$

B. Mit den gegebenen drei Stücken, z. B. a, α und γ, ist wiederum nur ein Dreieck möglich; also kann das gesuchte vierte Stück, z. B. b, nur einen Werth haben.

C. Wegen des Falles, wenn man bei kleineren Winkeln eine gröfsere Genauigkeit verlangt, findet die obige Bemerkung Statt.

D. Die Berechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

Aufgabe. III. *Aus einer Seite eines Dreiecks und zweien, dieselbe nicht einschliessenden Winkeln, die andere anliegende Seite zu finden, also*

aus a, α *und* γ .... c, *oder aus* a, α *und* β .... b;
aus b, β *und* α ...., a, *oder aus* b, β *und* γ .... c;
aus c, γ *und* β .... b, *oder aus* c, γ *und* α .... a.

Auflösung. *A.* die auflösenden Gleichungen (2. und 3. §. 358.) geben

$$7. \begin{cases} c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad b = a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \text{ also durch Weiterrücken,} \\ a = b\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad c = b\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \\ b = c\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad a = c\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}. \end{cases}$$

B. Mit den gegebenen drei Stücken, z. B. *a*, α und γ, ist nur ein Dreieck möglich; also kann das gesuchte vierte Stück, z. B. c, nur einen Werth haben.

C. Die Berechnung in Zahlen ist der in (I.) ähnlich.

Aufgabe. IV. *Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel einen der beiden übrigen Winkel zu finden, also*

aus a, b, γ .... α *oder* β,
aus b, c, α .... β *oder* γ,
aus c, a, β .... γ *oder* α.

Erste Auflösung. *A.* Die auflösenden Gleichungen (5. und 6. §. 358.) nemlich

$$a\sin\beta = b\sin\beta\cos\gamma + b\cos\beta\sin\gamma \text{ und}$$
$$b\sin\alpha = a\sin\gamma\cos\alpha + a\cos\gamma\sin\alpha; \text{ oder}$$
$$b\sin\gamma\cos\beta = a\sin\beta - b\cos\gamma\sin\beta \text{ und}$$
$$a\sin\gamma\cos\alpha = b\sin\alpha - a\cos\gamma\sin\alpha$$

geben, wenn man die zweiten durch $a\sin\gamma\sin\alpha$, die ersten durch $b\sin\gamma\sin\beta$ dividirt,

$$8. \begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{b - a\cos\gamma}{a\sin\gamma}, \quad \cot\beta = \dfrac{a - b\cos\gamma}{b\sin\gamma}, \text{ und durch Weiterrücken,} \\ \cot\beta = \dfrac{c - b\cos\alpha}{b\sin\alpha}, \quad \cot\gamma = \dfrac{b - c\cos\alpha}{c\sin\alpha}, \\ \cot\gamma = \dfrac{a - c\cos\beta}{c\sin\beta}, \quad \cot\alpha = \dfrac{c - a\cos\beta}{a\sin\beta}; \end{cases}$$

woraus man die gesuchten Stücke findet.

B. Mit den gegebenen drei Stücken, nemlich zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, ist nur ein Dreieck möglich. Also kann das gesuchte vierte Stück nur einen Werth haben. In der That ist der nächste Winkel, welcher z. B. mit α einerlei Cotangente hat, $2\pi+\alpha$ (§. 345. 32.), welcher Winkel grüfser als 2ϱ oder 4ϱ ist; und ein solcher Winkel findet in einem Dreiecke nicht Statt.

Zweite Auflösung. Es ist $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$, und

weil $\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (§. 358. 3.), $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-1}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$.

Nun ist $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ (§. 345. 86.). Also ist

$$9.\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Es ist aber, wegen $\alpha+\beta+\gamma=2\varrho$, $\alpha+\beta=2\varrho-\gamma$, also $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\varrho-\frac{1}{2}\gamma$, folglich $\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\cot\frac{1}{2}\gamma$, mithin in (2.) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$, woraus

$$10.\quad \begin{cases} \tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\gamma, \text{ oder} \\ \tang\frac{1}{2}(\beta-\alpha)=\frac{b-a}{b+a}\cot\frac{1}{2}\gamma, \\ \tang\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}\alpha, \text{ oder} \\ \tang\frac{1}{2}(\gamma-\beta)=\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}\alpha, \text{ und} \\ \tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{1}{2}\beta, \text{ oder} \\ \tang\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{1}{2}\beta \end{cases}$$

folgt.

Hieraus findet man den halben Unterschied zweier Winkel des Dreiecks. Die halbe Summe der nemlichen zwei Winkel ist

$$11. \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \varrho - \tfrac{1}{2}\gamma, \\ \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \varrho - \tfrac{1}{2}\alpha, \\ \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \varrho - \tfrac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Addirt man zu dieser halben Summe, oder subtrahirt davon den obigen halben Unterschied, so findet man α, β und γ, z. B.

$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\alpha$, $\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)=\alpha$ und
$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)-\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\beta$, $\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)+\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)=\beta$ u. s. w.

Man findet also die gesuchten Stücke aus (10. und 11.).

Dritte Auflösung. Man setze

$$12. \quad \frac{a}{b} = tang\,\varphi_1, \quad \frac{b}{c} = tang\,\varphi_2, \quad \frac{c}{a} = tang\,\varphi_3,$$

wo φ_1, φ_2, φ_3 Winkel bezeichnen, die vermittelst dieser Gleichungen durch a und b, b und c, c und a gegeben sind. Nun ist z. B.

$tang(\varphi_1 - \tfrac{1}{4}\pi) = \dfrac{tang\,\varphi_1 - tang\,\tfrac{1}{4}\pi}{1+tang\,\varphi\; tang\,\tfrac{1}{4}\pi}$ (§. 345. 24.), und weil

$tang\,\tfrac{1}{4}\pi = 1$ ist, $tang(\varphi_1 - \tfrac{1}{4}\pi) = \dfrac{tang\,\varphi_1 - 1}{tang\,\varphi_1 + 1}$; also weil

$tang\,\varphi_1 = \dfrac{a}{b}$ war, $tang(\varphi_1 - \tfrac{1}{4}\pi) = \dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \dfrac{a-b}{a+b}$. Es

war aber in der zweiten Auflösung $tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$
$= \dfrac{a-b}{a+b}\cot\tfrac{1}{2}\gamma$. Also ist

$$13. \begin{cases} tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = tang(\varphi_1 - \tfrac{1}{4}\pi)\cot\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ oder} \\ \quad tang\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = tang(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi_1)\cot\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ und} \\ tang\,\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = tang(\varphi_2 - \tfrac{1}{4}\pi)\cot\tfrac{1}{2}\alpha, \text{ oder} \\ \quad tang\,\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) = tang(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi_2)\cot\tfrac{1}{2}\alpha, \\ tang\,\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha) = tang(\varphi_3 - \tfrac{1}{4}\pi)\cot\tfrac{1}{2}\beta, \text{ oder} \\ \quad tang\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) = tang(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi_3)\cot\tfrac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Vermittelst (12. und 13.) findet man den halben Unterschied der gesuchten Winkel und hierauf die Winkel selbst, wie in der zweiten Auflösung.

Sind nicht sowohl die Seiten, wie z. B. a und b selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben, so braucht man für die dritte Auflösung nicht, wie für die erste und zweite, erst a und b selbst zu suchen, sondern findet aus (12.) z. B. $tang\,\varphi_1$ unmittelbar und hieraus $\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ aus (13.) und α aus (11.).

Vierte Auflösung, für den Fall, wenn eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere *sehr klein* ist, und eine besondere Genauigkeit verlangt wird. Es ist (Rechenkunst §. 260.) z. B.

$$14. \begin{cases} \sin\gamma = \dfrac{e^{\gamma\sqrt{-1}} - e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, & \sin\alpha = \dfrac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \cos\gamma = \dfrac{e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2}, & \cos\alpha = \dfrac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} \end{cases}$$

wo e die Zahl bedeutet, deren natürlicher Logarithme 1 ist. Setzt man diese Ausdrücke von $\sin\gamma$, $\sin\alpha$ und $\cos\gamma$, $\cos\alpha$ in $\cot\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{a\sin\gamma}$ (8.), so erhält man, da $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ist,

$$15. \quad \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}} = \frac{2b - a(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}})}{a(e^{\gamma\sqrt{-1}} - e^{-\gamma\sqrt{-1}})};$$

oder, wenn man einen Augenblick, der Kürze wegen,

$$16. \quad e^{\alpha\sqrt{-1}} = p, \quad e^{\gamma\sqrt{-1}} = q$$

setzt und erwägt, dass $e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\alpha\sqrt{-1}}}$ und $e^{-\gamma\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\gamma\sqrt{-1}}}$ ist,

$$\frac{p + \frac{1}{p}}{p - \frac{1}{p}} = \frac{2b - a\left(q + \frac{1}{q}\right)}{a\left(q - \frac{1}{q}\right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} = \frac{2bq - a(q^2 + 1)}{a(q^2 - 1)}, \text{ oder}$$

$(p^2 + 1)a(q^2 - 1) = (p^2 - 1)2bq - (p^2 - 1)a(q^2 + 1)$, oder
$p^2 a(q^2 - 1) + a(q^2 - 1) = p^2(2bq) - p^2 a(q^2 + 1) - 2bq + a(q^2 + 1)$,
oder $p^2(2aq^2 - 2bq) = 2a - 2bq$, woraus

$$p^2 = \frac{a - bq}{aq^2 - bq}, \text{ oder}$$

$$17. \quad p^2 = \frac{b - \frac{a}{q}}{b - aq} = \frac{1 - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{q}}{1 - \frac{a}{b} \cdot q}$$

folgt. Es ist also vermöge (16.)

$$18. \quad e^{2\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1 - \frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{1 - \frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}}}.$$

Nimmt man hiervon die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$19. \quad 2\alpha\sqrt{-1} = {}^{l}\left(1 - \frac{a}{b} e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right) - {}^{l}\left(1 - \frac{a}{b} e^{\gamma\sqrt{-1}}\right).$$

Nun ist nach (Rechenkunst §. 229. II. 4.)

$$l\left(1-\frac{a}{b}e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right)=-\frac{a}{b}e^{-\gamma\sqrt{-1}}-\frac{a^2}{2b^2}e^{-2\gamma\sqrt{-1}}-\frac{a^3}{3b^3}e^{-3\gamma\sqrt{-1}}\dots\dots$$

$$l\left(1-\frac{a}{b}e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)=-\frac{a}{b}e^{\gamma\sqrt{-1}}-\frac{a^2}{2b^2}e^{2\gamma\sqrt{-1}}-\frac{a^3}{3b^3}e^{3\gamma\sqrt{-1}}\dots\dots$$

Setzt man dieses in (19.) und dividirt zugleich mit $2\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\alpha=\frac{a}{b}\left(\frac{e^{\gamma\sqrt{-1}}-e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)+\frac{a^2}{2b^2}\left(\frac{e^{2\gamma\sqrt{-1}}-e^{-2\gamma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)\dots\dots,$$

also vermöge (14.)

$$\alpha=\frac{a}{b}\sin\gamma+\frac{a^2}{2b^2}\sin 2\gamma\dots\dots$$

Es ist also

$$20.\quad\begin{cases}\alpha=\frac{a}{b}\sin\gamma+\frac{a^2}{2b^2}\sin 2\gamma+\frac{a^3}{3b^3}\sin 3\gamma\dots\dots\\ \beta=\frac{b}{a}\sin\gamma+\frac{b^2}{2a^2}\sin 2\gamma+\frac{b^3}{2a^3}\sin 3\gamma\dots\dots\\ \beta=\frac{b}{c}\sin\alpha+\frac{b^2}{2c^2}\sin 2\alpha+\frac{b^3}{2c^3}\sin 3\alpha\dots\dots\\ \gamma=\frac{c}{b}\sin\alpha+\frac{c^2}{2b^2}\sin 2\alpha+\frac{c^3}{2b^3}\sin 3\alpha\dots\dots\\ \gamma=\frac{c}{a}\sin\beta+\frac{c^2}{2a^2}\sin 2\beta+\frac{c^3}{3a^3}\sin 3\beta\dots\dots\\ \alpha=\frac{a}{c}\sin\beta+\frac{a^2}{2c^2}\sin 2\beta+\frac{a^3}{3c^3}\sin 3\beta\dots\dots\end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben die Bogen, welche das Maafs der gesuchten Winkel für den Halbmesser 1 sind. Sie sind dann nützlich, wenn eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere sehr klein ist; z. B. in dem ersten Ausdruck (20.) a gegen b; denn alsdann convergirt die Reihe, welche α ausdrückt, schnell.

Fünfte Auflösung, für den Fall, wenn der gegebene eingeschlossene Winkel γ *wenig von zwei Rechten verschieden* ist, also die gesuchten Winkel *sehr klein* sind und man eine besondere Genauigkeit verlangt.

Auch dann kann man sich wie in (I. C.) der Reihen bedienen, welche die Bogen durch die Sinus und Cosinus ausdrücken.

Zufolge (8.) ist

$$21.\quad \tang\alpha=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma},$$

und wenn man

$$22.\quad \gamma=2\varrho-\tau$$

setzt, wo nun τ sehr klein ist,

$$23.\quad \tang\alpha=\frac{a\sin\tau}{b+a\cos\tau}.$$

Setzt man hierin die Reihen für $\sin\tau$ und $\cos\tau$, so erhält man

$$24.\quad tang\,\alpha = \frac{a\left(\tau - \frac{\tau^3}{2.3} + \frac{\tau^5}{2.3....5}\ldots\right)}{b + a - \frac{a\tau^2}{2} + \frac{a\tau^4}{2.3.4}\ldots\ldots},$$

und wenn man wirklich dividirt und bei der dritten Potestät von τ stehen bleibt,

$$25.\quad tang\,\alpha = \frac{a\tau}{b+a}\left(1 + \frac{(2a-b)\tau^2}{6(b+a)}\right).$$

Nun ist

26. $\alpha = tang\,\alpha - \frac{1}{3}\,tang\,\alpha^3 \ldots\ldots$ (Rechenkunst §. 267. I. 1.)

also ist

$$\alpha = \frac{a\tau}{b+a}\left(1 + \frac{2a-b}{6(b+a)}\tau^2\right) - \frac{1}{3}\frac{a^3\tau^3}{3(b+a)^3}(1 - \ldots\ldots)^3, \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{a\tau}{b+a} + \frac{a(2a-b)}{6(b+a)^2}\tau^3 - \frac{a^3\tau^3}{3(b+a)^3}\tau^3 \ldots\ldots, \text{ oder}$$

$$\alpha = \frac{a\tau}{a+b}\left(1 + \frac{(a-b)b}{6(a+b)^2}\,.\,\tau^2\right).$$

Den andern Winkel β findet man, wenn man a mit b verwechselt, und durch Weiterrücken der Buchstaben überhaupt:

$$27.\quad \begin{cases} \alpha = \frac{a(2\varrho-\gamma)}{a+b}\left[1 + \frac{(a-b)b}{6(a+b)^2}(2\varrho-\gamma)^2\right], \\ \beta = \frac{b(2\varrho-\gamma)}{a+b}\left[1 + \frac{(b-a)a}{6(a+b)^2}(2\varrho-\gamma^2\right], \\ \beta = \frac{b(2\varrho-\alpha)}{b+c}\left[1 + \frac{(b-c)c}{6(b+c)^2}(2\varrho-\alpha)^2\right], \\ \gamma = \frac{c(2\varrho-\alpha)}{b+c}\left[1 + \frac{(c-b)b}{6(b+c)^2}(2\varrho-\alpha)^2\right], \\ \gamma = \frac{c(2\varrho-\beta)}{c+a}\left[1 + \frac{(c-a)a}{6(c+a)^2}(2\varrho-\beta)^2\right], \\ \alpha = \frac{a(2\varrho-\beta)}{c+a}\left[1 + \frac{(a-c)c}{6(c+a)^2}(2\varrho-\beta)^2\right], \end{cases}$$

welches die Bogen der gesuchten Winkel giebt. Legendre (*eléméns de géometrie XI. edit. pag.* 417. 8.) findet die nemlichen Resultate auf einem andern Wege.

Beispiel. Es sey

$a = 134{,}081$, $b = 8543{,}19$, $\gamma = 178°.5'.18''$

und es werde α gesucht.

α) Rechnet man nach der ersten Auflösung, so erhält man

$$\cos\gamma = -\sin 88°.\,5'.\,18'' = -\cos 1°.\,54'.\,42''$$

$$\sin\gamma = \sin 1°.\,54'.\,42'', \text{ also}$$

$$\cot\alpha = \frac{8543{,}19 + 134{,}081\,.\,\cos 1°.\,54'.\,42''}{134{,}081\,\sin 1°.\,54'.\,42''},$$

also

$$^{10}134{,}081 = 0{,}1273672 + 2$$
$$^{10}(\cos 1^\circ.54'.42'') = 0{,}9997583 - 1$$
$$^{10}(134{,}081 . \cos 1^\circ.54'.42'') = 0{,}1271256 + 2$$
$$134{,}081 . \cos 1^\circ.54'.42'' = 134{,}006$$
$$+\ 8543{,}19$$
$$= 8677{,}196.$$

$$^{10}(134{,}081) = 0{,}1273672 + 2$$
$$^{10}(\sin 1^\circ.54'.42'') = 0{,}5232089 - 2$$
$$^{10}(134{,}081 . \sin 1^\circ.54'.42'') = 0{,}6505761 + 0$$
$$^{10}8677{,}196 = 0{,}9383791 + 3$$
$$\cot\alpha = 13{,}2878030$$
$$\alpha = 0^\circ, 1'.47''.$$

β) Nach der *zweiten* Art erhält man

$$\cot\tfrac{1}{2}\gamma = \cot 89^\circ.2'.39'' = \mathrm{tang}\, 0^\circ.57'.21''.$$
$$b + a = 8543{,}19 + 134{,}081 = 8677{,}271$$
$$b - a = 8543{,}190 - 134{,}081 = 8408{,}109$$
$$^{10}(8409{,}109) = 0{,}9247500 + 3$$
$$^{10}(\cot\tfrac{1}{2}\gamma) = 0{,}2223000 - 2$$
$$^{10}((b-a)\cot\tfrac{1}{2}\gamma) = 1{,}1470500 + 1$$
$$-\ ^{10}(8677{,}271) = 0{,}9383830 + 3$$
$$^{10}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)) = 0{,}2086670 - 2$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 0^\circ.55'.34''$$
$$\varrho - \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) = 0^\circ.57'.21''$$
$$\alpha = 0^\circ.\ 1'.47'';$$

wie in α.

γ) Nach der *dritten* Art erhält man

$$^{10}a = 1{,}1273672 + 1$$
$$^{10}b = 0{,}9316201 + 3$$
$$^{10}\mathrm{tang}\,\varphi = 0{,}1957471 - 2$$
$$\varphi = 0^\circ.53'.57''$$
$$\tfrac{1}{4}\pi - \varphi = 44^\circ.\ 6'.\ 3''$$
$$^{10}\mathrm{tang}\,(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi) = 0{,}9863666 - 1$$
$$^{10}(\cot\tfrac{1}{2}\gamma) = 0{,}2223000 - 2$$
$$^{10}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)) = 1{,}2086666 - 2$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha) = 0^\circ.55'.34''$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta+\alpha) = 0^\circ.57'.21''$$
$$\alpha = 0^\circ.\ 1'.47'';$$

wie in α.

Die Auflösungen (1. 2. 3.) erfordern, wie man sieht, ungefähr gleich viel Rechnung. *In so fern also nicht etwa die Logarithmen der Seiten statt der Seiten selbst gegeben sind und deshalb*

die dritte Auflösung vorzuziehen ist, ist die erste, als die einfachste und natürlichste, die beste; denn bei der einfachsten Art zu rechnen darf man am wenigsten fürchten zu fehlen. Die vierte Auflösung kommt nur vor, wenn eine der gegebenen Seiten gegen die andere, und die fünfte, wenn der eingeschlossene Winkel sehr klein ist und eine ungewöhnliche Genauigkeit verlangt wird.

Anmerkung. Man pflegt auch wohl den Satz (9.), z. B.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

der zu der zweiten Auflösung nöthig ist, noch insbesondere aus einer Figur zu beweisen, z. B. wie folgt.

Es sey (Fig. 172.) von den beiden Seiten CA und BA des Dreiecks ABC, CA die kleinere und $CA=CD=CF$; EAF sey eine grade Linie und EB mit AD parallel. Alsdann sind die Dreiecke ACD und ACF gleichschenklig über AD und AF, also ist $\varkappa=\lambda$ und $\mu=\nu$, folglich $\varkappa+\mu=\lambda+\nu$, desgleichen, weil $\varkappa+\mu+\lambda+\nu=2\varrho$ ist, $\varkappa+\mu$ oder $DAF=\varrho$, folglich auch $BEF=\varrho$, weil BE mit DA parallel seyn soll. Nun ist, wegen eben dieser Parallelen, $\varepsilon=\tau=\alpha-\varkappa$. Aber $\alpha+\beta+\gamma=2\varrho=\varkappa+\lambda+\gamma$, und, weil $\varkappa=\lambda$ ist, $\alpha+\beta+\gamma=2\varkappa+\gamma$, also $\varkappa=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, folglich τ oder $\varepsilon=\alpha-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Desgleichen ist $\varepsilon+\beta=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Also ist

$$EBA=\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \text{ und } EBF=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Nun ist in den rechtwinkligen Dreiecken BEA und BEF

$$EA=EB \tang EBA \text{ und } EF=EB \tang EBF;$$

also ist

$$\frac{EF}{EA}=\frac{\tang EBF}{\tang EBA}=\frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken BEF und DAF ist aber

$$\frac{EF}{EA}=\frac{BF}{BD};$$

also ist $\frac{BF}{BD}=\frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$. Da nun $BF=a+b$ und $BD=a-b$ ist, so ist

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tang \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang \frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$

was zu beweisen war.

Man sehe über dergleichen Beweise die Bemerkungen am Schlusse der folgenden Aufgabe (V.).

Aufgabe. V. *Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden.* Also

aus a, b, γ . . . . . c,
aus b, c, α . . . . . a,
aus c, a, β . . . . . b.

Erste Auflösung. Die auflösende Gleichung (10. §. 358.) giebt

$$28. \begin{cases} c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma)}; \text{ also auch} \\ a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha)} \text{ und} \\ b = \sqrt{(c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta)}. \end{cases}$$

Mit den gegebenen drei Stücken, nemlich zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, ist nur ein Dreieck möglich. Also kann das gesuchte vierte Stück nur einen Werth haben.

Sind etwa nicht sowohl die Seiten selbst, sondern vielmehr ihre Logarithmen gegeben, so braucht man nicht erst die Seiten zu suchen, sondern findet die dritte Seite auch unmittelbar.

Zweite Auflösung. Es ist z. B. $\cos\gamma = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ (§ 345. 36.). Also ist in (28.) $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2)}$, oder, weil $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ist,

$$c = \sqrt{((a-b)^2 + 4ab\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)}, \text{ oder}$$

$$c = (a-b)\sqrt{\left(1 + \frac{4ab\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}\right)}.$$

Setzt man nun

$$29. \begin{cases} \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\gamma}{a-b}\sqrt{(ab)} = \tang\varphi_1 \text{ und analog:} \\ \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{b-c}\sqrt{(bc)} = \tang\varphi_2, \\ \dfrac{2\sin\frac{1}{2}\beta}{c-a}\sqrt{(ca)} = \tang\varphi_3, \end{cases}$$

wonach die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 sich richten, so erhält man, weil alsdann z. B. $\frac{4\sin\frac{1}{2}\gamma^2 . ab}{(a-b)^2} = \tang\varphi_1^2$ ist,

$$c = (a-b)\sqrt{(1 + \tang\varphi_1^2)} = (a-b)\sec\varphi_1, \text{ oder}$$

$$30. \quad c = \frac{a-b}{\cos\varphi_1}, \quad a = \frac{b-c}{\cos\varphi_2}, \quad b = \frac{c-a}{\cos\varphi_3}.$$

Vermittelst der Ausdrücke (29. und 30.) läſst sich c aus a, b und γ finden.

Diese Auflösung giebt die dritte Seite in dem Fall wenn der gegenüber liegende Winkel sehr

klein ist, genauer als die erste, weil in (29.) der Sinus des halben Winkels zu nehmen ist, den man in den Tafeln genauer findet als den Cosinus eines sehr kleinen Winkels, in (28.).

Dritte Auflösung. In der zweiten Auflösung ist z. B. $c = \sqrt{((a-b)^2 + 4ab \sin \frac{1}{2}\gamma^2)}$. Es ist aber $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$, also auch

$$c = \sqrt{((a-b)^2 + (a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 - (a-b)^2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2)}, \text{ oder}$$

$$c = \sqrt{((a+b)^2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 + (a-b)^2 (1 - \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2))}, \text{ oder}$$

$$31. \begin{cases} c = \sqrt{[((a+b)\sin \frac{1}{2}\gamma]^2 + ((a-b)\cos \frac{1}{2}\gamma)^2]} \text{ und} \\ a = \sqrt{[((b+c)\sin \frac{1}{2}\alpha]^2 + ((b-c)\cos \frac{1}{2}\alpha)^2]}, \\ b = \sqrt{[((c+a)\sin \frac{1}{2}\beta]^2 + ((c-a)\cos \frac{1}{2}\beta)^2]}. \end{cases}$$

Diese Auflösung giebt die dritte Seite dann genauer als die erste, wenn der gegebene Winkel sehr klein und zugleich der Unterschied der gegebenen Seiten sehr klein ist.

Vierte Auflösung. Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen der beiden übrigen Winkel, nach der ersten Art (IV.) nemlich aus

$$32. \quad \cot\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{a\sin\gamma}, \quad \cot\beta = \frac{c - b\cos\alpha}{b\sin\alpha} \text{ u. } \cot\gamma = \frac{a - c\cos\beta}{c\sin\beta}$$

(8.). Ist z. B. α gefunden, so erhält man c, aus den Gleichungen (2. §. 358.) nemlich:

$$33. \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \text{ und } a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Fünfte Auflösung. Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen Winkel nach der zweiten Art (IV.), nemlich aus

$$34. \begin{cases} \tan \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\gamma \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\beta-\alpha) = \frac{b-a}{b+a}\cot\frac{1}{2}\gamma, \\ \tan \frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}\alpha \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma-\beta) = \frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}\alpha, \\ \tan \frac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{1}{2}\beta \text{ oder} \\ \tan \frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \frac{a-c}{a+c}\cot\frac{1}{2}\beta, \end{cases} (10.)$$

und

$$35. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \varrho - \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\beta \end{cases} (11.).$$

Ist hieraus z. B. α gefunden, so erhält man c, wie in der vierten Auflösung, aus

$$36. \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\ a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ und } b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\ (33.).$$

Sechste Auflösung. Man suche erst aus den gegebenen Stücken einen Winkel nach der **dritten** Art (IV.), nemlich aus

$$37. \quad \frac{a}{b} = \tang\varphi_1,\ \frac{b}{c} = \tang\varphi_2 \text{ und } \frac{c}{a} = \tang\varphi_3\ (12.),$$

$$38. \quad \begin{cases} \tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \tang(\varphi_1 - \frac{1}{4}\pi)\cot\frac{1}{2}\gamma \text{ oder} \\ \quad \tang\frac{1}{2}(\beta-\alpha) = \tang(\frac{1}{4}\pi - \varphi_1)\cot\frac{1}{2}\gamma, \\ \tang\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \tang(\varphi_2 - \frac{1}{4}\pi)\cot\frac{1}{2}\alpha \text{ oder} \\ \quad \tang\frac{1}{2}(\gamma-\beta) = \tang(\frac{1}{4}\pi - \varphi_2)\cot\frac{1}{2}\alpha, \\ \tang\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) = \tang(\varphi_3 - \frac{1}{4}\pi)\cot\frac{1}{2}\beta \text{ oder} \\ \quad \tang\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \tang(\frac{1}{4}\pi - \varphi_3)\cot\frac{1}{2}\beta, \end{cases} (13.)$$

und

$$39. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \varrho - \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = \varrho - \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2}(\gamma+\alpha) = \varrho - \frac{1}{2}\beta \end{cases} (11.).$$

Ist hieraus z. B. α gefunden, so erhält man c, wie in der vierten Auflösung, aus

$$40. \quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\ a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},\ b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\ (33.).$$

Mit dieser Auflösung verhält es sich wie mit der ersten. Sind etwa nicht die beiden Seiten selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben, so braucht man die Seiten nicht erst zu suchen, sondern kann mit den Logarithmen unmittelbar rechnen.

Siebente Auflösung, für den Fall, wenn eine von den beiden gegebenen Seiten gegen die andere sehr klein ist, und eine grofse Genauigkeit verlangt wird.

Es ist z. B.

$$41. \quad a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a - be^{\gamma\sqrt{-1}})(a - be^{-\gamma\sqrt{-1}});$$

denn multiplicirt man die beiden Factoren rechterhand, so erhält man

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 - ab(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}) + b^2, \text{ oder}$$

$$-2ab\cos\gamma = -ab(e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}), \text{ oder}$$

$$\cos\gamma = \frac{e^{\gamma\sqrt{-1}} + e^{-\gamma\sqrt{-1}}}{2},$$

wie gehörig.

Nun ist, wenn a und b die beiden gegebenen Seiten eines Dreiecks sind und γ der eingeschlossene Winkel ist,

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2\ (28.),$$

wo c die dritte Seite ist. Es ist also

$$42.\quad c^2 = (a - b\,e^{\gamma\sqrt{-1}})(a - b\,e^{-\gamma\sqrt{-1}})$$
$$= a^2\left(1 - \frac{b}{a}e^{\gamma\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{b}{a}e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right).$$

Nimmt man hiervon die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$2.\,{}^{e}c = 2.\,{}^{e}a + {}^{e}\!\left(1 - \frac{b}{a}e^{\gamma\sqrt{-1}}\right) + {}^{e}\!\left(1 - \frac{b}{a}e^{-\gamma\sqrt{-1}}\right),$$

oder nach (Rechenkunst §. 229. II. 11.)

$$2.\,{}^{e}c = 2.\,{}^{e}a - \frac{b}{a}e^{\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{3\gamma\sqrt{-1}}\ldots.$$
$$- \frac{b}{a}e^{-\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2}e^{-2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3}e^{-3\gamma\sqrt{-1}}\ldots.,$$

oder

$$2.\,{}^{e}c = 2.\,{}^{e}a - 2\frac{b}{a}\cos\gamma - 2\frac{b^2}{2a}\cos 2\gamma - 2\frac{b^2}{3a^3}\cos 3\gamma\ldots.,\ \text{oder}$$

$$43.\quad \begin{cases} {}^{e}c = {}^{e}a - \frac{b}{a}\cos\gamma - \frac{b^2}{2a^2}\cos 2\gamma - \frac{b^3}{3a^3}\cos 3\gamma\ldots.,\ \text{und} \\ {}^{e}a = {}^{e}b - \frac{c}{b}\cos\alpha - \frac{c^2}{2b^2}\cos 2\alpha - \frac{c^3}{3b^3}\cos 3\alpha\ldots. \\ {}^{e}b = {}^{e}c - \frac{a}{c}\cos\beta - \frac{a^2}{2c^2}\cos 2\beta - \frac{a^3}{3c^3}\cos 3\beta\ldots.; \end{cases}$$

oder auch, weil man die beiden gegebenen Seiten nach Belieben verwechseln kann,

$$44.\quad \begin{cases} {}^{e}c = {}^{e}b - \frac{a}{b}\cos\gamma - \frac{a^2}{2b^2}\cos 2\gamma - \frac{a^3}{3b^3}\cos 3\gamma\ldots.; \\ {}^{e}a = {}^{e}c - \frac{b}{c}\cos\alpha - \frac{b^2}{2c^2}\cos 2\alpha - \frac{b^3}{3c^3}\cos 3\alpha\ldots., \\ {}^{e}b = {}^{e}a - \frac{c}{a}\cos\beta - \frac{c^2}{2a^2}\cos 2\beta - \frac{c^3}{3a^3}\cos 3\beta\ldots. \end{cases}$$

Man findet hierdurch aus zwei gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite.

Die Reihen convergiren um so mehr, je kleiner eine der beiden gegebenen Seiten gegen die andere ist.

Achte Auflösung, für den Fall, wenn der eingeschlossene Winkel wenig von zwei Rechten abweicht. Es ist z. B.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Man setze $\gamma = 2\varrho - \tau$, wo nun τ nach der Voraussetzung sehr klein ist. Da $\cos\gamma = -\cos\tau$, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\tau,$$

oder, weil $\cos\tau = 1 - \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{2.3.4}\ldots.$ (2.),

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab\frac{\tau^2}{2} + 2ab\frac{\tau^4}{2.3.4}\ldots.;\ \text{oder}$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\frac{\tau^2}{2} + 2ab\frac{\tau^4}{2.3.4}\ldots.;$$

δ) Nach der vierten Art erhält man

$$
\begin{aligned}
{}^{10}a &= 0{,}7246698 + 1\\
{}^{10}(\cos\gamma) &= \underline{0{,}2850380 - 1}\\
{}^{10}(a\cos\gamma) &= 1{,}0097078 + 0\\
a\cos\gamma &= 10{,}2260\\
b &= \underline{68{,}5328}\\
b - a\cos\gamma &= 58{,}3068\\
{}^{10}a &= 0{,}7246698 + 1\\
{}^{10}(\sin\gamma) &= \underline{0{,}9917770 - 1}\\
{}^{10}(a\sin\gamma) &= 0{,}7164468 + 1\\
{}^{10}(b - a\cos\gamma) &= \underline{0{,}7657191 + 1}\\
{}^{10}(\cot\alpha &= 0{,}0492723 + 0,\\
\alpha &= 41^\circ.56'.23''.\\
{}^{10}a &= 0{,}7246698 + 1\\
{}^{10}(\sin\gamma) &= \underline{0{,}9917772 - 1}\\
{}^{10}(a\sin\gamma) &= 1{,}7164470 + 0\\
{}^{10}(\sin\alpha) &= \underline{0{,}8234513 - 1}\\
{}^{10}\left(a.\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) &= 0{,}8929957 + 1 = {}^{10}c\\
c &= 78{,}162;
\end{aligned}
$$

wie in α.

ε) Nach der fünften Auflösung erhält man

$$
\begin{aligned}
b - a &= 15{,}4847\\
b + a &= 121{,}6809\\
\tfrac{1}{2}\gamma &= 39^\circ.26'.34'',\\
\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) = \varrho - \tfrac{1}{2}\gamma &= 60^\circ.33'.26''.\\
{}^{10}(b - a) &= 0{,}1899028 + 1\\
{}^{10}(\cot\tfrac{1}{2}\gamma) &= \underline{0{,}0848053 + 0}\\
{}^{10}((b - a)\cot\tfrac{1}{2}\gamma &= 1{,}2747081 + 0\\
{}^{10}(b + a) &= \underline{1{,}0848651 + 1}\\
\left(\frac{b - a}{b + a}\cot\tfrac{1}{2}\gamma\right) &= 0{,}1898430 - 1 = {}^{10}(tang\,\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha))\\
\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) &= 8^\circ.48'.3''\\
\alpha = 60^\circ.33'.26'' - 8^\circ.48'.3'' &= 41^\circ.45'.23''\\
{}^{10}a &= 0{,}7246698 + 1\\
{}^{10}(\sin\gamma) = {}^{10}(\cos 11^\circ.\ 6'.52'') &= \underline{0{,}9917772 - 1}\\
{}^{10}(a\sin\gamma) &= 1{,}7164470 + 0\\
{}^{10}(\sin\alpha) = {}^{10}(\sin 41^\circ.45'.23'') &= \underline{0{,}8234513 - 1}\\
{}^{10}\left(a.\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) &= 0{,}8929957 + 1 = {}^{10}c,\\
c &= 78{,}162;
\end{aligned}
$$

wie in (α.).

ζ)

ζ) Nach der **sechsten** Art erhält man

$$^{10}a = 1{,}7246698 + 0$$
$$^{10}b = 0{,}8358984 + 1$$
$$^{10}tang\,\varphi = 0{,}8887714 - 1,$$
$$\varphi = 37^\circ.\ 44'.\ 30'',$$
$$\tfrac{1}{4}\pi - \varphi = +\ 7^\circ.\ 15'.\ 30''.$$
$$^{10}tang\,(\tfrac{1}{4}\pi - \varphi) = 0{,}1050460 - 1$$
$$^{10}(cot\,\tfrac{1}{2}\gamma) = 0{,}0848053 + 0$$
$$^{10}tang\,\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = 0{,}1898513 - 1$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha) = 8^\circ.\ 48'.\ 3''.$$
$$\tfrac{1}{2}(\beta + \alpha) = \varrho - \tfrac{1}{2}\gamma = 60^\circ.\ 33'.\ 26'',$$
$$\alpha = 60^\circ.\ 33'.\ 26'' - 8^\circ.\ 48'.\ 3'' = 41^\circ.\ 45'.\ 23''$$
$$^{10}a = 0{,}7246698 + 1$$
$$^{10}(sin\,\gamma) = 0{,}9917770 - 1$$
$$^{10}(a\,sin\,\gamma) = 1{,}7164468 + 0$$
$$^{10}(sin\,\alpha) = 0{,}8234513 - 1$$
$$^{10}\left(a\frac{sin\,\gamma}{sin\,\alpha}\right) = 0{,}8929957 + 1 = {}^{10}c$$
$$c = 78,\ 162;$$

wie in (α.).

Wie man sieht, erfordern alle sechs Auflösungen ungefähr gleich viel Rechnung. Daher ist in der Regel, wenn nicht etwa wegen der Kleinheit des eingeschlossenen Winkels, und mehrerer Genauigkeit wegen, oder weil etwa nicht die Seiten selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, eine andere Auflösung nothwendig ist, die **erste Auflösung**, als die einfachste und natürlichste, die beste. Die siebente und achte Auflösung kommen nur vor, wenn eine ungewöhnliche Genauigkeit verlangt wird.

Anmerkung. Den Ausdruck (31.), auf welchem die dritte Auflösung beruht, pflegt man wieder, wie den Ausdruck (9.) in (IV.), auch für sich aus einer Figur zu beweisen, z. B. wie folgt.

Es sey wie vorhin (Fig. 172.) $CD = CA$, GB mit AD parallel, und CG und BK auf GB senkrecht, so ist $GH = BK$, und $GB = HK$. Die grade Linie CG halbirt aber den Winkel γ; denn wegen $CA = CD$ und $CH = CH$ sind die **rechtwinkligen** Dreiecke CHD und CHA, und folglich die Winkel GCB und HCA gleich; also ist in den rechtwinkligen Dreiecken GCB und HCA,

$$GB = a\,sin\,\tfrac{1}{2}\gamma,\quad GC = a\,cos\,\tfrac{1}{2}\gamma;$$
$$AH = b\,sin\,\tfrac{1}{2}\gamma,\quad HC = b\,cos\,\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Da nun $GB + AH = AK$ und $GC - HC = BK$ ist, so ist

$$AK = (a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma \text{ und } BK = (a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck AKB ist aber $\sqrt{(AK^2 + BK^2)} = AB = c$. Also ist

$$c = \sqrt{[((a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma)^2 + ((a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma)^2]},$$

welches die erste Gleichung (31.) ist.

Dergleichen besondere Beweise einzelner Sätze aus der Figur sind zwar zur Uebung im Erkennen und Entwickeln der geometrischen Eigenschaften der Figuren sehr nützlich; allein es ist nicht gut, wenn man darauf Sätze oder Auflösungen von Aufgaben, die, wie die obigen, aus frühern, allgemein bewiesenen Sätzen folgen, gründet, oder dieselben gar davon abhängig macht. Denn die allgemeinen Sätze müssen nicht allein ohne die besondern dennoch aufgestellt werden, so dafs das Nemliche zweimal geschieht, sondern das Gedächtnifs wird auch durch die besonderen Beweise unnütz belastet und einer der Hauptvortheile der Allgemeinheit, dafs sie mehreres Einzelne zusammenfasset und den Ueberblick des Zusammenhanges und des Systems der Sätze, ohne welche keine wahre Einsicht Statt findet, erleichtert, geht verloren.

Aufgaben VI. *Aus zwei gegebenen Seiten eines Dreiecks und einem anliegenden Winkel den andern anliegenden Winkel zu finden, also*

aus a, c *und* γ . . . . α,
aus b, a *und* α . . . . β,
aus c, b *und* β . . . . γ.

Auflösung. *A.* Aus der auflösenden Gleichung (3. §. 358.) folgt

$$46. \quad \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha;$$

also ist auch $\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$.

B. Durch die gegebenen drei Stücke, nemlich zwei Seiten und einen anliegenden Winkel, z. B. b, a und α, wird aber das Dreieck nicht unbedingt bestimmt, sondern nur dann, wenn der gegebene Winkel der gröfsern von den beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt (§. 53.). Der Ausdruck (46.) kann also auch den gesuchten Winkel nicht unbedingt geben.

In der That haben z. B. die beiden Winkel β und $2\varrho - \beta$ einerlei Sinus, also ist, wenn man

$$47. \quad 2\varrho - \beta = \beta_1$$

setzt, eben so wohl

$$48. \quad \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha, \text{ als}$$

$$49. \quad \sin\beta_1 = \frac{b}{a}\sin\alpha.$$

Es sind drei Fälle möglich.

Erster Fall. Es sey

$$50. \quad a > b,$$

so ist $\frac{b}{a} < 1$, und folglich, vermöge $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$, $\sin\beta < \sin\alpha$, also eben so $\sin\beta_1 < \sin\alpha$, oder $\sin(2\varrho - \beta) < \sin(2\varrho - \alpha)$.

Nun kann α spitz oder stumpf seyn, weil a die grössere von den beiden Seiten a und b seyn soll.

Es sey α spitz oder $< \varrho$, so ist wegen $\sin\beta < \sin\alpha$, $\beta < \alpha$, also $2\varrho - \beta > 2\varrho - \alpha$. Aus $2\varrho - \beta > 2\varrho - \alpha$ aber folgt $(2\varrho - \beta) + \alpha > 2\varrho$, oder $\beta_1 + \alpha > 2\varrho$, so daſs die Summe des gegebenen Winkels α und des gesuchten Winkels β_1 gröſser als zwei Rechte seyn müſste, was nicht angeht. Also findet der zweite Winkel $\beta_1 = 2\varrho - \beta$ nicht Statt; sondern nur der erste β.

Es sey α stumpf oder $> \varrho$, so ist wegen $\sin\beta < \sin\alpha$, $\beta > \alpha$, also $2\varrho - \beta < 2\varrho - \alpha$. Aus $2\varrho - \beta < 2\varrho - \alpha$ aber folgt $(2\varrho - \beta) + \alpha < 2\varrho$ oder $\beta_1 + \alpha < 2\varrho$, welches seyn kann. Hingegen $\beta > \alpha$ ist nicht möglich, weil α schon stumpf ist und mithin β um so mehr stumpf seyn würde, ein Dreieck aber nicht zwei stumpfe Winkel haben kann. Also findet der erste Winkel β nicht Statt, sondern nur der zweite β_1.

Ist daher $a < b$, so giebt es zu den gegebenen drei Stücken b, a und α immer nur einen Winkel β, und folglich nur ein Dreieck. Und zwar ist

$$51. \quad \sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha, \text{ wenn } \alpha < \varrho \text{ ist, und}$$

$$52. \quad \sin(2\varrho - \beta) = \frac{b}{a}\sin\beta, \text{ wenn } \alpha > \varrho \text{ ist.}$$

Zweiter Fall. Es sey

$$53. \quad a < b, \text{ aber zugleich } a > b\sin\alpha.$$

Alsdann ist $\frac{b\sin\alpha}{a} < 1$, folglich, weil $\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\beta$ (46.), $\sin\beta < 1$. Da der Sinus von β kleiner als 1 ist, so ist überhaupt der Winkel β, und mit den gegebenen Stükken b, a und α ein Dreieck möglich.

Da a die kleinere von den beiden Seiten b und a seyn soll, so kann der ihr gegenüberliegende Winkel α nur spitz oder kleiner als ϱ seyn; denn wäre er stumpf oder gröfser als ϱ, so wäre der der gröfsern Seite b gegenüberliegende Winkel β noch um so mehr $>\varrho$ und folglich $\beta+\alpha>2\varrho$; welches nicht seyn kann.

Da nun $a<b$, also der b gegenüberliegende Winkel β gröfser als α ist, so kann β sowohl spitz als stumpf seyn. Und folglich finden die beiden Winkel β und β_1 Statt.

Ist daher $a<b$ und zugleich $a<b \sin\alpha$, so giebt es zu den gegebenen drei Stücken b, a und α zwei Winkel β und $2\varrho-\beta$, und folglich zwei verschiedene Dreiecke mit den nemlichen Stücken b, a und α. Und zwar ist sowohl

$$64.\quad \sin\beta=\frac{b}{a}\sin\alpha,\ \text{als}$$

$$65.\quad \sin(2\varrho-\beta)=\frac{b}{a}\sin\alpha.$$

Dritter Fall. Es sey

$$66.\quad a<b,\ \text{aber zugleich}\ a<b\sin\alpha.$$

Alsdann ist vermöge $\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}$, $\sin\beta>1$. Da es aber keinen Sinus giebt, der gröfser ist als 1, so existirt der Winkel β gar nicht. Und folglich giebt es gar kein Dreieck, welches die gegebenen Stücke b, a und α hätte.

C. Findet sich, dafs β einem rechten Winkel sehr nahe kommt, so geben die Tafeln den Winkel β aus $\sin\beta$ wenig genau, weil die Sinus von Winkeln, die beinahe rechte sind, wenig von einander abweichen. Alsdann kann man sich des Ausdrucks

$$\sin(\tfrac{1}{4}\pi-x)=\sin\tfrac{1}{4}\pi\cos x-\cos\tfrac{1}{4}\pi\sin x$$
$$=(\cos x-\sin x)\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sqrt{(1-\sin 2x)}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\ (\S.\ 345.\ 51.),\ \text{also}$$

$$57.\quad \sin(\tfrac{1}{4}\pi-x)=\sqrt{\left(\frac{1-\sin 2x}{2}\right)}$$

bedienen, welcher, wenn man α statt $2x$ und $\frac{1}{2}\varrho$ statt $\frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$68.\quad \begin{cases}\sin\frac{1}{2}(\varrho-\alpha)=\sqrt{\left(\frac{1-\sin\alpha}{2}\right)}\ \text{und}\\ \sin\frac{1}{2}(\varrho-\beta)=\sqrt{\left(\frac{1-\sin\beta}{2}\right)},\\ \sin\frac{1}{2}(\varrho-\gamma)=\sqrt{\left(\frac{1-\sin\gamma}{2}\right)},\end{cases}$$

oder wenn man z. B. für $\sin\beta$ seinen Ausdruck $\frac{b}{a}\sin\alpha$ setzt, $\sin\frac{1}{2}(\rho-\beta)=\sqrt{\left(\frac{1-\frac{b}{a}\sin\alpha}{2}\right)}$, also

$$69.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}(\rho-\alpha) = \sqrt{\left(\frac{c-a\sin\gamma}{2c}\right)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\rho-\beta) = \sqrt{\left(\frac{a-b\sin\alpha}{2a}\right)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\rho-\gamma) = \sqrt{\left(\frac{b-c\sin\beta}{2b}\right)} \end{cases}$$

giebt. Da z. B. β und ρ wenig verschieden sind, so ist $\rho-\beta$, und um so mehr $\frac{1}{2}(\rho-\beta)$ sehr klein und den Sinus sehr kleiner Winkel geben die Tafeln am genauesten.

Die Kennzeichen ob nur ein, oder ob zwei Dreiecke, oder ob gar keins möglich ist, bleiben übrigens die nemlichen.

D. Sind der gegebene und der gesuchte Winkel sehr klein oder einer von beiden wenig von 2ρ verschieden, so kann man sich auch der Reihen, die den Sinus durch den Bogen, und umgekehrt, geben, bedienen.

Erstlich. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.) α sehr klein und die ihm gegenüberliegende Seite a größer als die andere gegebene Seite b, so wird der gesuchte, der Seite b gegenüberliegende Winkel β noch kleiner seyn und es giebt nach (*B.* Erster Fall) nur ein Dreieck.

Man setze statt $\sin\alpha$, wenn α_1 den zu dem Winkel α gehörigen Bogen bedeutet, die Reihe

$$60.\quad \sin\alpha=\alpha_1-\frac{\alpha_1^3}{2.3}+\frac{\alpha_1^5}{2.3.4.5}\ldots\ldots (2.),$$

so erhält man, wenn man, weil α sehr klein ist, schon bei dem zweiten Gliede stehen bleibt,

$$61.\quad \sin\beta=\frac{b}{a}\left(\alpha_1-\frac{\alpha_1^3}{2.3}\right).$$

Nun ist, wenn β_1 den Bogen zum Winkel β bezeichnet,

$$62.\quad \beta_1=\sin\beta+\tfrac{1}{6}\sin\beta^3+\frac{1.3}{2.4.5}\sin\beta^5\ldots\ldots (\S.\ 345.\ 154.).$$

Also ist, wenn man $\sin\beta$ aus (61.) setzt, und da $\sin\beta$ sehr klein ist, wiederum schon bei dem zweiten Gliede stehen bleibt,

$$\beta_1=\frac{b}{a}\left(\alpha_1-\frac{\alpha_1^3}{2.3}\right)+\tfrac{1}{6}\frac{b^3}{a^3}(\alpha_1\ldots\ldots)^3,\ \text{oder}$$

$$\beta_1=\frac{b}{a}\alpha_1\left(1-\tfrac{1}{6}\alpha_1^2+\tfrac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\alpha_1^2\right),\ \text{oder}$$

$$63.\quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a}\alpha_1\left(1-\frac{a^2-b^2}{6a^2}\alpha_1^2\right); \text{ also auch} \\ \gamma_1 = \frac{c}{b}\beta_1\left(1-\frac{b^2-c^2}{6b^2}\beta_1^2\right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c}\gamma_1\left(1-\frac{c^2-a^2}{6c^2}\gamma_1^2\right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben z. B. β aus b, a und α, wenn $a > b$ und α sehr klein ist.

Zweitens. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.) α, wenig von 2ϱ verschieden und also die ihm gegenüberliegende Seite a nothwendig gröfser als die andere gegebene Seite b, so ist auch nothwendig $\sin\beta$ und β_1 sehr klein. Es bleibt, wie leicht zu sehen, Alles wie im ersten Falle, nur dafs man $2\varrho - \alpha_1$ statt α_1 setzen mufs. Man erhält also

$$64.\quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a}(2\varrho-\alpha_1)\left(1-\frac{a^2-b^2}{6a^2}(2\varrho-\alpha_1)^2\right), \\ \gamma_1 = \frac{c}{b}(2\varrho-\beta_1)\left(1-\frac{b^2-c^2}{6b^2}(2\varrho-\beta_1)^2\right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c}(2\varrho-\gamma_1)\left(1-\frac{c^2-a^2}{6c^2}(2\varrho-\gamma_1)^2\right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke geben z. B. β aus b, a und α, wenn α sehr wenig von 2ϱ verschieden ist.

Drittens. Es sey der gegebene Winkel, z. B. in (46.) α sehr klein und die ihm gegenüberliegende Seite a zwar kleiner als die andere gegebene Seite b, aber $a\sin\alpha$ noch sehr klein gegen a, so ist auch hier nothwendig $\sin\beta$ sehr klein und folglich β entweder sehr klein, oder sehr nahe an 2ϱ; denn in $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$ ist $\frac{b\sin\alpha}{a}$ nach der Voraussetzung ein sehr kleiner Bruch. Die Rechnung bleibt, wie leicht zu sehen, die nemliche wie im ersten Falle und man findet, wie dort,

$$65.\quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{b}{a}\alpha_1\left(1-\frac{b^2-a^2}{6a^2}\alpha_1^2\right), \\ \gamma_1 = \frac{c}{b}\beta_1\left(1+\frac{c^2-b^2}{6b^2}\beta_1^2\right), \\ \alpha_1 = \frac{a}{c}\gamma_1\left(1+\frac{a^2-c^2}{6c^2}\gamma_1^2\right). \end{cases}$$

Da aber jetzt, zu Folge (*B.* Zweiter Fall) zwei Dreiecke existiren, so gehören die Bogen β_1 γ_1 α_1 sowohl zu den Winkeln β, γ, α, als zu den Winkeln $2\varrho-\beta$, $2\varrho-\gamma$ und $2\varrho-\alpha$.

Man findet durch die Ausdrücke (65.) z. B. β aus a und α, wenn α sehr klein und $b > a$, aber $b\sin\alpha$ gegen a sehr klein ist.

Beispiele. I. *A.* Es sey

$$b = 89.125, \quad a = 103,47$$

und α spitz, z. B. $\alpha = 18^\circ . 35' . 49''$, so ist

$$
\begin{aligned}
{}^{10}b &= 0{,}9499995 + 1\\
{}^{10}(\sin\alpha) &= 0{,}5036664 - 1\\
{}^{10}(b\sin\alpha) &= 1{,}4536659 + 0\\
{}^{10}a &= 0{,}0148144 + 2\\
{}^{10}(\sin\beta) &= 0{,}4388516 - 1\\
\beta &= 15^\circ.56'.38''.
\end{aligned}
$$

Da $a > b$, so findet nur ein Dreieck mit den gegebenen Stücken Statt, und der der Seite β gegenüberliegende Winkel ist $15^\circ.56'.38''$.

B. Es sey wie vorhin

$$b = 89{,}125,\quad a = 103{,}47,$$

α aber stumpf, z. B. $\alpha = 121^\circ.8'.52''$, so ist

$$
\begin{aligned}
{}^{10}b &= 0{,}9499995 + 1\\
{}^{10}(\sin\alpha) &= 0{,}9323906 - 1\\
{}^{10}(b\sin\alpha) &= 0{,}9023901 + 1\\
{}^{10}a &= 0{,}0148144 + 2\\
{}^{10}(\sin\beta) &= 0{,}8875757 - 1;
\end{aligned}
$$

folglich, weil wegen $\sin\beta < \sin\alpha$, $\alpha > \beta$ seyn muſs,

$$\beta = 129^\circ.28'.22''.$$

Dieser stumpfe Winkel findet aber nicht Statt, sondern nur sein Complement

$$2\varrho - \beta = 50^\circ.31'.38''.$$

Es giebt mit den gegebenen Stücken nur ein Dreieck und der der Seite β gegenüberliegende Winkel ist $50^\circ.31'.38''$.

II. Es sey

$$b = 143{,}86,\quad a = 35{,}4207 \text{ und } \alpha = 14^\circ.15'.17'',$$

so ist

$$
\begin{aligned}
{}^{10}b &= 0{,}1579099 + 2\\
{}^{10}(\sin\alpha) &= 0{,}3913465 - 1\\
{}^{10}(b\sin\alpha) &= 1{,}5492564 + 0\\
{}^{10}a &= 0{,}5492571 + 1\\
{}^{10}(\sin\beta) &= 0{,}9999993 - 1\\
\beta &= 89^\circ.54'
\end{aligned}
$$

Da aber $a < b$ und $a > b\sin\alpha$, wie in der Rechnung die Logarithmen von $b\sin\alpha$ und von a zeigen, so sind zwei Dreiecke möglich. Ihre Winkel, der Seite b gegenüber, sind

$$
\begin{aligned}
\beta &= 89^\circ.54'\\
2\varrho - \beta &= 90^\circ.\ 6'.
\end{aligned}
$$

Es ist aber hier ein Fall, wo man den Winkel β nach dem Ausdrucke $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ nicht genau, nemlich nicht bis auf die Secunden, sondern nur bis auf mehr als $\frac{1}{3}$ Minute finden kann. Denn, wie die Tafeln zeigen (Vegasche Tafeln S. 193.), sind die Logarithmen der Sinus von $89°.6'.0''$ bis $89°.6'.20''$ sämmtlich $0,9999993-1$, so daſs man von dem Winkel β, nach dem Ausdrucke $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$, nur findet, daſs er nicht viel kleiner als $89°.6'.0''$, und nicht viel gröſser als $86°.6'.20''$ seyn kann, nicht aber wieviel Secunden er enthält.

Man muſs also nach dem Ausdruck (59.) oder besser nach (58.) wie folgt rechnen.

Die zu dem Logarithmen $0,9999993-1$ gehörige Zahl ist (Vegasche Tafel S. 136.) $0,9999985$. Also ist

$$\sin\beta = 0,9999985$$

folglich $1-\sin\beta = 0,0000015$

$$\text{und } \frac{1-\sin\beta}{2} = 0,00000075$$

$$^{10}\left(\frac{1-\sin\beta}{2}\right) = 1,8750613-8$$

$$^{10}\sqrt{\left(\frac{1-\sin\beta}{2}\right)} = 0,9375306-4 = {}^{10}(\sin\tfrac{1}{2}(\varrho-\beta)),$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}(\varrho-\beta) = 0°.2'.58,7''$$

$$\varrho-\beta = 0°.5'.57,4'',$$

$$\text{folglich } \beta = 89°.54'.2,6'',$$

$$\text{desgleichen } 2\varrho-\beta = 90°.5'.57,4'';$$

welches die gesuchten Winkel bis auf Secunden sind.

III. Es sey wie vorhin

$$b = 143,85, \quad a = 36,4207,$$

aber α, statt $14°.15'.17''$, gleich $38°.18'.5''$, so ist

$$^{10}b = 0,1579099+2$$

$$^{10}(\sin\alpha) = 0,7922502-1$$

$$^{10}(b \sin\alpha) = 0,9501601+1,$$

$$^{10}a = 0,5492571+1.$$

Da, wie die Logarithmen zeigen, $a < b \sin\alpha$ ist, so ist kein Dreieck mit den gegebenen Stücken möglich.

IV. Um wenigstens ein Beispiel von der Anwendung der Ausdrücke mit Reihen für die goniometrischen Linien zu geben, sey

$b = 68{,}047,\quad a = 111{,}835,\quad \alpha = 0^\circ.0'.38''.$

Es ist also $a > b$ und α sehr klein. Daher gehört das Dreieck für den ersten Fall (*D.*). Es ist

$$a + b = 179{,}882,\quad a - b = 43{,}788.$$

Die Länge des Bogens von 38 Secunden ist zufolge der Vegaschen Tafeln (S. 297.) $\alpha_1 = 0{,}00018423$ und ihr Logarithme ${}^{10}\alpha_1 = 0{,}2653604 - 4$;

$$\begin{aligned}
{}^{10}(a+b) &= 0{,}2549853 + 2\\
+\,{}^{10}(a-b) &= 0{,}6413551 + 1\\
+\,2\,.\,{}^{10}\alpha_1 &= 0{,}5307208 - 8\\
\hline
{}^{10}((a^2-b^2)\alpha_1^2) &= 0{,}4270612 - 4\\
-\,{}^{10}a &= 0{,}0485778 + 2\\
\hline
&\ 0{,}3784834 - 6\\
-\,{}^{10}a &= 1{,}0485778 + 2\\
\hline
&\ 1{,}3299056 - 9\\
-\,{}^{10}a &= 0{,}7781513 + 0\\
\hline
{}^{10}\left(\frac{(a^2-b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) &= 0{,}5517543 - 9\\
{}^{10}b &= 0{,}8328090 + 1\\
+\,{}^{10}\alpha_1 &= 0{,}2653604 - 4\\
\hline
{}^{10}(b\,\alpha_1) &= 1{,}0981694 - 3\\
-\,{}^{10}a &= 1{,}0485778 + 2\\
\hline
{}^{10}\left(\frac{b}{a}\alpha_1\right) &= 0{,}0495916 - 4\\
+\left(\frac{(a^2-b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) &= 0{,}5517543 - 9\\
\hline
{}^{10}\left(\frac{b}{a}\alpha_1\frac{(a^2-b^2)\alpha_1^2}{6a^2}\right) &= 0{,}6013459 - 13\\
\frac{b}{a}\alpha_1 &= 0{,}0001120965000\\
-\frac{b}{a}\alpha_1\frac{(a^2-b^2)\alpha_1^2}{6a^2} &= 0{,}0000000000004\\
\hline
\beta_1 &= 0{,}0001120964996\\
\beta &= 23{,}127 \text{ Secunden.}
\end{aligned}$$

Aufgabe. VII. *Aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem einen anliegenden Winkel den eingeschlossenen Winkel zu finden, also z. B.*

aus a, b *und* α *oder* $\beta \ldots . \gamma$
aus b, c *und* β *oder* $\gamma \ldots . \alpha$
aus c, a *und* γ *oder* $\alpha \ldots . \beta$.

Erste Auflösung. A. Die auflösende Gleichung

66. $b \sin\alpha = a \sin\gamma \cos\alpha + a \cos\gamma \sin\alpha$ (6. §. 358.)

giebt $b \sin\alpha - a \sin\gamma \cos\alpha = a \cos\gamma \sin\alpha$ und
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma + a^2 \sin\gamma^2 \cos\alpha^2 = a^2 \cos\gamma^2 \sin\alpha^2$,
oder
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma + a^2 (\sin\gamma^2 (1 - \sin\alpha^2)$
$- (1 - \sin\gamma^2) \sin\alpha^2) = 0$, oder
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma + a^2 (\sin\gamma^2 - \sin\alpha^2) = 0$,
oder $\sin\gamma^2 - \frac{2b}{a} \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \sin\alpha^2 = 0$; also

$$\sin\gamma = \frac{b}{a} \sin\alpha \cos\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 - \frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^2 + \sin\alpha^2\right)}$$

oder

$$\sin\gamma = \frac{b}{a} \sin\alpha \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2}(1 - \sin\alpha^2) - \frac{b^2}{a^2} + 1\right)}, \text{ oder}$$

$$\sin\gamma = \frac{b}{a} \sin\alpha \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$\sin\gamma = \frac{b \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}}{a},$$ und wenn man auch b und a, β und α verwechselt,

$$67. \left\{\begin{aligned}
\sin\gamma &= \frac{b \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}}{a} \\
\sin\alpha &= \frac{a \cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \sin\beta^2)}}{b} \\
\sin\alpha &= \frac{c \cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \sin\beta^2)}}{b} \\
\sin\beta &= \frac{b \cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \sin\gamma^2)}}{c} \\
\sin\beta &= \frac{a \cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \sin\gamma^2)}}{c} \\
\sin\gamma &= \frac{c \cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \sin\alpha^2)}}{a}
\end{aligned}\right.$$

B. Aus der nemlichen auflösenden Gleichung (66.) folgt:
$b^2 \sin\alpha - a \cos\gamma \sin\alpha = a \sin\gamma \cos\alpha$, oder
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha^2 \cos\gamma + a^2 \cos\gamma^2 \sin\alpha = a^2 \sin\gamma^2 \cos\alpha^2$,
oder
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha^2 \cos\gamma + a^2 \cos\gamma^2 (1 - \cos\alpha^2)$
$- a^2 (1 - \cos\gamma^2) \cos\alpha^2 = 0$, also
$b^2 \sin\alpha^2 - 2ab \sin\alpha^2 \cos\gamma + a^2 \cos\gamma^2 - a^2 \cos\alpha^2 = 0$, oder
$\cos\gamma^2 - \frac{2b}{a} \sin\alpha^2 \cos\gamma + \frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^2 - \cos\alpha^2 = 0$; also

$$\cos\gamma = \frac{b}{a} \sin\alpha^2 \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^4 - \frac{b^2}{a^2} \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{a}\sin\alpha^2 \mp \sqrt{\left(-\frac{b^2}{a^2}\sin\alpha^2\cos\alpha^2 + \cos\alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{a}\sin\alpha^2 \mp \cos\alpha\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\sin\alpha^2\right)}, \text{ oder}$$

$$68. \left\{\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{b\sin\alpha^2 \mp \cos\alpha\sqrt{(a^2 - b^2\sin\alpha^2)}}{a}, \\ &= \frac{a\sin\beta^2 \mp \cos\beta\sqrt{(b^2 - a^2\sin\beta^2)}}{b} \\ \cos\alpha &= \frac{c\sin\beta^2 \mp \cos\beta\sqrt{(b^2 - c^2\sin\beta^2)}}{b} \\ &= \frac{b\sin\gamma^2 \mp \cos\gamma\sqrt{(c^2 - b^2\sin\gamma^2)}}{c} \\ \cos\beta &= \frac{a\sin\gamma^2 \mp \cos\gamma\sqrt{(c^2 - a^2\sin\gamma^2)}}{c} \\ &= \frac{c\sin\alpha^2 \mp \cos\alpha\sqrt{(a^2 - c^2\sin\alpha^2)}}{a}. \end{aligned}\right.$$

C. Aus (67. und 68.) folgt auch, weil z. B. $\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \tang\gamma$ ist,

$$69. \left\{\begin{aligned} \tang\gamma &= \frac{b\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2\sin\alpha^2)}}{b\sin\alpha \mp \cot\alpha\sqrt{(a^2 - b^2\sin\alpha^2)}} \\ &= \frac{a\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2\sin\beta^2)}}{a\sin\beta \mp \cot\beta\sqrt{(b^2 - a^2\sin\beta^2)}} \\ \tang\alpha &= \frac{c\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2\sin\beta^2)}}{c\sin\beta \mp \cot\beta\sqrt{(b^2 - c^2\sin\beta^2)}} \\ &= \frac{b\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2\sin\gamma^2)}}{b\sin\gamma \mp \cot\gamma\sqrt{(c^2 - b^2\sin\gamma^2)}} \\ \tang\beta &= \frac{a\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2\sin\gamma^2)}}{a\sin\gamma \mp \cot\gamma\sqrt{(c^2 - a^2\sin\gamma^2)}} \\ &= \frac{c\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2\sin\alpha^2)}}{c\sin\alpha \mp \cot\alpha\sqrt{(a^2 - c^2\sin\alpha^2)}}. \end{aligned}\right.$$

D. Zur Rechnung in Zahlen sind aber alle drei Ausdrücke (67. 68. 69.) nicht bequem, weil man sich dabei nicht gut der Logarithmen bedienen kann. Die Ausdrücke kommen nur vor, wenn man mit Buchstaben weiter rechnet. Bequemer für die Zahlen-Rechnung ist folgende Auflösung.

Zweite Auflösung. Man berechnet aus den beiden gegebenen Seiten und dem einen anliegenden Win-

kel erst den andern anliegenden Winkel nach (VI.), also nach den Ausdrücken

70. $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha,\quad \sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta,\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$ (46.)

oder, wenn β, γ, α einem rechten Winkel sehr nahe kommen, nach den Ausdrücken

71. $$\begin{cases} \sin\frac{1}{2}(\varrho-\beta) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\beta}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a-b\sin\alpha}{2a}\right)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\varrho-\gamma) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\gamma}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{b-c\sin\beta}{2b}\right)}, \\ \sin\frac{1}{2}(\varrho-\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1-\sin\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{c-a\sin\gamma}{2c}\right)}; \end{cases}$$

(58.), wobei man auf alle dortigen Bedingungen sehen muſs.

Ist auf diese Weise der andere anliegende Winkel gefunden, so findet man, weil $\alpha+\beta+\gamma = 2\varrho$ ist, den gesuchten eingeschlossenen Winkel γ aus

72. $\gamma = 2\varrho-\alpha-\beta,\quad \alpha = 2\varrho-\beta-\gamma,\quad \beta = 2\varrho-\gamma-\alpha.$

Beispiel. A. Es sey z. B. wie im ersten Beispiel (I. *A.*) (VI.)

$$a = 103{,}47,\quad b = 89{,}125,\quad \alpha = 18^\circ.35'.49'',$$

so ist, nach der dortigen Berechnung,

$$\beta = 15^\circ.56'.38''.$$

Also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 145^\circ.27'.33''.$$

B. Im Beispiel (1. *B.*) (VI.), wo

$$a = 103{,}47,\quad b = 89{,}125 \text{ und } \alpha = 121^\circ.8'.52''$$

war, ist nach der dortigen Rechnung $\beta = 50^\circ.31'.38''$. Also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 8^\circ.19'.30''.$$

C. Im dritten Beispiel (II. VI.), wo

$$a = 35{,}4207,\quad b = 143{,}85 \text{ und } \beta = 14^\circ.15'.17''$$

war, ist nach der dortigen Rechnung

$$\beta = 89^\circ.54'.2{,}6'' \text{ und } \beta = 90^\circ.5'.57{,}4'';$$

also ist der gesuchte Winkel

$$\gamma = 75^\circ.50',40{,}4'' \text{ und } \gamma = 75^\circ.58',45{,}6''.$$

Aufgabe. VIII. *Aus zwei gegebenen Seiten eines Dreiecks und einem anliegenden Winkel die dritte Seite zu finden, also*

aus a, b *und* α *oder* β . . . . c,
aus b, c *und* β *oder* γ . . . . a,
aus c, a *und* γ *oder* α . . . . b.

Erste Auflösung. Die auflösende Gleichung

73. $b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$ (11. §. 358.)

giebt $c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2 - a^2 = 0$, also

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{(b^2\cos\alpha^2 - b^2 + a^2)}, \text{ oder}$$

$$74. \begin{cases} c = b\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2\sin\alpha^2)} = a\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2\sin\beta^2)}, \\ a = c\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2\sin\beta^2)} = b\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2\sin\gamma^2)}, \\ b = a\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2\sin\gamma^2)} = c\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2\sin\alpha^2)}. \end{cases}$$

Zur Rechnung mit Zahlen sind diese Ausdrücke nicht bequem.

Zweite Auflösung. Man berechne aus den beiden gegebenen Seiten und dem einen anliegenden Winkel erst den eingeschlossenen Winkel, nach (VII. zweite Auflösung), also nach den Ausdrücken

75. $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$, $\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$ (46.),

76. $\gamma = 2\varrho - \alpha - \beta$, $\alpha = 2\varrho - \beta - \gamma$, $\beta = 2\varrho - \gamma - \alpha$,

mit allen Beobachtungen (VI.).

Ist auf diese Weise der eingeschlossene Winkel gefunden, so ist die Aufgabe in dem Falle (III.) und z. B. die auflösende Gleichung (2. §. 358.) giebt

77. $c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$, also auch $a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $b = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Beispiel A. Es sey, wie im ersten Beispiel (I. *A.* VI.),

$$a = 103{,}47,\ b = 89{,}125 \text{ und } \alpha = 18^\circ.\,35'.\,49'',$$

so ist nach (VII. Beispiel *A.*)

$$\gamma = 145^\circ.\,27'.\,33'',$$

also nunmehr nach (46.)

$$\begin{aligned} {}^{10}a &= 0{,}0148144 + 2 \\ {}^{10}(\sin\gamma) &= \underline{0{,}7535780 - 1} \\ {}^{10}(a\sin\gamma) &= 0{,}7683924 + 1 \\ {}^{10}(\sin\alpha) &= \underline{0{,}5036664 - 1} \\ {}^{10}c &= 0{,}2647260 + 2 \\ c &= 183{,}961. \end{aligned}$$

B. Es sei, wie im zweiten Beispiel (I. *B.* VI.),

$$a = 103{,}47,\ b = 89{,}125 \text{ und } \alpha = 121^\circ.\,8'.\,52'',$$

so ist nach (VII. Beispiel *B.*)

$$\gamma = 8^\circ.\,19'.\,30'',$$

also nach (46.)

$$^{10}a = 0{,}0148144 + 2$$
$$^{10}(\sin\gamma) = 0{,}1607322 - 1$$
$$^{10}(a\sin\gamma) = 0{,}1755466 + 0$$
$$^{10}(\sin\alpha) = 0{,}9323906 - 1$$
$$^{10}c = 0{,}2431560 + 1$$
$$c = 17{,}504.$$

C. Es sey, wie im dritten Beispiel (II. VI.), $a = 35{,}4204$, $b = 143{,}85$ und $\alpha = 14^\circ.\ 15'.\ 17''$, so ist nach (VII. Beispiel *C.*)

$$\gamma = 75^\circ.\ 50'.\ 40{,}4'' \text{ und } \gamma = 75^\circ.\ 38'.\ 45{,}6''.$$

Der erste Werth von γ giebt nach (46.)

$$^{10}a = 0{,}5492571 + 1$$
$$^{10}(\sin\gamma) = 0{,}9866085 - 1$$
$$^{10}(a\sin\gamma) = 1{,}5358656 + 0$$
$$^{10}(\sin\alpha) = 0{,}3913465 - 1$$
$$^{10}c = 0{,}1445191 + 2$$
$$c = 139{,}482.$$

Der zweite Werth von γ giebt

$$^{10}a = 0{,}5492571 + 1$$
$$^{10}(\sin\gamma) = 0{,}9862265 - 1$$
$$^{10}(a\sin\gamma) = 1{,}5364836 + 0$$
$$^{10}(\sin\alpha) = 0{,}3913465 - 1$$
$$^{10}c = 0{,}1441371 + 2$$
$$c = 139{,}360.$$

In diesem dritten Beispiel hat also c die zwei Werthe

$$c = 139{,}482 \text{ und } c = 139{,}360.$$

Aufgabe IX. *Aus den drei gegebenen Seiten eines Dreiecks einen Winkel zu finden, also aus* a, b, c .... α, β *oder* γ.

Auflösung A. Die auflösende Gleichung

$$78.\quad b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2 \quad (11.\ \S.\ 358.)$$

giebt $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$, also

$$79.\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \end{cases}$$

Vermittelst dieser Ausdrücke findet man α, β, γ aus a, b und c.

B. Die Ausdrücke (79.) sind aber zur Rechnung mit Logarithmen nicht bequem. Folgende sind es mehr.

Aus (79.) folgt z. B.

$$1 - \cos\alpha^2 = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \text{ oder}$$

$$\sin\alpha^2 = \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \text{ oder}$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2be}, \text{ oder},$$

$$\sin\alpha^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4b^2c^2}, \text{ also}$$

80.
$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{[(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)]}}{2bc}, \\ \sin\beta = \dfrac{\sqrt{[(b + c + a)(b + c - a)(b - c + a)(c + a - b)]}}{2ca}, \\ \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{[(c + a + b)(c + a - b)(c - a + b)(a + b - c)]}}{2ab}. \end{cases}$$

Nach diesen Ausdrücken läfst sich mit Logarithmen leichter rechnen.

Der Zähler ist in allen drei Ausdrücken der nämliche.

C. Aus (79.) folgt auch z. B.

$$1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}.$$

Nun ist $1 - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$ (§. 345. 35.). Also ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}, \text{ folglich}$$

81.
$$\begin{cases} \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\dfrac{(a - b + c)(a + b - c)}{bc}\right]}, \\ \sin\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\dfrac{(b - c + a)(b + c - a)}{ca}\right]}, \\ \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left[\dfrac{(c - a + b)(c + a - b)}{ab}\right]}. \end{cases}$$

Ferner folgt aus (79.) z. B.

$$1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ oder}$$

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}.$$

Nun ist $1 + \cos\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$ (§. 345. 35.). Also ist

$$82. \begin{cases} \cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{bc}\right]}, \\ \cos\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{ca}\right]}, \\ \cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}\right]}. \end{cases}$$

D. Dividirt man (81.) durch (82.), und umgekehrt, so erhält man auch, weil z. B. $\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tang\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \cot\frac{1}{2}\alpha$ ist,

$$83. \begin{cases} \tang\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c+a)(b+c-a)}\right]}, \\ \tang\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\left[\frac{(b-c+a)(b+c-a)}{(c+a+b)(c+a-b)}\right]}, \\ \tang\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\left[\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}\right]}. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} \cot\frac{1}{2}\alpha = \tang(\varrho - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left[\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a-b+c)(a+b-c)}\right]}, \\ \cot\frac{1}{2}\beta = \tang(\varrho - \frac{1}{2}\beta) = \sqrt{\left[\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{(b-c+a)(b+c-a)}\right]}, \\ \cot\frac{1}{2}\gamma = \tang(\varrho - \frac{1}{2}\gamma) = \sqrt{\left[\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(c-a+b)(c+a-b)}\right]}. \end{cases}$$

E. Die Ausdrücke (80. 81. 82. 83. 84.) enthalten sämmtlich eine **zweite Wurzel**, und daher können z. B. $\sin\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$ und $\tang\frac{1}{2}\alpha$ sowohl positiv als negativ genommen werden. Die negativen Werthe kommen aber nicht in Betracht, weil ein Dreieck keinen negativen Winkel haben kann. Sie kommen nur dadurch in die Rechnung, dafs in der auflösenden Gleichung (11. §. 358.) α auch negativ seyn kann, ohne dafs sich die Gleichung änderte, indem z. B. $\cos\alpha = \cos -\alpha$ ist. Der negative Werth von α ist aber nicht gemeint. Die Wurzelgröfse in den Ausdrücken (80. 81. 82. 83. 84.) darf also immer nur **positiv** genommen werden.

In

In den Ausdrücken (80.) gehören auch noch zwei Winkel, z. B. α und $2\varrho - \alpha$, zu dem nämlichen Sinus. Gleichwohl kann nur von einem die Rede seyn, weil das Dreieck durch die gegebenen drei Seiten unbedingt bestimmt wird, d. h. nur ein Dreieck mit den nämlichen drei Seiten existirt. Die dem gesuchten Winkel, z. B. α, gegenüber liegende Seite a muſs entscheiden, ob z. B. $\sin \alpha$ zu α oder zu $2\varrho - \alpha$ gehört, das heiſst, ob α im ersten oder im zweiten Quadranten liegt.

1) Ist a nicht die gröſste aller drei Seiten, so kann α nicht stumpf seyn (§. 47. III.), α kann also alsdann nur im *ersten* Quadranten liegen.

2) Ist a die gröſste aller drei Seiten, so kann α sowohl spitz als stumpf seyn. Alsdann kommt es darauf an, ob $\cos \alpha$ (79.) positiv oder negativ ist, das heiſst, ob

85. $b^2 + c^2 > a^2$ oder $b^2 + c^2 < a^2$

ist, oder auch ob $\tang \frac{1}{2}\alpha$ kleiner oder gröſser als 1 ist. Denn da $\tang \frac{1}{4}\pi = 1$, so ist $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, wenn $\tang \frac{1}{2}\alpha < 1$, und $\alpha > \frac{1}{2}\pi$, wenn $\tang \frac{1}{2}\alpha > 1$. Es kömmt also vermöge (83.) darauf an, ob

86. $\begin{cases}(a-b+c)(a+b-c) < (b+c+a)(b+c-a) \text{ oder} \\ (a-b+c)(a+b-c) > (b+c+a)(b+c-a)\end{cases}$

ist. Im ersten Falle liegt α im ersten, im zweiten Falle im zweiten Quadranten.

F. Durch den Ausdruck (80.) findet man den gesuchten Winkel, wenn derselbe einem rechten Winkel nahe kommt, weniger genau, weil die Sinus von Winkeln, die wenig von einem Rechten abweichen, nur wenig verschieden sind. Alsdann geben die Ausdrücke (81. 82. 83. 84.) den Winkel genauer; denn der halbe Winkel ist alsdann wenig von einem halben rechten Winkel verschieden.

Kommt der gesuchte Winkel der Null nahe, so geben ihn die Ausdrücke (80. 81. und 83.) genauer, nicht aber die Ausdrücke (82. und 84.), weil die Cosinus sehr kleiner Winkel wenig von einander abweichen und die Cotangenten sehr groſs sind.

Kommt der gesuchte Winkel zwei Rechten sehr nahe, so geben ihn am genauesten die Ausdrücke (81. 82. und 84.), weil die Sinus von Winkeln, die nahe an 2ϱ liegen, und die Cosinus und Cotangenten der halben Winkel, die dann einem rechten nahe kommen, fast dem Bogen, erster des Supplements, letzter des Complements gleich sind.

Hieraus folgt, dafs die Ausdrücke (83. und 84.) vorzugsweise vor den andern zur Berechnung in Zahlen in allen Fällen geschickt sind. Ist der gesuchte Winkel einem rechten Winkel nahe, so sind sie beide gleich gut. Ist derselbe nahe an 0, so nimmt man den Ausdruck (83.), und ist der Winkel nahe an 2ϱ, so nimmt man den Ausdruck (84.). Der Vorzug von (83. und 84.) ist deshalb noch um so gröfser, weil die Producte $(a+b+c)$ $(a+b-c)$ und $(a-b+c)$ $(b+c-a)$ in diesen Ausdrücken, z. B. für den Winkel α, nach (86.) zugleich entscheiden, ob α im ersten oder zweiten Quadranten liegt. Auch braucht man für beide Ausdrücke (83. und 84.) immer nur die Logarithmen von den vier Factoren, also immer nur von den nämlichen Gröfsen zu nehmen.

G. Die Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, z. B. α aus a, b, c, geschieht also in allen Fällen auf folgende Weise.

1) Man berechnet die drei Summen $a+b$, $a+c$ und $b+c$.

2) Von der ersten zieht man c, von der zweiten b und von der dritten a ab, desgleichen addirt man noch z. B., zu der ersten c, dieses giebt $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ und $a+b+c$.

3) Von diesen vier Gröfsen sucht man in den Tafeln die Logarithmen, nimmt z. B. für den Winkel α die Summen der Logarithmen von $a-b+c$, $a+b-c$ und von $a+b+c$, $b+c-a$.

4) Die gröfsere Summe zieht man von der kleinern ab, und nimmt von dem negativen Reste die Hälfte.

5) Diese Hälfte ist, wenn $(a-b+c)$ $(a+b-c)$ $<(b+c+a)$ $(b+c-a)$ war, der Logarithme von $\tang \frac{1}{2}\alpha$. Ist $(a-b+c)$ $(a+b-c)>(b+c+a)$ $(b+c-a)$, so ist sie der Logarithme von $\cot \frac{1}{2}\alpha$. Das zugehörige $\frac{1}{2}\alpha$ wird immer im ersten Quadranten genommen. Das doppelte von $\frac{1}{2}\alpha$ giebt den gesuchten Winkel α.

Beispiele. I. Die Seiten des gegebenen Dreiecks a, b, c sollen

$$a=6319{,}51,\quad b=3817{,}23,\quad c=6034{,}81$$

seyn. Der Winkel α, der Seite a gegenüber, wird gesucht. Es ist:

$$a+b = 10136{,}74,$$
$$a+c = 11354{,}32,$$
$$b+c = 8852{,}04; \text{ also}$$
$$a+b+c = 15171{,}55,$$
$$b+c-a = 2532{,}53,$$
$$a-b+c = 7537{,}09,$$
$$a+b-c = 5101{,}93.$$
$$^{10}(a+b+c) = 0{,}1810299+4$$
$$^{10}(b+c-a) = \underline{0{,}4033831+3}$$
$$^{10}[(a+b+c)(b+c-a)] = 0{,}5844130+7.$$
$$^{10}(a-b+c) = 0{,}8771990+3$$
$$^{10}(a+b-c) = \underline{0{,}7077345+3}$$
$$^{10}[(a-b+c)(a+b-c)] = 0{,}5849335+7.$$

Da, wie man sieht, $(a-b+c)(a+b-c)$ gröfser ist, als $(a+b+c)(b+c-a)$, so mufs man den **e r s t e n** Ausdruck (84.) nehmen. Es ist also

$$\begin{array}{r} 1{,}5844130+6 \\ -\,0{,}5849335+7 \\ \hline \end{array}$$
$$^{10}(\cot\tfrac{1}{2}\alpha) = {}^{10}(\tang(\varrho-\tfrac{1}{2}\alpha)) = 0{,}9994795-1$$
$$\varrho-\tfrac{1}{2}\alpha = 44^\circ.\,57'.\,56''$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 45^\circ.\;2'.\;4''$$
$$\alpha = 90^\circ.\;4'.\;8''.$$

II. Es sey
$$a=5813{,}03,\; b=4372{,}18,\; c=10184{,}85$$
und es werde der Winkel α, der Seite a gegenüber, gesucht.

Es ist

$$a+b=10185{,}21,$$
$$a+c=15997{,}88,$$
$$b+c=14557{,}03; \text{ also}$$
$$a+b+c=20370{,}06,$$
$$b+c-a= 8744{,}00,$$
$$a-b+c=11625{,}70,$$
$$a+b-c= 0{,}36,$$
$$^{10}(a+b+c)=0{,}3089922+4$$
$$^{10}(b+c-a)=\underline{0{,}9417101+3}$$
$$^{10}((a+b+c)(b+c-a))=0{,}2507023+8$$
$$^{10}(a-b+c)=0{,}0654191+4$$
$$^{10}(a+b-c)=\underline{8{,}5563025-1}$$
$$^{10}((a-b+c)(a+b-c))=0{,}6217216+3.$$

Da, wie man sieht, $(a+b+c)(b+c-a)$ gröfser ist als $(a-b+c)(a+b-c)$, so mufs man den **e r s t e n** Ausdruck (83.) nehmen. Es ist also

$$\begin{array}{r} 0{,}6217216+3 \\ -0{,}2507023+8 \\ \hline {}^{1}\!\log(tang\,\tfrac{1}{2}\alpha)=0{,}3710193-6. \end{array}$$

Da dieser Logarithme so klein ist, daſs man den zugehörigen Winkel in der Tafel gar nicht findet, so nehme man erst die zugehörige **Zahl**. Diese ist

$$tang\,\tfrac{1}{2}\alpha=0{,}0000235.$$

Für so kleine Winkel sind die Tangenten den Bogen fast gleich, also kann man $\frac{1}{2}\alpha$, statt $tang\,\frac{1}{2}\alpha$ setzen. Nun ist der Bogen von 1 Secunde nach den Vegaschen Tafeln (S. 296.) gleich

0,0000485; also ist

$$\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{0{,}0000235}{0{,}0000485}\text{ Secunden,}$$

und folglich

$$\alpha=\frac{470}{485}=0{,}969\text{ Secunden.}$$

Die in diesem Paragraph enthaltenen Aufgaben, aus drei bestimmenden Stücken eines Dreiecks die übrigen zu finden, kommen besonders häufig vor; deshalb sind sie umständlich und ausführlich abgehandelt worden.

361.

Anmerkung. Aus den Gleichungen (1. 2. und 3. §. 358.) *folgt:*

$$1.\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},\quad 2.\ \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},\quad 3.\ \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Wegen dieser Ausdrücke kann man, wenn in Zähler und Nenner irgend eines Bruchs, Seiten oder Sinus der Winkel eines Dreiecks vorkommen, ohne Weiteres statt der Seiten die Sinus der gegenüber liegenden Winkel, und umgekehrt, schreiben; nur muſs die Verwechselung in allen Gliedern des Zählers und Nenners, mit allen den Potestäten der Seiten und Sinus geschehen, deren Exponenten zusammen gleich sind. Z. B. es sey der Ausdruck

$$4.\quad \frac{a^m b^n + a^p c^q d^r + b^x e^k}{a^y d e + c^z b^t e^v},$$

gegeben, wo a, b, c **Seiten eines Dreiecks**, d und e aber beliebige andere Gröſsen bedeuten, so setze man $b=\varkappa a$, $c=\lambda a$. Alsdann ist auch $\sin\beta=\varkappa\sin\alpha$ und $\sin\gamma=\lambda\sin\alpha$, wenn α, β, γ die in dem Dreieck, den Seiten a, b, c gegenüber liegenden Winkel bedeuten; denn nach den Gleichungen (3. und 2.) ist

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \text{ und } \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Nun stelle man sich vor, es werde in den Ausdruck (4.) statt b und c auf die Weise $\varkappa a$ und λa gesetzt, daſs man aus den Potestäten von a, welche jetzt alle Glieder in Zähler und Nenner enthalten, irgend eine Potestät von a, z. B. a^μ zum gemeinschaftlichen Factor nehmen kann, so wird dieser gemeinschaftliche Factor sich offenbar oben und unten aufheben. Ganz das nämliche würde aber auch geschehen seyn, wenn statt derjenigen verschiedenen Potestäten von a, b, und c, die sich in den gemeinschaftlichen Factor a^μ vereinigten, die nämlichen Potestäten von $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ gestanden hätten. Dieselben würden den gemeinschaftlichen Factor $\sin\alpha^\mu$ gegeben haben, weil $\sin\beta = \varkappa\sin\alpha$ und $\sin\gamma = \lambda a$ ist, eben wie $b = \varkappa a$ und $c = \varkappa a$. Diese gemeinschaftlichen Factoren $\sin\alpha^\mu$ würden sich also ebenfalls oben und unten aufgehoben haben; und da Alles übrige, was der Ausdruck auſser den gemeinschaftlichen Factoren a^μ und $\sin\alpha^\mu$ enthält, in beiden Fällen das Nämliche ist, so bedeutet der Ausdruck (4.) ganz gleich viel, ob darin a, b, c zusammen auf die Potestät μ erhoben sind, oder ob $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ zusammen auf eben die Potestät steigen. Daher kann man nach Willkühr Eines statt des Andern setzen. Hätte der Ausdruck (4.) Glieder, die gar kein a, b, c, oder gar kein $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ enthalten, so müſste man, wenn man in den übrigen Gliedern die Potestäten von a, b, c und $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ bis zur Exponenten-Summe μ verwechseln wollte, zuvor oben und unten mit a^μ, oder $\sin\alpha^\mu$, oder auch mit b^μ oder $\sin\beta^\mu$, oder mit c^μ oder $\sin\gamma^\mu$ multipliciren. Alsdann findet die Verwechselung, bis zur Exponenten-Summe μ, wie vorhin Statt.

Es ist z. B.

$$5. \quad \frac{a^5 b^8 + a^8 c^7 d^3 + b^{10} e^3}{a^{11} d e + c^2 b^7 e^4}$$

$$= \frac{a^3 \sin\alpha^2 b^4 \sin\beta^4 + a^2 \sin\alpha\, c \sin\gamma^5 d^3 + b^4 \sin\beta^6 e^3}{a^5 \sin\alpha^6 d e + \sin\gamma^2 \sin\beta^4 b^3 e^4}$$

$$= \frac{a^3 b^4 \sin\alpha^2 \sin\beta^4 + a^2 c d^3 \sin\alpha \sin\gamma^5 + b^4 e^3 \sin\beta^6}{a^5 d e \sin\alpha^6 + b^3 e^4 \sin\beta^4 \sin\gamma^2}.$$

In der That erhält man, wenn man in (5.) linkerhand $\varkappa a$ statt b und λa statt c setzt,

$$\frac{a^3 b^4 (a^2 x^4 a^4) + a^2 c d^3 (a \lambda^5 a^5) + b^4 e^3 (x^6 a^6)}{a^5 d e (a^6) + b^3 e^4 (\lambda^2 a^2 . x^4 a^4)},$$

oder weil nun a^6 oben und unten ein gemeinschaftlicher Factor ist,

$$6. \quad \frac{x^4 a^3 b^4 + \lambda^5 a^2 c d^3 + x^6 b^4 e^3}{a^5 d e + \lambda^2 x^4 b^3 e^4}.$$

Setzt man dagegen in den Ausdruck (5.) rechterhand $x \sin\alpha$ statt $\sin\beta$ und $\lambda \sin\alpha$ statt $\sin\gamma$, so erhält man

$$\frac{a^3 b^4 (\sin\alpha^2 x^4 \sin\alpha^4) + a^2 c d^3 (\sin\alpha \lambda^5 \sin\alpha^5) + b^4 e^3 (x^6 \sin\alpha^6)}{a^6 d e (\sin\alpha^6) + b^3 e^4 (x^4 \sin\alpha^4 \lambda^2 \sin\alpha^2)}$$

oder, weil jetzt $\sin\alpha^6$ oben und unten ein gemeinschaftlicher Factor ist,

$$7. \quad \frac{x^4 a^3 b^4 + \lambda^5 a^2 c d^3 + x^6 b^4 e^3}{a^5 d e + \lambda^2 x^4 b^3 e^4},$$

welcher Ausdruck, wie man sieht, mit (6.) übereinstimmt.

Es bleibt alles das nämliche, wenn auch die Exponenten der Potestäten **Brüche** oder **beliebige andere Zahlen** sind.

Hätte man einen Ausdruck wie

$$8. \quad \frac{a^2 b^{\frac{1}{2}} + c^2 d^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}}}{b^3 e^{\frac{1}{2}} + d e^{\frac{5}{2}}},$$

welcher in einigen Gliedern gar kein a, b, c enthält, und man wollte statt der Dreiecks-Seiten a, b, c die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, bis zur Exponenten-Summe $\frac{1}{3}$ einführen, so müſste man erst mit $a^{\frac{5}{3}}$ oder $b^{\frac{5}{3}}$ oder $c^{\frac{5}{3}}$ oben und unten multipliciren; alsdann kann man mit (8.) wie mit (5.) verfahren.

362.

Lehrsatz. Wenn α, β und γ die Winkel eines beliebigen Dreiecks sind, so ist

1. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$
2. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma.$
3. $\begin{cases} \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4 \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma, \\ \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin 2\alpha = 4 \cos\beta \cos\gamma \sin\alpha, \\ \sin 2\gamma + \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 4 \cos\gamma \cos\alpha \sin\beta. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma, \\ \sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha = 4 \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\alpha, \\ \sin\gamma + \sin\alpha - \sin\beta = 4 \sin\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta. \end{cases}$
5. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$
6. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma - 1$
7. $\tang\alpha + \tang\beta + \tang\gamma = \tang\alpha \tang\beta \tang\gamma.$
8. $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha \operatorname{cosec}\beta \operatorname{cosec}\gamma.$

Beweis. Diese Ausdrücke findet man aus den allgemeinen Ausdrücken (119. bis 126. §. 345.), wenn man daselbst α, β, γ statt x, y, z schreibt, und weil hier $\alpha+\beta+\gamma=2\varrho$ ist, dort $x+y+z=2\varrho$ setzt.

I. Der erste dortige Ausdruck (119.) nemlich giebt für $x+y+z=2\varrho$, weil alsdann $\sin(x+y+z)=0$, $\sin(x+y-z)=\sin(2\varrho-z-z)=\sin 2z$ und eben so $\sin(x-y+z)=\sin 2y$, $\sin(y+z-x)=\sin 2x$ ist, $4\sin x\sin y\sin z=\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$; welches der gegenwärtige Ausdruck (I.) ist.

II. In dem zweiten dortigen Ausdruck (120.) ist jetzt

$$\sin\tfrac{1}{2}(x+y)=\sin\tfrac{1}{2}(2\varrho-z)=\sin(\varrho-\tfrac{1}{2}z)=\cos\tfrac{1}{2}z,$$

und eben so

$$\sin\tfrac{1}{2}(x+z)=\cos\tfrac{1}{2}y,\ \sin\tfrac{1}{2}(y+z)=\cos\tfrac{1}{2}x, \text{ also dort}$$

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}y\cos\tfrac{1}{2}z;$$

welches der gegenwärtige Ausdruck (2.) ist.

III. Der siebente dortige Ausdruck (125.) ist jetzt

$$4\sin x\cos y\cos z=\sin 2z+\sin 2y-\sin 2x,$$

oder hier

$$4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=\sin 2\gamma+\sin 2\beta-\sin 2\alpha;$$

welches der zweite Ausdruck (3.) ist, woraus man die andern beiden (3.) durch Weiterrücken der Buchstaben findet.

IV. Der achte obige Ausdruck (126.) ist jetzt, weil $\sin\tfrac{1}{2}(x+y)=\cos\tfrac{1}{2}z$, $\cos\tfrac{1}{2}(x+z)=\cos\tfrac{1}{2}(2\varrho-y)$ $=\cos(\varrho-\tfrac{1}{2}y)=\sin\tfrac{1}{2}y$, und eben so $\cos\tfrac{1}{2}(y+z)=\sin\tfrac{1}{2}x$ ist,

$$\sin x+\sin y-\sin z=4\cos\tfrac{1}{2}z\sin\tfrac{1}{2}y\sin x,$$

oder hier

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma;$$

welches der erste der drei obigen Ausdrücke (4.) ist. Die andern beiden findet man durch Weiterrücken der Buchstaben.

V. Der dritte obige Ausdruck (127.) ist jetzt, weil $\cos(x+y+z)=\cos 2\varrho=-1$, $\cos(x+y-z)$ $=\cos(2\varrho-z-z)=\cos(2\varrho-2z)=-\cos 2z$ und eben so $\cos(x-y+z)=-\cos 2y$, $\cos(y+z-x)=-\cos 2x$ ist,

$$4\cos x\cos y\cos z=-1-\cos 2x-\cos 2y-\cos 2z;$$

welches den gegenwärtigen Ausdruck (5.) giebt.

VI. Der vierte obige Ausdruck (124.) ist jetzt, weil $\cos\tfrac{1}{2}(x+y)=\sin\tfrac{1}{2}z$, $\cos\tfrac{1}{2}(x+z)=\sin\tfrac{1}{2}y$ und $\cos\tfrac{1}{2}(y+z)=\sin\tfrac{1}{2}x$ ist,

$$\cos x+\cos y+\cos z=4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}y\sin\tfrac{1}{2}z-1;$$

welches den gegenwärtigen Ausdruck (6.) giebt.

VII. Der fünfte obige Ausdruck (125.) ist jetzt, weil $sin(x+y+z) = 0$ ist,

$$tang\, x\, tang\, y\, tang\, z = tang\, x + tang\, y + tang\, z;$$

welches der gegenwärtige Ausdruck (7.) ist.

VIII. Der sechste obige Ausdruck (124.) ist jetzt, weil $cos(x+y+z) = -1$ und

$\frac{1}{sin\, x} = cosec\, x$, $\frac{1}{sin\, y} = cosec\, y$, $\frac{1}{sin\, z} = cosec\, z$ ist,

$$cot\, x\, cot\, y\, cot\, z = cot\, x + cot\, y + cot\, z + cosec\, x\, cosec\, y\, cosec\, z;$$

welches den gegenwärtigen Ausdruck (8.) giebt.

363.

Erläuterung. Aus den Stücken, welche ein Dreieck bestimmen, mufs sich auch der Flächen-Inhalt desselben finden lassen, also

1) *aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;*
2) *aus zwei Seiten und einem anliegenden Winkel;*
3) *aus einer Seite und zwei anliegenden Winkeln;*
4) *aus einer Seite und einem anliegenden und dem gegenüber liegenden Winkel;*
5) *aus den drei Seiten.*

Dieses geschieht wie folgt.

364.

Aufgabe I. *Den Inhalt* $\triangle$ *eines beliebigen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu finden, also z. B.* (*Fig.* 171. I. *und* II.)

$\triangle$ *aus* a, b *und* γ,
$\triangle$ *aus* b, c *und* α, *und*
$\triangle$ *aus* c, a *und* β.

Auflösung. Wenn man z. B. $BC = a$ zur Grundlinie nimmt, so ist das Perpendikel von A auf BC die Höhe des Dreiecks, also der Inhalt $\triangle$ gleich $\frac{1}{2}a.AD$ (§. 116.).

Es ist aber $AD = b\, sin\, \gamma$, also ist

$$1. \begin{cases} \triangle = \frac{1}{2}ab\, sin\, \gamma \text{ und folglich, durch Weiterrücken der Buchstaben,} \\ \triangle = \frac{1}{2}bc\, sin\, \alpha \\ \triangle = \frac{1}{2}ca\, sin\, \beta. \end{cases}$$

Hiernach läfst sich bequem mit Logarithmen rechnen. Die Zahl, welche man für $\triangle$ findet, ist die *Zahl der* Quadrate der Längen-Einheit, welche auf die Fläche des Dreiecks gehen.

Aufgabe II. *Den Inhalt △ eines beliebigen Dreiecks aus zwei Seiten und einem anliegenden Winkel zu finden; also:*

$\triangle$ *aus* a, b *und* α, *oder* a, b *und* β,
$\triangle$ *aus* b, c *und* β, *oder* b, c *und* γ,
$\triangle$ *aus* c, a *und* γ, *oder* c, a *und* α.

Auflösung. Zufolge (I.) ist z. B. $\triangle = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, oder $= \frac{1}{2} ac \sin\beta$.

Drückt man im ersten Falle c durch die gegebenen Stücke a, b und α nach (§. 359, 74. 1ste Gleichung 1.) aus, nämlich durch

$$c = b\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)},$$

so erhält man

$$2. \quad \begin{cases} \triangle = \frac{1}{2} b \sin\alpha[b\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}] \\ \triangle = \frac{1}{2} c \sin\beta[c\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - c^2 \sin\beta^2)}] \\ \triangle = \frac{1}{2} a \sin\gamma[a\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - a^2 \sin\gamma^2)}]. \end{cases}$$

Drückt man im andern Falle c durch a, b und β nach (§. 359. 74. 1ste Gleichung 2.) aus, nämlich durch $c = a\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \sin\beta^2)}$, so findet man

$$3. \quad \begin{cases} \triangle = \frac{1}{2} a \sin\beta[a\cos\beta \pm \sqrt{(b^2 - a^2 \sin\beta^2)}] \\ \triangle = \frac{1}{2} b \sin\gamma[b\cos\gamma \pm \sqrt{(c^2 - b^2 \sin\gamma^2)}] \\ \triangle = \frac{1}{2} c \sin\alpha[c\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - c^2 \sin\alpha^2)}]. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2.) gehen in (3.) wie gehörig über, wenn man a und b, α und β; b und c, β und γ; c und a, γ und α verwechselt.

Erster Fall. Liegt der gegebene Winkel der *gröſsern* von den beiden gegebenen Seiten gegenüber, so ist nur ein Dreieck möglich. In der That ist, wenn z. B. im ersten Ausdruck (2.) $a > b$ ist, $a^2 - b^2 \sin\alpha^2$ gröſser als $b^2 - b^2 \sin\alpha^2$, oder gröſser als $b^2 \cos\alpha^2$; mithin $\sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}$ gröſser als $b\cos\alpha$; also ist alsdann einer von den beiden Werthen von $b\cos\alpha \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}$ und folglich von $\triangle$ negativ, was nicht Statt findet. Mithin hat alsdann $\triangle$ nur einen Werth. Es folgt daraus, daſs in diesem Falle in dem Ausdruck (2.), so wie (3.), nur das obere Zeichen gilt.

Zweiter Fall. Liegt der gegebene Winkel der *kleinern* von den beiden gegebenen Seiten gegenüber, so sind entweder zwei Dreiecke möglich, oder es ist keins möglich. In der That ist, wenn z. B. in dem ersten Ausdruck (2.) $a > b$ ist, $a^2 - b^2 \sin\alpha^2$ kleiner als $b^2 - b^2 \sin\alpha^2$, oder klei-

ner als $b^2 \cos\alpha^2$, mithin $\sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}$, in so fern $a^2 - b^2 \sin\alpha^2$ nicht negativ und also die Wurzelgröfse unmöglich ist, kleiner als $b \cos\alpha$. Also kann alsdann sowohl das obere als das untere Zeichen in den Ausdrücken (2.) und (3.) Statt finden.

Es giebt also, wenn z. B. $a < b$ und zugleich $a > b \sin a$ ist, so dafs die Wurzelgröfse $\sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}$ noch reell ist, zwei Dreiecke, deren Inhalt die Gleichungen (2.)(3.) durch das zweifache Zeichen ausdrükken. Ist z. B. $a < b$ und auch $a < b \sin\alpha$, so ist kein Dreieck mit den gegebenen Winkeln möglich, und der Ausdruck des Inhalts (2.) und (3.) ist unmöglich.

Aufgabe III. *Den Inhalt* $\triangle$ *eines Dreiecks aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu finden, also* $\triangle$ *aus* a, β *und* γ,
$\triangle$ *aus* b, γ *und* α, *und*
$\triangle$ *aus* c, α *und* β.

Auflösung. Zufolge (I.) ist z. B. $\triangle = \frac{1}{2} ac \sin\beta$. Nun ist nach (§. 359. I.) $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$; also ist

$$3.\quad \triangle = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta+\gamma)} = \frac{b^2 \sin\gamma \sin\alpha}{2 \sin(\gamma+\alpha)} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha+\beta)},$$

wonach sich bequem mit Logarithmen rechnen läfst.

Da z. B.

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma,$$

so ist auch $\triangle = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}$, und wenn man oben und unten mit $\sin\beta \sin\gamma$ dividirt,

$$4.\quad \triangle = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot\gamma + \cot\beta} = \frac{\frac{1}{2}b^2}{\cot\alpha + \cot\gamma} = \frac{\frac{1}{2}c^2}{\cot\beta + \cot\alpha}.$$

Aufgabe IV. *Den Inhalt* $\triangle$ *eines Dreiecks aus einer Seite und einem anliegenden und dem gegenüber liegenden Winkel zu finden, also*
$\triangle$ *aus* a, β *und* α, *oder aus* a, γ *und* α,
$\triangle$ *aus* b, γ *und* β, *oder aus* b, α *und* β,
$\triangle$ *aus* c, α *und* γ, *oder aus* c, β *und* γ.

Auflösung. Zufolge (I.) ist z. B. $\triangle = \frac{1}{2} ac \sin\beta$. Nun ist nach (§. 359. II.) $c = a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, also ist

$$5.\quad \triangle = \frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\gamma \sin(\beta+\gamma)}{2 \sin\beta}$$
$$= \frac{c^2 \sin\alpha \sin(\gamma+\alpha)}{2 \sin\gamma}.$$

Desgleichen ist nach (I.) $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ und nach (§. 359. II.), $b = a \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha}$. Also ist

$$6. \quad \triangle = \frac{a^2 \sin\gamma \sin(\alpha + \gamma)}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin(\beta + \alpha)}{2 \sin\beta}$$
$$= \frac{c^2 \sin\beta \sin(\gamma + \beta)}{2 \sin\gamma};$$

wonach sich wiederum bequem mit Logarithmen rechnen läfst.

Aufgabe V. Den Inhalt $\triangle$ eines Dreiecks aus den drei Seiten zu finden, also

$\triangle$ *aus* a, b *und* c.

Auflösung. Zufolge (I.) ist $\triangle = \frac{1}{2} ac \sin\beta$. Nun ist nach (§. 359. IX. 80.)

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]}}{2ca}.$$

Also ist

$$7. \quad \triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)]},$$

wonach sich wieder bequem mit Logarithmen rechnen läfst.

Der Ausdruck (7.) stimmt mit (§. 174.) überein, und wie daselbst gezeigt, läfst sich auch der Inhalt des Dreiecks durch die drei Seiten wie folgt ausdrücken:

$$8. \quad \begin{cases} \triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a^2+c^2)^2 - (a^2-c^2)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2]}, \\ \triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(b^2+a^2)^2 - (b^2-a^2)^2 - (b^2+a^2-c^2)^2]}, \\ \triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(c^2+b^2)^2 - (c^2-b^2)^2 - (c^2+b^2-a^2)^2]}; \end{cases}$$

wonach sich mit Hülfe von Quadrat-Tafeln bequem rechnen läfst.

Da in (§. 359. u. 360.) von den Auflösungen ähnlicher Ausdrücke in Zahlen mehrere Beispiele gegeben worden, so wird sich hier und ferner der Raum, den noch mehrere Beispiele einnehmen würden, ersparen lassen.

365.

Anmerkung. Da noch viele andere Linien und Winkel als die Seiten und zwischen ihnen die Winkel, ein Dreieck bestimmen, so läfst sich auch der Inhalt eines Dreiecks noch auf viele andere Art ausdrücken, z. B. wie folgt.

366.

Aufgabe. Der Inhalt $\triangle$ eines Dreiecks aus seinem Umfange p = a + b + c, *wenn* a, b *und* c *die Seiten sind, und aus seinen Winkeln* α, β *und* γ *zu finden.*

Auflösung. Zufolge (§. 361.) ist z. B.

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha}, \text{ also}$$

$$a = \sin\alpha \cdot \frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}, \text{ oder}$$

$$a = \frac{p \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Eben so ist $b = \dfrac{p \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$.

Nun ist $\triangle = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$ (§. 364. I.). Also ist

$$1.\quad \triangle = \frac{\frac{1}{2} p^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}.$$

Zufolge (§. 362. 1. und 2.) ist

$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{1}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ und

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$.

Ferner ist zufolge (§. 345. 34.)

$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha \,.\, 2\sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\beta \,.\, 2\sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma$.

Es ist also auch

$$2.\quad \triangle = \frac{1}{8} p^2 . \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2} \text{ und}$$

$$\triangle = \frac{\frac{1}{2} p^2 . 8 \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma}{16 \cos\frac{1}{2}\alpha^2 \cos\frac{1}{2}\beta^2 \cos\frac{1}{2}\gamma^2}, \text{ oder}$$

$$3.\quad \triangle = \frac{1}{4} p^2 \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\beta \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

oder auch, da $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$, also z. B. $\frac{1}{2}\gamma = \varrho - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\text{tang}\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ist,

$$\triangle = \frac{1}{4} p^2 \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\beta \cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \text{ oder}$$

$$\triangle = \frac{1}{4} p^2 \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \,\text{tang}\tfrac{1}{2}\beta \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta - 1}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta} \text{ (§. 345. 26.)},$$

folglich

$$\triangle = \frac{1}{4} p^2 . \frac{1 - \text{tang}\frac{1}{2}\alpha \,\text{tang}\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta},$$

$$\triangle = \frac{1}{4} p^2 . \frac{1 - \text{tang}\frac{1}{2}\beta \,\text{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma},$$

$$\triangle = \frac{1}{4} p^2 . \frac{1 - \text{tang}\frac{1}{2}\gamma \,\text{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\alpha}.$$

367.

Erläuterung. Ist eine Seite oder ein Winkel weniger gegeben als ein Dreieck bestimmen, dagegen aber der **Inhalt**, so läſst sich aus den Gleichungen zwischen dem Inhalt und den bestimmenden Stücken umgekehrt das fehlende Stück finden. Die Gleichungen (§. 364. u. 365.)

enthalten daher zugleich die Auflösungen von eben so viel Aufgaben als auf diese Weise entstehen; wie folgt.

368.

Aufgabe I. *Aus dem Inhalt und zwei Seiten eines Dreiecks den von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkel zu finden.*

Auflösung. Folgt aus (§. 364. I.) unmittelbar, nämlich:

$$1.\quad \sin\alpha = \frac{2\triangle}{bc},\quad \sin\beta = \frac{2\triangle}{ca},\quad \sin\gamma = \frac{2\triangle}{ab}.$$

Aufgabe II. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und einem daran liegenden Winkel, die andere, an dem Winkel liegende Seite zu finden.*

Auflösung. Folgt aus (§. 364. I.) unmittelbar, nämlich

$$2.\quad a = \frac{2\triangle}{b\sin\gamma},\quad b = \frac{2\triangle}{c\sin\alpha},\quad c = \frac{2\triangle}{a\sin\beta},$$

$$3.\quad b = \frac{2\triangle}{a\sin\gamma},\quad c = \frac{2\triangle}{b\sin\alpha},\quad a = \frac{2\triangle}{c\sin\beta}.$$

Aufgabe III. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und dem gegenüber liegenden Winkel, eine der beiden andern Seiten zu finden.*

Auflösung A. Aus (§. 364. II. 2. erste Gleichung) z. B. folgt

$$2\triangle - b^2 \sin\alpha\cos\alpha = \pm b\sin\alpha\sqrt{(a^2 - b^2\sin\alpha^2)},\ \text{also}$$

$$4\triangle^2 - 4\triangle b^2 \sin\alpha\cos\alpha + b^4\sin\alpha^2\cos\alpha^2$$
$$= a^2b^2\sin\alpha^2 - b^4\sin\alpha^4,\ \text{oder}$$

$$b^4\sin\alpha^2 - (a^2\sin\alpha + 4\triangle\cos\alpha)b^2\sin\alpha + 4\triangle^2 = 0,\ \text{oder}$$

$$b^4 - (a^2 + 4\triangle\cot\alpha)b^2 + 4\triangle^2\operatorname{cosec}\alpha^2 = 0,\ \text{folglich}$$

$$6.\quad b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha \pm \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha)^2 - 4\triangle^2\operatorname{cosec}\alpha^2]}.$$

B. Setzt man in den Ausdruck (§. 364. 2. erste Gleichung), woraus diese Gleichung genommen, c statt b, so erhält man den Ausdruck (§. 364. II. 3. dritte Gleichung). Was aus diesem folgt, muſs man also aus (5.) finden, wenn man c statt b setzt. Also ist

$$6.\quad c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha \pm \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha)^2 - 4\triangle^2\operatorname{cosec}\alpha^2]}.$$

C. Da b nicht nothwendig gleich c ist, so folgt, daſs man für b und c verschiedene Zeichen der Wurzelgröſse nehmen muſs, so daſs b^2 und c^2 im Grunde nur einen Werth haben. Es ist also z. B.

$$7.\quad b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha + \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha)^2 - 4\triangle^2\operatorname{cosec}\alpha^2]},$$

$$8.\quad c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha - \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle\cot\alpha)^2 - 4\triangle^2\operatorname{cosec}\alpha^2]}.$$

D. **Zusammen also ist**

$$8. \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha + \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\alpha^2]}, \\ c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha - \sqrt{[(\frac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\alpha^2]}. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} c^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2\triangle \cot\beta + \sqrt{[(\frac{1}{2}b^2 + 2\triangle \cot\beta)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\beta^2]}, \\ a^2 = \frac{1}{2}b^2 + 2\triangle \cot\beta - \sqrt{[(\frac{1}{2}b^2 + 2\triangle \cot\beta)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\beta^2]}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\triangle \cot\gamma + \sqrt{[(\frac{1}{2}c^2 + 2\triangle \cot\gamma)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\gamma^2]}, \\ b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\triangle \cot\gamma - \sqrt{[(\frac{1}{2}c^2 + 2\triangle \cot\gamma)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\gamma^2]}. \end{cases}$$

Aufgabe IV. *Aus dem Inhalt und zweien Seiten eines Dreiecks einen anliegenden Winkel zu finden.*

Auflösung A. Aus (§. 364. II. 2. erste Gleichung) folgt

$2\triangle - b^2 \sin\alpha \cos\alpha = \pm b \sin\alpha \sqrt{(a^2 - b^2 \sin\alpha^2)}$, oder

$4\triangle^2 - 4\triangle b^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^4 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 = b^2 a^2 \sin\alpha^2 - b^4 \sin\alpha^4$, oder

$4\triangle^2 - 4\triangle b^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^4 \sin\alpha^2 = b^2 a^2 \sin\alpha^2$, oder mit $\sin\alpha^2$ dividirt,

$4\triangle^2 \operatorname{cosec}\alpha^2 - 4\triangle b^2 \cot\alpha + b^2(b^2 - a^2) = 0$, oder

$4\triangle^2 \cot\alpha^2 - 4\triangle b^2 \cot\alpha + 4\triangle^2 + b^2(b^2 - a^2) = 0$; also

$2\triangle \cot\alpha = b^2 \pm \sqrt{(b^4 - 4\triangle^2 - b^4 + b^2 a^2)}$, oder

$$11. \quad \cot\alpha = \frac{b^2 \pm \sqrt{(b^2 a^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}.$$

B. Da die erste Gleichung (§. 364. II. 2.), woraus dieser Ausdruck genommen in die erste Gleichung (§. 364. II. 3.) übergeht, wenn man α mit β und a mit b verwechselt, so giebt diese letzte:

$$12. \quad \cot\beta = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^2 b^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}.$$

C. Da $\cot\alpha$ und $\cot\beta$ nur einen Werth haben können, so kann man in den beiden Ausdrücken (11. u. 12.) nur entgegengesetzte Zeichen der Wurzelgröſse nehmen. Es ist also, zusammengenommen:

$$13. \begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{b^2 + \sqrt{(a^2 b^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}, \\ \cot\beta = \dfrac{a^2 - \sqrt{(a^2 b^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \cot\beta = \dfrac{c^2 + \sqrt{(b^2 c^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}, \\ \cot\gamma = \dfrac{b^2 - \sqrt{(b^2 c^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \cot\gamma = \dfrac{a^2 + \sqrt{(c^2 a^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}, \\ \cot\alpha = \dfrac{c^2 - \sqrt{(c^2 a^2 - 4\triangle^2)}}{2\triangle}. \end{cases}$$

Aufgabe V. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks und einem daran liegenden Winkel die diesem Winkel gegenüber liegende Seite zu finden.*

Auflösung. **Wie in (IV.) findet man aus der ersten Gleichung (§. 364. II. 2.)**

$$4\triangle^2 - 4\triangle b^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^4 \sin\alpha^2 = b^2 a^2 \sin\alpha^2,$$

also, wenn man mit $b^2 \sin\alpha^2$ dividirt,

$$16. \quad a^2 = \frac{4\triangle^2}{b^2 \sin\alpha^2} - 4\triangle \cot\alpha + b^2;$$

und da die erste Gleichung (§. 364. II. 2.) in die zweite (§. 364. II. 3.) übergeht, wenn man α mit γ und a mit c verwechselt,

$$17. \quad c^2 = \frac{4\triangle^2}{b^2 \sin\gamma^2} - 4\triangle \cot\gamma + b^2.$$

Es ist also, zusammengenommen:

$$18. \begin{cases} a^2 = \dfrac{4\triangle^2}{b^2 \sin\alpha^2} - 4\triangle \cot\alpha + b^2, \\ c^2 = \dfrac{4\triangle^2}{b^2 \sin\gamma^2} - 4\triangle \cot\gamma + b^2; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} b^2 = \dfrac{4\triangle^2}{c^2 \sin\beta^2} - 4\triangle \cot\beta + c^2, \\ a^2 = \dfrac{4\triangle^2}{c^2 \sin\alpha^2} - 4\triangle \cot\alpha + c^2; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} c^2 = \dfrac{4\triangle^2}{a^2 \sin\gamma^2} - 4\triangle \cot\gamma + a^2, \\ b^2 = \dfrac{4\triangle^2}{a^2 \sin\beta^2} - 4\triangle \cot\beta + a^2. \end{cases}$$

Aufgabe VI. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einer Seite und einem daran liegenden Winkel, den andern anliegenden Winkel zu finden.*

Auflösung. **Aus (§. 364. III. 4.) z. B. folgt**

$\cot\gamma + \cot\beta = \dfrac{a^2}{2\triangle}$. **Also ist**

$$21. \quad \cot\gamma = \frac{a^2}{2\triangle} - \cot\beta, \quad \cot\beta = \frac{a^2}{2\triangle} - \cot\gamma,$$

$$22. \quad \cot\alpha = \frac{b^2}{2\triangle} - \cot\gamma, \quad \cot\gamma = \frac{b^2}{2\triangle} - \cot\alpha,$$

$$23. \quad \cot\beta = \frac{c^2}{2\triangle} - \cot\alpha, \quad \cot\alpha = \frac{c^2}{2\triangle} - \cot\beta.$$

Aufgabe VII. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei Winkeln die zwischen diesen Winkeln liegende Seite zu finden.*

Auflösung. Aus (§. 364. III. 3.) folgt
$a^2 = \frac{2\triangle \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}$, also

$$24.\quad a^2 = \frac{2\triangle \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$25.\quad b^2 = \frac{2\triangle \sin(\gamma+\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha},$$

$$26.\quad c^2 = \frac{2\triangle \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Aufgabe VIII. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einem Winkel und einer daran liegenden Seite, den dieser Seite gegenüber liegenden Winkel zu finden.*

Auflösung. Aus (§. 364. IV. 5.) folgt
$\triangle = \frac{a^2 \sin\beta(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}{2\sin\alpha}$
$= \tfrac{1}{2}a^2\sin\beta(\cos\beta + \sin\beta\cot\alpha)$, oder
$2\triangle - a^2\sin\beta\cos\beta = a^2\sin\beta\cot\alpha$, also
$\cot\alpha = \frac{2\triangle}{a^2\sin\beta} - \cos\beta.$

Eben so findet man aus (§. 364. IV. 6.)
$\cot\alpha = \frac{2\triangle}{a^2\sin\gamma} - \cos\gamma$. Also ist, zusammengenommen:

$$27.\quad \cot\alpha = \frac{2\triangle}{a^2\sin\beta} - \cos\beta = \frac{2\triangle}{a^2\sin\gamma} - \cos\gamma,$$

$$28.\quad \cot\beta = \frac{2\triangle}{b^2\sin\gamma} - \cos\gamma = \frac{2\triangle}{b^2\sin\alpha} - \cos\alpha,$$

$$29.\quad \cot\gamma = \frac{2\triangle}{c^2\sin\alpha} - \cos\alpha = \frac{2\triangle}{c^2\sin\beta} - \cos\beta.$$

Aufgabe IX. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei Winkeln die dem einen von ihnen gegenüber liegende Seite zu finden.*

Auflösung. Aus (§. 364. IV. 5. und 6.) folgt unmittelbar

$$30.\quad a^2 = \frac{2\triangle\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2\triangle\sin\alpha}{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)},$$

also auch

$$31.\quad b^2 = \frac{2\triangle\sin\beta}{\sin\gamma\sin(\beta+\gamma)} = \frac{2\triangle\sin\beta}{\sin\alpha\sin(\beta+\alpha)},$$

$$32.\quad c^2 = \frac{2\triangle\sin\gamma}{\sin\alpha\sin(\gamma+\alpha)} = \frac{2\triangle\sin\gamma}{\sin\beta\sin(\gamma+\beta)}.$$

Auf-

Aufgabe X. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks, einem Winkel und der ihm gegenüber liegenden Seite, einen der anliegenden Winkel zu finden.*

Auflösung. *A.* Aus (§. 364. IV. 5.) folgt

$$2\triangle \sin\alpha = a^2 \sin\beta(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

und wenn man mit $\sin\alpha\sin\beta^2$ dividirt,

$$2\triangle \operatorname{cosec}\beta^2 = a^2(\cot\beta + \cot\alpha), \text{ oder}$$

$$\cot\beta^2 - \frac{a^2}{2\triangle}\cot\beta - \frac{a^2}{2\triangle}\cot\alpha + 1 = 0, \text{ also}$$

$$\cot\beta = \frac{a^2}{4\triangle} \pm \sqrt{\left(\frac{a^4}{16\triangle^2} + \frac{a^2\cot\alpha}{2\triangle} - 1\right)}, \text{ oder}$$

$$\cot\beta = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 8a^2\triangle\cot\alpha - 16\triangle^2)}}{4\triangle}.$$

B. Da der erste Ausdruck (§. 364. IV. 5.) in den ersten Ausdruck (§. 364. IV. 6.) übergeht, wenn man γ statt β setzt, so ist auch

$$\cot\gamma = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^4 + 8a^2\triangle\cot\alpha - 16\triangle^2)}}{4\triangle}.$$

C. Wegen der Gleichheit der Ausdrücke haben die Wurzelgröfsen in $\cot\beta$ und $\cot\gamma$ entgegengesetzte Zeichen. Also ist zusammengenommen

$$33.\quad \begin{cases} \cot\beta = \dfrac{a^2 + \sqrt{(a^4 + 8a^2\triangle\cot\alpha - 16\triangle^2)}}{4\triangle}, \\ \cot\gamma = \dfrac{a^2 - \sqrt{(a^4 + 8a^2\triangle\cot\alpha - 16\triangle^2)}}{4\triangle}; \end{cases}$$

$$34.\quad \begin{cases} \cot\gamma = \dfrac{b^2 + \sqrt{(b^4 + 8b^2\triangle\cot\beta - 16\triangle^2)}}{4\triangle}, \\ \cot\alpha = \dfrac{b^2 - \sqrt{(b^4 + 8b^2\triangle\cot\beta - 16\triangle^2)}}{4\triangle}; \end{cases}$$

$$35.\quad \begin{cases} \cot\alpha = \dfrac{c^2 + \sqrt{(c^4 + 8c^2\triangle\cot\gamma - 16\triangle^2)}}{4\triangle}, \\ \cot\beta = \dfrac{c^2 - \sqrt{(c^4 + 8c^2\triangle\cot\gamma - 16\triangle^2)}}{4\triangle}. \end{cases}$$

Aufgabe XI. *Aus dem Inhalt eines Dreiecks und zwei seiner Seiten die dritte Seite zu finden.*

Auflösung. Aus dem ersten Ausdruck (§. 364. V. 8.) folgt

$$16\triangle^2 = (a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2 - (a^2 + c^2 - b^2), \text{ oder}$$

$$16\triangle^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2, \text{ oder}$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2\sqrt{(a^2c^2 - 4\triangle^2)}; \text{ also}$$

$$36.\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2\sqrt{(a^2c^2 - 4\triangle^2)} \text{ und eben so}$$

37. $c^2 = b^2 + a^2 - 2\sqrt{(b^2 a^2 - 4\Delta^2)}$,

38. $a^2 = c^2 + b^2 - 2\sqrt{(c^2 b^2 - 4\Delta^2)}$.

***Aufgabe* XII.** *Aus dem Inhalt und den Winkeln eines Dreiecks seinen Umfang* p *zu finden.*

Auflösung. Aus (§. 366. 3.) folgt unmittelbar

39. $p^2 = 4\Delta \cot\tfrac{1}{2}\alpha \cot\tfrac{1}{2}\beta \cot\tfrac{1}{2}\gamma$.

***Aufgabe* XIII.** *Aus dem Inhalt, Umfang und einem Winkel eines Dreiecks, einen der beiden übrigen Winkel zu finden.*

***Auflösung.* A.** Aus dem ersten Ausdruck (§. 366. 4.) folgt

$$4\Delta\left(\frac{1}{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\beta}\right) = p^2(1 - \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\beta),$$

oder

$$4\Delta(\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta + \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha) = p^2(\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta - \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta^2),$$

oder

$$\frac{4\Delta}{p^2}(\cot\tfrac{1}{2}\beta + \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta^2) = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta - \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha^2, \text{ oder}$$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\cot\tfrac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta}{p^2}\right) + \frac{4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta}{p^2} = 0;$$

also

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta}{p^2}\right)$$
$$\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{2}\beta^2\left(1 - \frac{4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta}{p^2}\right)^2 - \frac{4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta}{p^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cot\tfrac{1}{2}\beta}{2p^2}[(p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{(p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta})].$$

B. Das eine Zeichen der Wurzelgröfse gilt für α, das andere für γ; also ist überhaupt

$$40. \begin{cases} \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\beta}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta})], \\ \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\beta}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta - \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\beta)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta})], \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\gamma}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\gamma + \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\gamma)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\gamma})], \\ \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\gamma}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\gamma - \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\gamma)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\gamma})], \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\alpha}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha})], \\ \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \dfrac{\cot\tfrac{1}{2}\alpha}{2p^2}[p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\alpha - \sqrt{((p^2 - 4\Delta\cot\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 16p^2\Delta\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha})], \end{cases}$$

***Aufgabe* XIV.** *Aus dem Inhalt, Umfang und einem Winkel eines Dreiecks eine Seite zu finden.*

Auflösung. Man suche nach (XIII.) einen der beiden übrigen Winkel, z. B. wenn α gegeben ist, γ, so hat man auch $\beta = 2\varrho - \alpha - \gamma$, folglich sind alsdann $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ bekannt.

Nun ist

$$p = a + b + c = a\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)$$

(§. 361.) $= \frac{a}{\sin\alpha}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, folglich

$$43. \quad a = \frac{p\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

$$44. \quad b = \frac{p\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma},$$

$$45. \quad c = \frac{p\sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\alpha + \sin\gamma}.$$

369.

Anmerkung. Die Aufgaben des vorigen Paragraphs kommen gewöhnlich so vor, dafs verlangt wird: eine Fläche von gegebener Gröfse mittelst einer graden Linie von einem Dreieck, oder von einer andern Figur, oder auch von einem unbestimmten Winkelraume auf die Weise abzuschneiden, dafs die abgeschnittene Fläche ein Dreieck ist. Die gegebenen Stücke können, aufser dem Inhalt, diese oder jene Seiten und Winkel, oder der Umfang des abzuschneidenden Dreiecks seyn. Mehr Fälle als im vorigen Paragraph kommen, in sofern nur von Seiten und Winkeln, oder von Umfang und Winkeln des abzuschneidenden Dreiecks die Rede ist, nicht vor.

Die gewöhnlichsten Aufgaben sind folgende.

Ein Dreieck ABC (Fig. 173.) *von gegebener Gröfse* Δ *von einer gegebenen beliebigen Figur* ADEGH, *oder von einem gegebenen Winkelraum* DAH *so abzuschneiden,*

1) *dafs die schneidende Linie* BC *mit dem einem Schenkel des Winkels* DAH, *z. B. mit* AD, *einen gegebenen Winkel* β *macht;*

2) *dafs die schneidende Linie* BC *den einen Schenkel des Winkels* DAH, *z. B.* AD, *in gegebener Entfernung* AB = c *vom Scheitel begegnet;*

3) *dafs die schneidende Linie* BC *eine gegebene Länge* a *hat;*

4) *dafs das abgeschnittene Dreieck* ABC *einen gegebenen Umfang* p *hat.*

Im ersten Falle ist gegeben $\triangle$, α und β: gesucht wird z. B. c und b. Zufolge (§. 368. VII. 26. und VIII. 31.) ist

$$c^2 = \frac{2\triangle \sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}, \quad b^2 = \frac{2\triangle \sin\beta}{\sin\alpha \sin(\beta+\alpha)}.$$

Im zweiten Falle ist gegeben $\triangle$, c und α: gesucht wird z. B. b.

Zufolge (§. 368. II. 2.) ist

$$b = \frac{2\triangle}{c \sin\alpha}.$$

Im dritten Falle ist gegeben $\triangle$, α und a: gesucht werden b und c.

Zufolge (§. 368. III. 8.) ist

$$b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha + \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\alpha^2]},$$
$$c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha - \sqrt{[(\tfrac{1}{2}a^2 + 2\triangle \cot\alpha)^2 - 4\triangle^2 \operatorname{cosec}\alpha^2]}.$$

Im vierten Falle ist gegeben $\triangle$, α und p: gesucht werden b und c.

Man suche zu Folge (§. 368. XIII. 42.) aus

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha}{2p^2}[p^2 - 4\triangle\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \sqrt{((p^2 - 4\triangle\cot\tfrac{1}{2}\alpha)^2 - 16p^2\triangle\tan\tfrac{1}{2}\alpha)}]$$

den Winkel γ und aus $\beta = 2\varrho - \beta - \gamma$ den Winkel β, so findet man nach (§. 368. XIV. 44. und 45.)

$$b = \frac{p \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} \text{ und } c = \frac{p \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Die bestimmenden Stücke in der Aufgabe: ein Dreieck von gegebener Gröfse aus einem Winkel abzuschneiden, können auch noch auf manche andere Art gegeben seyn. Einer der gewöhnlichen Fälle ist folgender.

370.

Aufgabe. Von einer beliebigen gegebenen Figur (Fig. 173.), *oder vielmehr von einem gegebenen Winkelraume* DAH, *mittelst einer graden Linie* BC *ein Dreieck* ABC *von gegebener Gröfse* $\triangle$ *so abzuschneiden, dafs die Schnittlinie durch einen gegebenen Punct* P *geht.*

Auflösung. Es sey PM mit AH parallel und $AM = q$, $PM = s$, wodurch der Punct P gegeben ist. Die Dreiecke BPM und BCA sind ähnlich. Also ist $\frac{BM}{PM} = \frac{AB}{AC}$ oder $\frac{q-c}{s} = \frac{c}{b}$, woraus $b = \frac{cs}{q-c}$ folgt.

Nun ist $\triangle = \frac{\frac{1}{2}c^2 s \sin\alpha}{q-c}$. Daraus folgt $2\triangle q - 2\triangle c = c^2 s . \sin\alpha$, oder $c^2 + \frac{2\triangle}{s . \sin\alpha} . c - \frac{2\triangle q}{s . \sin\alpha}$, also

$$c = -\frac{\Delta}{s \sin \alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta^2}{s^2 \sin \alpha^2} + \frac{2\Delta q}{s \sin \alpha}\right)}, \text{ oder}$$

$$c = \frac{\Delta}{s \sin \alpha}\left[-1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{2qs \cdot \sin \alpha}{\Delta}\right)}\right].$$

Dadurch findet man den Punct *B* und folglich die Lage der Schnittlinie *PBC*.

B. Polygonometrie.

371.

Erläuterung. *Der Gegenstand der Polygonometrie ist: aus diesen oder jenen bestimmenden Stücken eines beliebigen Vielecks andere nicht gegebene Stücke, oder den Inhalt, oder andere Eigenschaften der Figur zu finden. Am gewöhnlichsten werden aus den bestimmenden* Seiten *und* Winkeln *die übrigen Seiten und Winkel, oder der* Inhalt *der Figur gesucht.*

An den Seiten und Winkeln, wenn sie die bestimmenden Stücke seyn sollen, können (man sehe §. 96.) fehlen:

I. *drei Winkel, welche*

1) *entweder an einander liegen, oder von welchen*
2) *zwei an einander liegen und einer abgesondert ist, oder welche*
3) *alle drei getrennt sind.*

II. *Zwei Winkel und eine Seite, und zwar*

4) *die Winkel an einander, die Seite dazwischen;*
5) *die Winkel an einander, die Seite an einem Winkel;*
6) *die Winkel an einander, die Seite abgesondert;*
7) *die Winkel getrennt, die Seite an einem Winkel;*
8) *die Winkel getrennt, die Seite abgesondert;*

III. *Zwei Seiten, und zwar*

9) *an einander, oder*
10) *getrennt.*

Die übrigen Seiten und Winkel sind die bestimmenden.

Mehr Fälle als die aufgezählten sind nicht möglich, und die fehlenden Seiten und Winkel müssen allemal aus den gegebenen gefunden werden können, weil die Figur durch die gegebenen Stücke bestimmt ist und folglich die fehlenden Stücke von den gegebenen abhängen.

372.

Erläuterung. Will man sich, wie oben beim Dreieck, *auflösender Gleichungen* bedienen, so müssen diese Gleichungen ausser den gegebenen Stücken *noch eines von den fehlenden Seiten und Winkeln* enthalten, damit dieses eine Stück daraus gefunden werden kann. Es dürfen also in den auflösenden Gleichungen an den *sämmtlichen Seiten und Winkeln nur fehlen:*

I. *zwei Winkel,*
1) neben einander, oder
2) getrennt.

II. 3) *Eine Seite,* und nach Belieben ein Winkel, welcher sich durch die übrigen Winkel findet.

Es giebt daher in allem *nur drei auflösende Gleichungen,* welche die Auflösung aller möglichen Aufgaben: aus den bestimmenden Seiten und Winkeln eines beliebigen Vielecks die übrigen Seiten und Winkel zu finden, enthalten.

Diese auflösenden Gleichungen beruhen auf folgenden Lehrsätzen.

373.

Lehrsätze. I. Wenn man die Seiten eines n Ecks (Fig. 174.), in der Reihe wie sie auf einander folgen, durch $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_n$, und die Winkel, welche je zwei Seiten, verlängert wenn es nöthig ist, mit einander einschliessen, durch die Zeichen der Seiten, in Klammern eingeschlossen, z. B. durch $(c_1 c_2)$, $(c_1 c_3)$, $(c_2 c_3)$, $(c_1 c_4)$ etc. bezeichnet, so ist, wenn man z. B. die Seite c_1 zur *Grundlinie* nimmt,

$$1.\ c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) \ldots + c_n \sin(c_n c_1) = 0 \text{ und}$$

$$2.\ c_2 \cos(c_2 c_1) + c_3 \cos(c_3 c_1) + c_4 \cos(c_4 c_1) \ldots + c_n \cos(c_n c_1) = c.$$

Solche Gleichungen finden *für jede Seite,* die man zur *Grundlinie* nimmt, Statt, und man erhält die Gleichungen für die folgenden Grundlinien, *wenn man die Zeiger von c weiter rückt;* wobei zu bemerken, dass auf den Zeiger n wieder der Zeiger 1 folgt. Nimmt man z. B. die folgende Seite c_2 zur *Grundlinie* an, *so muss man alle Zeiger um 1 weiter rücken,* welches

$$c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) + c_5 \sin(c_5 c_2) \ldots c_1 \sin(c_1 c_n) = 0 \text{ und}$$

$$c_3 \cos(c_3 c_2) + c_5 \cos(c_4 c_2) + c_6 \cos(c_6 c_8) \ldots c_1 \sin(c_1 c_n) = c_2$$

giebt.

II. Bezeichnet man die Winkel, welche die *Seiten* mit den *nächst folgenden insbesondere,* einschliessen,

von den Winkeln zwischen c_1 *und* c_2 *anfangend, durch* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_4$, *so sind die Winkel, welche die Seiten der Reihe nach, z. B. mit der Grundlinie* c_1 *einschliefsen,*

$$3. \begin{cases} (c_2\,c_1) = \gamma_1, \\ (c_3\,c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\varrho, \\ (c_4\,c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\varrho, \\ (c_5\,c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\varrho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (c_n\,c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ldots \gamma_{n-1} - 2(n-2)\varrho. \end{cases}$$

Durch Weiterrücken der Buchstaben findet man diejenigen, welche sie der Reihe nach mit der Grundlinie c_2 *einschliefsen, nemlich:*

$$3.\ \mathrm{I.} \begin{cases} (c_3\,c_2) = \gamma_2, \\ (c_4\,c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 - 2\varrho, \\ (c_5\,c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 4\varrho, \\ (c_6\,c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 - 6\varrho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (c_1\,c_2) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \ldots + \gamma_n - 2(n-2)\varrho; \end{cases}$$

u. s. w.

III. *Bezeichnet man*

Erstlich die Summe der Producte einer beliebigen Zahl auf einander folgender Seiten eines Vielecks, jede in die allen vorhergehende Seite und auch in den Sinus des Winkels multiplicirt, welchen sie mit jener Seite einschliefst, durch p, *mit dem Zeiger der ersten und letzten Seite, und wenn die* n*te Seite dazwischen liegt, auch mit* n *dazwischen, also z. B. die Producten-Summe*

$$4. \begin{cases} c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) \ldots + c_n \sin(c_n c_1) \text{ durch } p_{2,n}, \\ c_8 \sin(c_8 c_7) + c_9 \sin(c_9 c_7) + \ldots c_n \sin(c_n c_7) \ldots + c_2 \sin(c_2 c_7) \text{ durch } p_{8,n,2}, \\ c_5 \sin(c_5 c_4) + c_6 \sin(c_6 c_4) + c_7 \sin(c_7 c_4) \ldots + c_{11} \sin(c_{11} c_4) \text{ durch } p_{5,11}, \end{cases}$$

u. s. w.

Zweitens. Die Summen der Producte einer beliebigen Zahl auf einander folgender Seiten, jede in die allen vorhergehende Seite und noch in den Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen sie mit jener Seite einschliefst, durch q, *mit dem Zeiger der ersten und letzten Seite, und wenn die* n*te Seite dazwischen liegt, auch mit* n *dazwischen, also z. B. die Gröfsen*

$$5. \begin{cases} c_2 \cos(c_2 c_1) + c_3 \cos(c_3 c_1) + c_4 \cos(c_4 c_1) \ldots + c_n \cos(c_n c_1) \text{ durch } q_{2,n}, \\ c_8 \cos(c_8 c_7) + c_9 \cos(c_9 c_7) \ldots + c_n \cos(c_n c_7) \ldots + c_2 \cos(c_2 c_7) \text{ durch } q_{8,n,2}, \\ c_5 \cos(c_5 c_4) + c_6 \cos(c_6 c_4) + c_7 \cos(c_7 c_4) \ldots + c_{11} \sin(c_{11} c_4) \text{ durch } q_{5,11}, \end{cases}$$

u. s. w.

Drittens. Die Summen der Quadrate beliebiger auf einander folgender Seiten, weniger der doppelten Summe ihrer Producte zu zweien, so viel dergleichen möglich sind, jedes Product noch mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die in einander multiplicirten Seiten einschließen, durch z^2, mit dem Zeiger der ersten und letzten Seite, und wenn die nte Seite dazwischen liegt, auch mit n dazwischen, also z. B. die Größen

$$6. \begin{cases} c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots\ldots c_n^2 \\ -2c_3c_2\cos(c_3c_2) - 2c_4c_2\cos(c_4c_2) \ldots\ldots - 2c_4c_3\cos(c_4c_3) \ldots \\ -2c_nc_m\cos c_nc_m \ldots\ldots - 2c_nc_{n-1}\cos(c_nc_{n-1}) \text{ durch } z_{2,n}^2 \\ c_8^2 + c_9^2 + c_{10}^2 \ldots\ldots + c_2^2 \\ -2c_9c_8\cos(c_9c_8) - 2c_{10}c_8\cos(c_{10}c_8) - 2c_{10}c_9\cos(c_{10}c_9) \ldots \\ -c_nc_{n-1}\cos(c_nc_{n-1}) \ldots - 2c_2c_n\cos(c_2c_n) \ldots - 2c_2c_3\cos(c_2c_3) \ldots \\ \text{durch } z_{8,n,2}^2 \\ c_5^2 + c_6^2 \ldots\ldots + c_{11}^2 \\ -2c_6c_5\cos(c_6c_5) - 2c_7c_5\cos c_7c_5 - 2c_8c_6\cos(c_8c_6) \ldots \\ -2c_{11}c_8\cos c_{11}c_8 \ldots\ldots - 2c_{11}c_{10}\cos c_{11}c_{10} \text{ durch } z_{5,11}^2; \end{cases}$$

u. s. w., so daſs sich, mit der Bezeichnung (4. u. 5.) z. B. die obigen Grundgleichungen (1. u. 2.) für die verschiedenen Seiten des Vielecks, wenn man die Seiten, der Reihe nach wie sie aufeinander folgen, zu Grundlinien nimmt; kürzlich wie folgt ausdrücken lassen:

$$7. \begin{cases} p_{2,n} = 0, & q_{2,n} = c_1, \\ p_{3,n,1} = 0, & q_{3,n,1} = c_2, \\ p_{4,n,2} = 0, & q_{4,n,2} = c_3, \\ \ldots & \ldots \\ p_{n-1,n,n-3} = 0, & q_{n-1,n,n-3} = c_{n-2}, \\ p_{n,n-2} = 0, & q_{n,n-2} = c_{n-1}, \\ p_{1,n-1} = 0, & q_{1,n-1} = c_n: \end{cases}$$

so ist

$$8. \begin{cases} p_{2,n}^2 + q_{2,n}^2 = z_{2,n}^2, \\ p_{8,n,2}^2 + q_{8,n,2}^2 = z_{8,n,2}^2, \\ p_{5,n}^2 + q_{5,n}^2 = z_{5,n}^2 \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

IV. Drückt man die durch p, q und z^2 bezeichneten Gröſsen, nicht so wohl wie in (4. 5. 6.) durch die Seiten und die Winkel, welche auch zwischen *getrennten* Seiten liegen können, sondern nur durch die Seiten und durch die Winkel γ zwischen *je zwei auf einander folgenden Seiten* aus, so ist z. B.

$$9. \; p_{2,n} = c_2\sin\gamma_1 - c_3\sin(\gamma_1+\gamma_2) \\ + c_4\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \\ - c_5\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \pm c_n\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1}) = 0,$$

$$10.\quad q_{2,n} = c_2 \cos\gamma - c_3 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - c_5 \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \ldots \pm c_n \cos(\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3 \ldots \gamma_{n-1}) = c_1;$$

desgleichen ist z. B. die Gröfse

$$11.\quad z^2_{2,n} = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \ldots + c_n^2$$
$$- 2c_3c_2 \cos(c_3c_2) - 2c_4c_2 \cos(c_4c_2) - 2c_5c_2 \cos(c_5c_2) \ldots 2\cos c_n c_2 \cos(c_nc_2)$$
$$- 2c_4c_3 \cos(c_4c_3) - 2c_5c_3 \cos(c_5c_3) \ldots - 2c_nc_3 \cos(c_nc_3)$$
$$- 2c_5c_4 \cos(c_5c_4) \ldots 2c_nc_4 \cos(c_nc_4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

folgende:

$$12.\quad z^2_{2,n} = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \ldots + c_n^2$$
$$- 2c_3c_2 \cos\gamma_2 + 2c_4c_3 \cos(\gamma_2 + \gamma_3)$$
$$- 2c_5c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \ldots \pm 2c_nc_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$- 2c_4c_3 \cos\gamma_3 + 2c_5c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \ldots \mp 2c_nc_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$- 2c_5c_4 \cos\gamma_4 \ldots \pm 2c_nc_4 \cos(\gamma_4 + \gamma_5 \ldots \gamma_{n-1}) \ldots\ldots$$
$$- 2c_n \ldots c_{n-1} \cos\gamma_{n-1};$$

und eben so für andere Seiten und Winkel.

Die Regel der Zusammensetzung der Ausdrücke ist leicht sichtbar.

V. *Es ist auch*

$$13.\quad p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \sin\gamma_1 - p_{3,n} \cos\gamma_1.$$
$$14.\quad q_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \cos\gamma_1 - p_{3,n} \sin\gamma_1.$$
$$15.\quad p_{2,n-1} = c_n \sin\gamma_n.$$
$$16.\quad q_{2,n-1} = c_1 - c_n \cos\gamma_n.$$
$$17.\quad z^2_{2,n} = z^2_{3,n} + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}.$$

VI. *Man kann auch die Gröfse* z^2, *statt wie oben durch* *Quadrate und Producte*, *durch* *Quadrate allein* *ausdrücken.*

Es ist z. B.

$$18.\quad z^2_{2,n} = (c_3 + c_2)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_3c_2)^2 + (c_3 - c_2)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_3c_2)^2$$
$$+ (c_4 + c_2)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_4c_2)^2 + (c_4 - c_2)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_4c_2)^2$$
$$+ (c_5 + c_2)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_5c_2)^2 + (c_5 - c_2)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_5c_2)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (c_4 + c_3)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_4c_3)^2 + (c_4 - c_3)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_4c_3)^2$$
$$+ (c_5 + c_3)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_5c_3)^2 + (c_5 - c_3)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_5c_3)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (c_5 + c_4)^2 \sin\tfrac{1}{2}(c_5c_4)^2 + (c_5 - c_4)^2 \cos\tfrac{1}{2}(c_5c_4)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- (n - 3)(c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots + c_n^2).$$

Dieser Ausdruck hat aber mehr Glieder als der Ausdruck (11. *oder* 12.).

Wenn $C_2 C_4 S_4$ grade ist, so ist der Winkel $S_4 C_4 Q_4$ gleich dem Winkel $C_4 C_2 R_2$, gleich $(c_4 c_1)$. Der Winkel $S_4 C_4 C_5$ aber ist gleich $2\varrho - \gamma_4$. Nun ist $C_5 C_4 Q_4$, oder $(c_5 c_1)$ gleich $S_4 C_4 Q_4 - S_4 C_4 C_5$, weil $(c_5 c_1)$ negativ ist. Also ist $(c_5 c_1) = (c_4 c_1) - (2\varrho - \gamma_4) = (c_4 c_1) + \gamma_4 - 2\varrho$ und folglich, weil vorhin $(c_4 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\varrho$ war, $(c_5 c_1) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\varrho$; u. s. w.

Dieses sind die Gleichungen (3.). Man findet die Gleichungen für die folgenden Grundlinien durch Weiterrücken der Zeiger.

III. Der Beweis der Gleichungen (8.) läfst sich am besten an einem Beispiel geben. An der Form der Ausdrücke zeigt sich, dafs was für den besondern Fall statt findet, auch allgemein gilt.

Man nehme also z. B. die Gröfsen

$p_{2,5} = c_2 sin(c_2 c_1) + c_3 sin(c_3 c_1) + c_4 sin(c_4 c_1) + c_5 sin(c_5 c_1)$ und

$q_{2,5} = c_2 cos(c_2 c_1) + c_3 cos(c_3 c_1) + c_4 cos(c_4 c_1) + c_5 cos(c_5 c_1)$;

so ist

$$\begin{aligned}p^2_{2,5} = {} & c_2^2 sin(c_2 c_1)^2 + c_3^2 sin(c_3 c_1)^2 + c_4^2 sin(c_4 c_1)^2 + c_5^2 sin(c_5 c_1)^2 \\ & + 2c_2 c_3 sin(c_2 c_1) sin(c_3 c_1) + 2c_2 c_4 sin(c_2 c_1) sin(c_4 c_1) + 2c_2 c_5 sin(c_2 c_1) sin(c_5 c_1) \\ & + 2c_3 c_4 sin(c_3 c_1) sin(c_4 c_1) + 2c_3 c_5 sin(c_3 c_1) sin(c_5 c_1) \\ & + 2c_4 c_5 sin(c_4 c_1) sin(c_5 c_1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}q^2_{2,5} = {} & c_2^2 cos(c_2 c_1)^2 + c_3^2 cos(c_3 c_1)^2 + c_4^2 cos(c_4 c_1)^2 + c_5^2 cos(c_5 c_1)^2 \\ & + 2c_2 c_3 cos(c_2 c_1) cos(c_3 c_1) + 2c_2 c_4 cos(c_2 c_1) cos(c_4 c_1) + 2c_2 c_5 cos(c_2 c_1) cos(c_5 c_1) \\ & + 2c_3 c_4 cos(c_3 c_1) cos(c_4 c_1) + 2c_3 c_5 cos(c_3 c_1) cos(c_5 c_1) \\ & + 2c_4 c_5 cos(c_4 c_1) cos(c_5 c_1).\end{aligned}$$

Addirt man $p^2_{2,5}$ und $q^2_{2,5}$, so enthält die Summe die Quadrate der nemlichen Linien c_2, c_3 etc. mit den Summen der Quadrate von Sinus und Cosinus der nemlichen Winkel multiplicirt, und die Producte der nemlichen Linien, mit den Summen der Producte der Sinus und der Producte der Cosinus der nemlichen Winkel multiplicirt. Erstere, die Summen der Quadrate von Sinus und Cosinus der nemlichen Winkel sind, wie z. B. $sin(c_2 c_1)^2 + cos(c_2 c_1)^2, = 1$; letztere, die Summen der Producte der Sinus und der Producte der Cosinus der nemlichen Winkel, sind gleich den Cosinus der Differenzen der Winkel, wie z. B.

$sin(c_2 c_1) sin(c_3 c_1) + cos(c_2 c_1) cos(c_3 c_1) = cos(c_3 c_1 - c_2 c_1)$.

Also ist

$$\begin{aligned}p^2_{2,5} + q^2_{2,5} = {} & c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \\ & + 2c_2 c_3 cos(c_3 c_1 - c_2 c_1) + 2c_2 c_4 cos(c_4 c_1 - c_2 c_1) + 2c_2 c_5 cos(c_5 c_1 - c_2 c_1) \\ & + 2c_3 c_4 cos(c_4 c_1 - c_3 c_1) + 2c_3 c_5 cos(c_5 c_1 - c_3 c_1) \\ & + 2c_4 c_5 cos(c_5 c_1 - c_4 c_1)\end{aligned}$$

Nun ist aber zu Folge (3, und 3. I.) etc.

$$(c_3 c_1 - c_2 c_1) = \gamma_2 - 2\varrho \qquad = (c_3 c_2) - 2\varrho,$$
$$(c_4 c_1 - c_2 c_1) = \gamma_2 + \gamma_3 - 4\varrho \qquad = (c_4 c_2) - 2\varrho,$$
$$(c_5 c_1 - c_2 c_1) = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 6\varrho = (c_5 c_2) - 2\varrho,$$
$$(c_4 c_1 - c_3 c_1) = \gamma_3 - 2\varrho \qquad = (c_4 c_3) - 2\varrho,$$
$$(c_5 c_1 - c_3 c_1) = \gamma_3 + \gamma_4 - 4\varrho \qquad = (c_5 c_3) - 2\varrho,$$
$$(c_5 c_1 - c_4 c_1) = \gamma_4 - 2\varrho \qquad = (c_5 c_4) - 2\varrho;$$

also ist

$$p_{2,5}^2 + q_{2,5}^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2$$
$$- 2 c_2 c_3 \cos(c_3 c_2) - 2 c_2 c_4 \cos(c_4 c_2) - 2 c_2 c_5 \cos(c_5 c_2)$$
$$- 2 c_3 c_4 \cos(c_4 c_3) - 2 c_3 c_5 \cos(c_5 c_3)$$
$$- 2 c_4 c_5 \cos(c_5 c_4).$$

Die Gröfse rechterhand ist eben diejenige, welche in (III. Drittens 6.) durch $z_{2,5}^2$ bezeichnet wurde.

Also ist

$$p_{2,5}^2 + q_{2,5}^2 = z_{2,5}^2.$$

Aehnliche Ausdrücke finden für eine beliebige Zahl auf einander folgender Winkel statt; welches die Gleichungen (8.) giebt.

IV. Die Gleichungen (9. 10. und 12.) findet man, wenn man die Ausdrücke von $(c_2 c_1)$, $(c_3 c_1)$....$(c_5 c_4)$; $(c_1 c_5)$, $(c_5 c_2)$....$(c_4 c_2)$ etc. aus (3.) in (1. 2. und 11.) setzt.

Es ist zu Folge (3.)

$\cos(c_2 c_1) = + \cos\gamma_1$, $\qquad \sin(c_2 c_1) = + \sin\gamma_1$,
$\cos(c_3 c_1) = - \cos(\gamma_1 + \gamma_2)$, $\qquad \sin(c_3 c_1) = - \sin(\gamma_1 + \gamma_2)$,
$\cos(c_4 c_1) = + \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$, $\qquad \sin(c_4 c_1) = + \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$;
$\cos(c_5 c_1) = - \cos(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$, $\sin(c_5 c_1) = - \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$,
. . . .
$\cos(c_3 c_2) = + \cos\gamma_2$, $\qquad \sin(c_3 c_2) = + \sin\gamma_2$,
$\cos(c_4 c_2) = - \cos(\gamma_2 + \gamma_3)$, $\qquad \sin(c_4 c_2) = - \sin(\gamma_2 + \gamma_3)$,
$\cos(c_5 c_2) = + \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$, $\qquad \sin(c_5 c_2) = + \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)$;
$\cos(c_6 c_2) = - \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5)$, $\sin(c_6 c_2) = - \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5)$,
. . . .
$\cos(c_4 c_3) = + \cos\gamma_3$, $\qquad \sin(c_4 c_3) = + \sin\gamma_3$
$\cos(c_5 c_3) = - \cos(\gamma_3 + \gamma_4)$, $\qquad \sin(c_5 c_3) = - \sin(\gamma_3 + \gamma_4)$;
$\cos(c_6 c_3) = - \cos(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5)$, $\qquad \sin(c_6 c_3) = + \sin(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5)$;
. . . .

u. s. w. Die Zeichen wechseln stets ab.

Setzt man diese Ausdrücke in (1. 2. u. 11.), so findet man die Ausdrücke (9. 10. u. 12.).

V. α) Es ist z. B.

$$p_{2,n} = c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1+\gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ldots \ldots \pm c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots + \gamma_{n-1}) \quad (9.)$$

Da nun

$$\sin(\gamma_1+\gamma_2) = \sin\gamma_1 \cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 \sin\gamma_2$$
$$\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) = \sin\gamma_1 \cos(\gamma_2+\gamma_3) + \cos\gamma_1 \sin(\gamma_2+\gamma_3)$$

u. s. w., so ist

$$\begin{aligned} p_{2,n} = c_2\sin\gamma_1 &- c_3(\sin\gamma_1\cos\gamma_2 + \cos\gamma_1 \sin\gamma_2) \\ &+ c_4(\sin\gamma_1\cos(\gamma_2+\gamma_3) + \cos\gamma_1 \sin(\gamma_2+\gamma_3)) \\ &- c_5(\sin\gamma_1\cos(\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4) + \cos\gamma_1 \sin(\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm c_n(\sin\gamma_1\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1}) + \cos\gamma_1 \sin(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p_{2,n} = &[c_2 - c_3\cos\gamma_2 - c_4\cos(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \pm c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})]\sin\gamma_1 \\ &- [c_3\sin\gamma_2 - c_4\sin(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \mp c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})]\cos\gamma_1 \end{aligned}$$

und folglich, weil

$$c_3\cos\gamma_2 - c_4\cos(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \mp c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1}) = q_{3,n} \text{ und}$$
$$c_3\cos\gamma_2 - c_4\sin(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \mp c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1}) = p_{3,n}$$

ist (10. und 9.),

$$p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n})\sin\gamma_1 - p_{3,n}\cos\gamma_1;$$

welches die Gleichung (13.) ist.

β) Auf ähnliche Art findet man, weil

$$q_{2,n} = c_2\cos\gamma_1 - c_3\cos(\gamma_1+\gamma_2) + c_4\cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\ldots \ldots \pm c_n\cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})$$

und

$$\cos(\gamma_1+\gamma_2) = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2$$
$$\cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) = \cos\gamma_1\cos(\gamma_2+\gamma_3) - \sin\gamma_1\sin(\gamma_2+\gamma_3)$$

u. s. w. ist,

$$\begin{aligned} q_{2,n} = &[c_2 - c_3\cos\gamma_2 + c_4\cos(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \pm c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})]\cos\gamma_1 \\ &+ [c_3\sin\gamma_2 - c_4\sin(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \mp c_n\sin(\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1})]\sin\gamma_1 \end{aligned}$$

also

$$q_{2,n} = (c_2 - q_{3,n})\cos\gamma_1 + p_{3,n}\sin\gamma_1;$$

welches die Gleichung (14.) ist.

γ) Ferner ist z. B. zu Folge (9 und 10.)

$$c_2\sin\gamma_1 - c_3\sin(\gamma_1+\gamma_2)\ldots \mp c_{n-1}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-2}) = \mp c_n\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-1})$$
$$c_2\cos\gamma_1 - c_3\cos(\gamma_1+\gamma_2)\ldots \mp c_{n-1}\cos(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-2}) = c_1 \mp c_n\cos(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-1})$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn n grade und die unteren wenn n ungrade ist; denn z. B. die Glieder mit c_2, c_4, c_6 etc. in (9. und 10.) sind positiv, die Glieder mit c_3, c_5 aber negativ. Nun sind in diesen Gleichungen die Gröfsen linkerhand nichts anders als $p_{2,n-1}$ und $q_{2,n-1}$; also ist

$$p_{2,n-1} = \mp c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-1}) \text{ und}$$
$$q_{2,n-1} = c_1 \mp c_n \cos(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-1}).$$

Die Summe sämmtlicher Winkel

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1}+\gamma_n$$

aber ist gleich $2(n-2)\varrho$; also ist

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1}=2(n-2)\varrho-\gamma_n;$$

folglich ist

$$\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1})=\sin(2n\varrho-4\varrho-\gamma_n)=\sin(2n\varrho-\gamma_n)$$
$$\cos(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1})=\cos(2n\varrho-4\varrho-\gamma_n)=\sin(2n\varrho-\gamma_n)$$

und folglich

$$p_{2,n-1}=\mp c_n\sin(2n\varrho-\gamma_n)$$
$$q_{2,n-1}=c_1\mp c_n\cos(2n\varrho-\gamma_n),$$

wo die oberen Zeichen gelten, wenn n grade und die unteren von n ungrade ist.

Es sey für ein g r a d e s n, $n=2m$, wo m eine beliebige ganze Zahl seyn kann, so ist

$$\sin(2n\varrho-\gamma_n)=\sin(4m\varrho-\gamma_n)=-\sin\gamma_n,$$
$$\cos(2n\varrho-\gamma_n)=\cos(4m\varrho-\gamma_n)=+\cos\gamma_n;$$

also ist f ü r e i n g r a d e s n, für welches die o b e r n Zeichen gelten,

$$p_{2,n-1}=\quad c_n\sin\gamma_n \text{ und}$$
$$q_{2,n-1}=c_1-c_n\cos\gamma_n.$$

Es sey für ein u n g r a d e s n, $n=2m+1$, wo m eine beliebige ganze Zahl seyn kann, so ist.

$$\sin(2n\varrho-\gamma_n)=\sin(4m\gamma+2\varrho-\gamma_n)=+\sin\gamma_n,$$
$$\cos(2n\varrho-\gamma_n)=\sin(4m\varrho+2\varrho-\gamma_n)=-\cos\gamma_n;$$

also ist f ü r e i n u n g r a d e s n, für welches die u n t e r e n Zeichen gelten,

$$p_{2,n-1}=\quad c_n\sin\gamma_n \text{ und}$$
$$q_{2,n-1}=c_1-c_n\cos\gamma_n.$$

Es ist also *i m m e r, f ü r j e d e s b e l i e b i g e* n,

$$p_{2,n-1}=\quad c_n\sin\gamma_n \text{ und}$$
$$q_{2,n-1}=c_1-c_n\cos\gamma_n;$$

welches die Gleichungen (15 und 16.) sind.

δ. Man schreibe den Ausdruck (12.) wie folgt:

$$\begin{aligned}z^2_{2,n}=\;&c_3^2+c_4^2+c_5^2\ldots\ldots+c_n^2\\&-2c_4c_3\cos\gamma_3+2c_5c_3\cos(\gamma_3+\gamma_4)\ldots\ldots\pm2c_nc_4\cos(\gamma_3+\gamma_4\ldots\ldots+\gamma_{n-1})\\&-2c_5c_4\cos\gamma_4+2c_6c_4\cos(\gamma_4+\gamma_5)\ldots\ldots\pm2c_nc_4\cos(\gamma_4+\gamma_5\ldots\ldots+\gamma_{n-1})\\&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\&-2c_nc_{n-1}\cos c_n\\&+c_2^2\\&-2c_2(c_3\cos\gamma_2-c_4\cos(\gamma_2+\gamma_3)\ldots\ldots\pm c_n\cos(\gamma_2+\gamma_3\ldots\ldots+\gamma_{n-1})),\end{aligned}$$

so ist leicht zu sehen, dafs vermöge (12. und 10.)

$$z^2_{2,n}=z^2_{3,n}+c_2^2-2c_2q_{3,n};$$

welches die Gleichung (17.) ist.

VI. Die erste Reihe rechterhand in dem Ausdruck (18.) ist so viel als

$$(c_3^2 + 2c_3 c_2 + c_2^2) \sin\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 + (c_3^2 - 2c_3 c_2 + c_2^2) \cos\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2,$$

oder

$$(c_3^2 + c_2^2)(\sin\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 + \cos\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2) - 2c_3 c_2 (\cos\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 - \sin\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2),$$

oder weil

$$\cos\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 + \sin\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 = 1 \text{ und}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 - \sin\tfrac{1}{2}(c_3 c_2)^2 = \cos(c_3 c_2),$$

so viel als

$$c_3^2 + c_2^2 - 2c_3 c_2 \cos(c_3 c_2);$$

die zweite Reihe ist .... $c_4^2 + c_2^2 - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2)$,
die dritte Reihe ist .... $c_5^2 + c_2^2 - 2c_5 c_2 \cos(c_5 c_2)$
u. s. w. Es sind, wenn man die letzte Reihe ausnimmt, so viel Reihen vorhanden als es Verbindungen der $n-1$ Gröſsen $c_2, c_3, c_4 \ldots c_n$ zu zweien giebt, folglich $\frac{(n-1).(n-2)}{2}$ Reihen. Jede Reihe enthält die Quadrate zweier Gröſsen, also sind $(n-1).(n-2)$ Quadrate der $n-1$ Gröſsen vorhanden und folglich, weil offenbar jede Gröſse gleich oft vorkommt, $n-2$ mal die Summe der Quadrate der Gröſsen $c_2, c_3, c_4 \ldots c_n$. Zieht man also noch das letzte Glied, welches $n-3$ mal die nemliche Summe ist, ab, so bleibt, auſser den Producten, blos die einfache Summe der Quadrate der Gröſsen $c_2, c_3, c_4 \ldots c_n$ übrig und es ist folglich in (18.)

$$\begin{aligned} z_{2,n} = {} & c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots + c_n^2 \\ & - 2c_3 c_2 \cos(c_3 c_2) - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2) \ldots - 2c_n c_2 \cos(c_n c_2) \\ & - 2c_4 c_3 \cos(c_4 c_3) - \ldots 2c_n c_3 \cos(c_n c_3); \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welches mit (11.) übereinstimmt und folglich die Gleichung (18.) beweiset.

374.

Lehrsatz. Die drei auflösenden Gleichungen für eine beliebige nseitige Figur sind:

Erste auflösende Gleichung *ohne zwei neben einander liegende Winkel, z. B. ohne γ_1 und γ_2:*

$$1. \quad c_1^2 = z_{2,n}^2,$$

das heiſst:

$$\begin{aligned} 2.\ c_1^2 = {} & c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots + c_n^2 \\ & - 2c_3 c_2 \cos(c_3 c_2) - 2c_4 c_2 \cos(c_4 c_2) \ldots - 2c_n c_2 \cos(c_n c_2) \\ & - 2c_4 c_3 \cos(c_4 c_3) - 2c_5 c_3 \cos(c_5 c_3) \ldots - 2c_n c_3 \cos(c_n c_3) \\ & - 2c_5 c_4 \cos(c_5 c_4) \ldots 2c_n c_4 \cos(c_n c_4) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2c_n c_{n-1} \cos(c_n c_{n-1}), \end{aligned}$$

oder

oder

$$3.\ c_1^2 = c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots + c_n^2$$
$$-2c_3c_2\cos\gamma_2 + 2c_4c_2\cos(\gamma_2+\gamma_3)\ldots \pm 2c_nc_2\cos(\gamma_2+\gamma_4\ldots+\gamma_{n-1})$$
$$-2c_4c_3\cos\gamma_3 + 2c_5c_3\cos(\gamma_3+\gamma_4)\ldots \mp 2c_nc_3\cos(\gamma_3+\gamma_4\ldots+\gamma_{n-1})$$
$$-2c_5c_4\cos\gamma_4 + 2c_6c_4\cos(\gamma_4+\gamma_5)\ldots \pm 2c_nc_4\cos(\gamma_4+\gamma_5\ldots+\gamma_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2c_nc_{n-1}\cos\gamma_{n-1},$$

welche Gleichung, wie man sieht, die beiden Winkel γ_1 *und* γ_n *nicht enthält.*

Zweite auflösende Gleichung, *ohne zwei getrennte Winkel, z. B. ohne* γ_k *und* γ_m,

$$4.\quad z_{k+1,m}^2 = z_{m+1,k}^2,$$

das heifst:

$$5.\ c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 + c_{k+3}^2 \ldots + c_m^2$$
$$-2c_{k+2}c_{k+1}\cos(c_{k+2}c_{k+1}) - 2c_{k+3}c_{k+1}\cos(c_{k+3}c_{k+1})\ldots - 2c_mc_{k+1}\cos(c_mc_{k+1})$$
$$-2c_{k+3}c_{k+2}\cos(c_{k+3}c_{k+2}) - 2c_{k+4}c_{k+2}\cos(c_{k+4}c_{k+2})\ldots - 2c_mc_{k+2}\cos(c_mc_{k+2})$$
$$-2c_{k+4}c_{k+3}\cos(c_{k+4}c_{k+3})\ldots - 2c_mc_{k+3}\cos(c_mc_{k+3})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2c_mc_{m-1}\cos(c_mc_{m-1})$$
$$= c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + c_{m+3}^2 \ldots + c_k^2$$
$$-2c_{m+2}c_{m+1}\cos(c_{m+2}c_{m+1}) - 2c_{m+3}c_{m+1}\cos(c_{m+3}c_{m+1})\ldots\ldots$$
$$\ldots - 2c_kc_{m+1}\cos(c_kc_{m+1})$$
$$-2c_{m+3}c_{m+2}\cos(c_{m+3}c_{m+2})\ldots - 2c_kc_{m+2}\cos(c_kc_{m+2})$$
$$-2c_{m+4}c_{m+3}\cos(c_{m+4}c_{m+3})\ldots - 2c_kc_{m+3}\cos(c_kc_{m+3})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2c_kc_{k-1}\cos c_{k-1}$$

oder

$$6.\ c_{k+1}^2 + c_{k+2}^2 + c_{k+3}^2 \ldots + c_m^2$$
$$-2c_{k+2}c_{k+1}\cos\gamma_{k+1} + 2c_{k+3}c_{k+1}\cos(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2})\ldots\ldots$$
$$\ldots \pm 2c_mc_{k+1}\cos(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2}\ldots+\gamma_{m-1}).$$
$$-2c_{k+3}c_{k+2}\cos\gamma_{k+2} + 2c_{k+4}c_{k+2}\cos(\gamma_{k+2}+\gamma_{k+3})\ldots\ldots$$
$$\ldots \mp 2c_mc_{k+2}\cos(\gamma_{k+2}+\gamma_{k+3}\ldots+\gamma_{m-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2c_mc_{m-1}\cos\gamma_{m-1}$$
$$= c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + c_{m+3}^2 \ldots + c_k^2$$
$$-2c_{m+2}c_{m+1}\cos\gamma_{m+1} + 2c_{m+3}c_{m+1}\cos(\gamma_{m+1}+\gamma_{m+2})\ldots\ldots$$
$$\ldots \pm 2c_kc_{m+1}\cos(\gamma_m+\gamma_{m+1}\ldots+\gamma_{k-1})$$
$$-2c_{m+3}c_{m+2}\cos\gamma_{m+2}\ldots \mp 2c_kc_{m+2}\cos(\gamma_{m+2}+\gamma_{m+3}\ldots\gamma_{k-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-2c_kc_{k-1}\cos\gamma_{k-1},$$

welche Gleichung, wie man sieht, die beiden Winkel γ_k *und* γ_m *nicht enthält.*

Dritte auflösende Gleichung, *ohne eine* ***von den n Seiten***, *z. B. ohne die Seite* c_1.

$$7.\quad p_{2,n} = 0, \text{ oder}$$

$$8.\quad (c_2 - q_{3,n}) \sin\gamma_1 = p_{3,n} \cos\gamma_1, \text{ oder}$$

$$9.\quad c_2 \sin(c_2 c_1) + c_3 \sin(c_3 c_1) + c_4 \sin(c_4 c_1) \ldots + c_n \sin(c_n c_1) = 0,$$

oder

$$10.\quad c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_{n-1}) = 0;$$

welche Gleichung, wie man sieht, die Seite c_1 *und zugleich den Winkel* γ_n *nicht enthält.*

Beweis. I. Es ist

$$p_{2,n} = 0 \text{ und } q_{2,n} = c_1 \text{ (§. 373. 7.)},$$

also

$p_{2,n}^2 + q_{2,n}^2 = 0 + c_1^2 = c_1^2$. Aber $p_{2,n}^2 + q_{2,n}^2 = z_{2,n}^2$ (§. 373. 8.), folglich

$$z_{2,n}^2 = c_1^2;$$

welches die Gleichung (1.) im Lehrsatze ist. Setzt man darin die Ausdrücke von $z_{2,n}^2$ (§. 373. 11. u. 12.), so erhält man die Gleichungen (2. und 3.).

II. Es sey (Fig. 174. I.) γ_3 der Winkel γ_k und γ_6 der Winkel γ_m, so ist der Ausdruck des Quadrats der Seite $C_3\,C_6$ in der Figur $C_3\,C_4\,C_5\,C_6$, zu Folge der **ersten** auflösenden Gleichung,

$$(C_3 C_6)^2 = z_{4,6}^2 = z_{k+1,m}^2.$$

Der Ausdruck des Quadrats der nämlichen Seite $C_3\,C_6$, in der Figur $C_6\,C_7\,C_4\,C_1\,C_2\,C_3$, ist zu Folge der **ersten** auflösenden Gleichung

$$(C_3\,C_6)^2 = z_{7,n,2}^2 = z_{m+1,k}^2.$$

Also ist

$$z_{k+1,m}^2 = z_{m+1,k}^2,$$

welches die Gleichung (4.) im Lehrsatz ist. Setzt man darin die Ausdrücke von z_{k+1}^2 und z_{m+1}^2 (§. 373. 11. 12.), so erhält man die Gleichungen (5. und 6.).

III. Die dritte auflösende Gleichung (7. oder 9.) ist die erste Grundgleichung (§. 373. 1.), mit der Bezeichnung (4.), unverändert. Setzt man die Ausdrücke der Winkel $(c_2 c_1)$, $(c_3 c_1)$, $(c_4 c_1)$ etc. aus (§. 373. 3.), so erhält man, weil

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\varrho) = -\sin(2\varrho - (\gamma_1 + \gamma_2)) = -\sin(\gamma_1 + \gamma_2),$$
$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 4\varrho) = -\sin(4\varrho - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)) = \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$$

u. s. w. ist, die Gleichung (10.) im Lehrsatze.

Die Gleichung (8.) folgt aus (§. 373. 13.).

375.

Erläuterung. *Vermittelst der drei auflösenden Gleichungen lassen sich nun alle Aufgaben:* aus gegebenen bestimmenden Seiten und Winkeln eines Vielecks die fehlenden Seiten und Winkel zu finden, *auflösen. Diese Aufgaben sind folgende:*

Gegeben. *Alle Seiten und Winkel bis auf*	Gesucht.	*Das gesuchte Stück wird gefunden durch die auflösende Gleichung:*
I. *Drei an einander liegende Winkel,*	1) *ein fehlender äußerer Winkel*	1 (§. 374.)
	2) *der fehlende mittlere Winkel*	2 —
II. *Zwei an einander liegende und ein getrennter Winkel,*	3) *der getrennte Winkel*	1 —
	4) *einer der aneinander liegenden Winkel* . .	2 —
III. *Drei getrennte Winkel,*	5) *einer dieser Winkel*	2 —
IV. *Zwei an einander liegende Winkel und eine Seite dazwischen,*	6) *die fehlende Seite* .	1 —
	7) *einer der beiden fehlenden Winkel* . . .	3 —
V. *Zwei an einander liegende Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,*	8) *die fehlende Seite* .	1 —
	9) *der fehlende Winkel an der fehlenden Seite.*	3 —
	10) *der andere fehlende Winkel*	3 —
VI. *Zwei an einander liegende Winkel und eine davon getrennte Seite,*	11) *einer der fehlenden Winkel*	3 —
	12) *die fehlende Seite.*	1 —
VII. *Zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen fehlenden Winkel,*	13) *die fehlende Seite.*	2 —
	14) *der Winkel an der fehlenden Seite* . . .	3 —
	15) *der getrennte fehlende Winkel* . . .	3 —
VIII. *Zwei getrennte Winkel und eine abgesonderte Seite,*	16) *der eine fehlende Winkel*	3 —
	17) *die fehlende Seite.*	2 —
IX. *Zwei Seiten an einander,*	18) *die eine fehlende Seite*	3 —
X. *Zwei getrennte Seiten,*	19) *die eine fehlende Seite*	3 —

Mehr Fälle giebt es nicht. Die Auflösung, und zwar in der Ordnung wie die Aufgaben auf einander sich beziehen, ist folgende.

376.

Aufgabe 1. (§. 375. 6.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf die Seite* c_1 *und bis auf die beiden daran liegenden Winkel* γ_n *und* γ_1 *gegeben. Man sucht die fehlende Seite* c_1.

Auflösung. Die erste auflösende Gleichung (§. 374.) giebt diese Seite c_1 unmittelbar, nemlich

$$1.\quad c_1^2 = z_{2,n}^2, \text{ wo}$$

$$\begin{aligned} z_{2,n} = {} & c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 \ldots + c_n^2 \\ & - c_3 c_2 \cos\gamma_2 + 2c_4 c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) \ldots \pm 2c_n c_2 \cos(\gamma_2 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) \\ & - 2c_4 c_3 \cos\gamma_3 + 2c_5 c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \ldots \mp 2c_n c_3 \cos(\gamma_3 + \gamma_4 \ldots + \gamma_{n-1}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - 2c_n c_{n-1} \cos\gamma_{n-1} \end{aligned}$$

ist; denn $z_{2,n}^2$ enthält, wie man sieht, die unbekannten Winkel γ_n und γ_1 nicht, sondern ist aus lauter gegebenen Gröſsen zusammengesetzt.

Dieser Ausdruck einer Seite eines **Vielecks** durch die übrigen Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel ist dem Ausdruck einer Seite eines **Dreiecks** durch die andern beiden Seiten und den Winkel den sie einschlieſsen ähnlich. Gesetzt z. B. die Figur (174. I.) habe statt mehrerer nur die 3 Seiten c_1, c_2 und $C_2 C_n$, so daſs also $C_2 C_n$ etwa gleich c_3 und der Winkel $C_1 C_2 C_n$ gleich γ_2 wäre, so ist nach (§. 360. V.), in dem Dreieck $C_1 C_2 C_n$,

$$c_1^2 = c_2^2 + c_3^2 - 2c_2 c_3 \cos\gamma_2;$$

das heiſst: c_1^2 ist gleich der Summe der Quadrate der andern beiden Seiten c_2 und c_3, weniger dem doppelten Producte derselben und in den Cosinus des Winkels den sie einschlieſsen. Ganz so verhält es sich nach (Gl. 2.) beim **Vieleck. Das Quadrat der Seite** c_1, **nemlich** $z_{2,n}^2$, **ist gleich der Summe der Quadrate der übrigen Seiten, weniger den doppelten Producten dieser Seiten zu zweien und in die Cosinus der Winkel die sie einschlieſsen,** wie insbesondere aus (§. 373. 11.) zu sehen. Diese Regel der Zusammensetzung des Ausdrucks ist leicht im Gedächtniſs zu behalten.

Aufgabe 2. (§. 375. 7.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf die Seite* c_1 *und bis auf die beiden daran liegenden Winkel* γ_n *und* γ_1 *gegeben. Man sucht einen der fehlenden Winkel, z. B.* γ_1.

Auflösung. Die **dritte** auflösende Gleichung (§. 374. 8.) giebt diesen Winkel unmittelbar, nemlich:

$$3. \quad tang\,\gamma_1 = \frac{p_{3,n}}{c_2 - q_{3,n}},$$

wo

$$4. \left\{\begin{array}{l} p_{3,n} = c_3 \sin\gamma_2 - c_4 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + c_5 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \ldots \\ \qquad \ldots \pm c_n \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_{n-1}), \\ q_{3,n} = c_3 \cos\gamma_2 - c_4 \cos(\gamma_2 + \gamma_3) + c_5 \cos(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \ldots \\ \qquad \ldots \pm c_n \cos(\gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_{n-1}), \end{array}\right.$$

also ganz aus bekannten Gröſsen zusammengesetzt sind.

Dieser Ausdruck ist wieder von eben der Gestalt wie im ähnlichen Falle beim Dreiecke: denn gesetzt die Figur habe wieder blos die drei Seiten c_1, c_2 und $C_2 C_n$ und die Seite $C_2 C_4$ sey c_3, der Winkel $C_1 C_2 C_4$ gleich γ_2; so ist nach (§. 360. IV.),

$$tang\,\gamma_1 = \frac{c_3 \sin\gamma_2}{c_2 - c_3 \cos\gamma_2},$$

das heiſst: man findet die Tangente eines beliebigen Winkels (z. B. γ_1) eines Dreiecks, wenn man von einer der dem Winkel anliegenden beiden Seiten (z. B. c_2) das Product der folgenden Seite (c_3) in den Cosinus des Winkels (γ_2) zwischen ihr und der vorigen abzieht und mit dem Rest in das Product der zweiten Seite (c_3) und des Sinus des nemlichen Winkels dividirt. Ganz ähnlich verhält es sich nach (Gl. 3.) beim Vieleck. **Man findet die Tangente eines seiner Winkel, wenn man von einer der Seiten, die an dem Winkel liegen,** *die Summe* **der Producte der folgenden Seiten in die Cosinus der Winkel zwischen ihnen und der ersten anliegenden Seite abzieht und mit dem Rest die** *Summe* **der Producte der nemlichen folgenden Seiten in die Sinus der nemlichen Winkel dividirt.** So ist die Regel der Zusammensetzung des Ausdrucks ebenfalls leicht im Gedächtniſs zu behalten.

Den andern fehlenden Winkel γ_n findet man, wenn man die Summe von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots \gamma_{n-1}$ von der Summe der **sämmtlichen** Winkel der Figur, welche $(n-2)2\varrho$ ist, abzieht, also

$$5. \quad \gamma_n = 2(n-2)\varrho = \gamma_2.$$

Wollte man γ_n **unmittelbar** berechnen, so müſste man in (3. und 4.)

$$6. \left\{\begin{array}{llll} c_n & \text{statt } c_2 \text{ und} & \gamma_n & \text{statt } \gamma_1, \\ c_{n-1} & \ldots c_3 & \gamma_{n-1} & \ldots \gamma_2, \\ c_{n-2} & \ldots c_4 & \gamma_{n-3} & \ldots \gamma_3, \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ c_2 & \ldots c_n & \gamma_1 & \ldots \gamma_n \end{array}\right.$$

setzen. Man könnte sich auch für diesen Fall, um anzuzeigen dafs die Seiten und die Winkel zurückgerechnet werden sollen, folgender Bezeichnung bedienen:

$$7.\ \begin{cases} {}_{n-1,2}p = c_{n-1}\sin\gamma_{n-1} - c_{n-2}\sin(\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2})\ldots \\ \qquad\ldots \pm c_2 \sin(\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}\ldots\gamma_2) \\ {}_{n-1,2}q = c_{n-1}\cos\gamma_{n-1} - c_{n-2}\cos(\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2})\ldots \\ \qquad\ldots \pm c_2\cos(\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}\ldots\gamma_2) \\ \tan\gamma_n = \dfrac{{}_{n-1,2}p}{c_n - {}_{n-1,2}q}. \end{cases}$$

Aufgabe 5. (§. 372. 1.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel, bis auf die drei Winkel* γ_n, γ_1 *und* γ_2, *gegeben. Man sucht einen der äufsern fehlenden Winkel, z. B.* γ_2.

Auflösung. a) Die erste auflösende Gleichung $c_1^2 = z_{2,n}^2$ enthält, wie aus (§. 374. 3.) zu sehen, nicht die Winkel γ_1 und γ_n, wohl aber den Winkel γ_2. Man mufs also aus derselben diesen Winkel γ_2 vermittelst der übrigen Stücke, die sämmtlich gegeben sind, finden können. Die Gleichung läfst sich, weil

$$z_{2,n}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}$$

ist (§. 373. 17.), wie folgt schreiben:

$$c_1^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}.$$

Nun ist zu Folge (§. 373. 14.)

$$q_{3,n} = (c_2 - q_{4,n})\cos\gamma_2 + p_{4,n}\sin\gamma_2.$$

Also ist

$$c_1^2 = c_2^2 + z_{3,n}^2 - 2c_2(c_2 - q_{4,n})\cos\gamma_2 - 2c_2 p_{4,n}\sin\gamma_2 \text{ oder}$$

$$p_{4,n}\sin\gamma_2 = \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2c_2} - (c_2 - q_{4,n})\cos\gamma_2.$$

Man setze der Kürze wegen

$$8.\quad p_{4,n} = \varkappa,\ c_2 - q_{4,n} = \lambda \text{ und } \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2c_2} = \mu,$$

so dafs

$$9.\quad \varkappa\sin\gamma_2 = \mu - \lambda\cos\gamma_2,$$

so erhält man, wenn man quadrirt,

$$\varkappa^2\sin\gamma_2^2 = \mu^2 - 2\mu\lambda\cos\gamma_2 + \lambda^2\cos\gamma_2^2 = \varkappa^2(1 - \cos\gamma_2^2), \text{ also}$$

$$(\varkappa^2 + \lambda^2)\cos\gamma_2^2 - 2\mu\lambda\cos\gamma_2 + \mu^2 - \varkappa^2 = 0,$$

oder $\cos\gamma_2^2 - \dfrac{2\mu\lambda}{\varkappa^2+\lambda^2}\cos\gamma_2 + \dfrac{\mu^2 - \varkappa^2}{\varkappa^2+\lambda^2} = 0$, woraus

$$\cos\gamma_2 = \frac{\mu\lambda}{\varkappa^2+\lambda^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2\lambda^2}{(\varkappa^2+\lambda^2)^2} - \frac{\mu^2-\varkappa^2}{\varkappa^2+\mu^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\mu\lambda \pm \sqrt{(\mu^2\lambda^2 - \varkappa^2\mu^2 + \varkappa^4 - \mu^2\lambda^2 + \varkappa^2\lambda^2)}}{\varkappa^2+\lambda^2}, \text{ oder}$$

$$10.\quad \cos\gamma_2 = \frac{\mu\lambda \pm \varkappa\sqrt{(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{\varkappa^2+\lambda^2}$$

folgt.

Zufolge (8.) ist $x^2+\lambda^2=p_{4,n}^2+c_3^2-2c_3\,q_{4,n}+q_{4,n}^2$, oder, weil $p_{4,n}^2+q_{4,n}^2=z_{4,n}^2$ (§. 373. 8.),

$$x^2+\lambda^2=z_{4,n}^2+c_3^2-2c_3\,q_{4,n},$$

oder, weil zu Folge (§. 373. 17.) $z_{4,n}^2+c_3^2-2c_3\,q_{4,n}=z_{3,n}^2$ ist,

$$11.\quad x^2+\lambda^2=z_{3,n}^2.$$

Ferner ist nach (8. und 11.)

$$x^2+\lambda^2-\mu^2=z_{6,n}^2-\left(\frac{z_{3,n}^2+c_2^2-c_1^2}{2c_2}\right)^2,\ \text{oder}$$

$$4c_2^2(x^2+\lambda^2-\mu^2)=4c_2^2z_{3,n}^2-(z_{3,n}^2+c_2^2-c_1^2)^2,\ \text{oder}$$

$$4c_2^2(x^2+\lambda^2-\mu^2)=(2c_2z_{3,n}+z_{3,n}^2+c_2^2-c_1^2)(2c_2z_{3,n}-z_{3,n}^2-c_2^2+c_1^2),$$

$$4c_2^2(x^2+\lambda^2-\mu^2)=((z_{3,n}+c_2)^2-c_1^2)(c_1^2-(z_{3,n}-c_2)^2),\ \text{oder}$$

$$12.\quad x^2+\lambda^2-\mu^2=\frac{(z_{3,n}+c_2-c_1)(z_{3,n}+c_2+c_1)(c_1+z_{3,n}-c_2)(c_1-z_{3,n}+c_2)}{4c_2^2}.$$

Setzt man die Ausdrücke von x, λ, μ aus (8.), $x^2+\lambda^2$ aus (11.) und von $x^2+\lambda^2-\mu^2$ aus (12.) in (10.), so findet man

$$13.\quad \cos\gamma_2=\frac{\left\{\begin{array}{l}(z_{3,n}^2+c_2^2-c_1^2)(c_3-q_{4,n})\\ \pm p_{4,n}\sqrt{[(z_{3,n}+c_2+c_2)(z_{3,n}+c_2-c_1)(z_{3,n}-c_2+c_1)(c_2+c_1-z_{3,n})]}\end{array}\right\}}{2c_2\,z_{3,n}^2}$$

wo

$$14.\quad p_{4,n}=c_4\sin\gamma_3-c_5\sin(\gamma_3+\gamma_4)+c_6\sin(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\ldots\ldots\pm c_n\sin(\gamma_3+\gamma_4\ldots,+\gamma_{n-1}).$$

$$16.\quad q_{4,n}=c_4\cos\gamma_3-c_5\cos(\gamma_3+\gamma_4)+c_6\cos(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\ldots\ldots\pm c_n\cos(\gamma_3+\gamma_4\ldots+\gamma_{n-1}).$$

$$\begin{aligned}16.\quad z_{3,n}^2=\;&c_3^2+c_4^2+c_5^2\ldots+c_n^2\\&-2c_4c_3\cos\gamma_3+2c_5c_3\cos(\gamma_3+\gamma_4)\ldots\ldots\ldots\pm 2c_nc_3\cos(\gamma_3+\gamma_4\ldots+\gamma_{n-1})\\&-2c_5c_4\cos\gamma_4+2c_6c_4\cos(\gamma_4+\gamma_5)\ldots\ldots\ldots\mp 2c_nc_4\cos(\gamma_4+\gamma_5\ldots+\gamma_{n-1})\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&-2c_nc_{n-1}\cos\gamma_{n-1}.\end{aligned}$$

Es ist also rechterhand Alles gegeben, und der Ausdruck (13.) giebt folglich den gesuchten Winkel γ_2.

β) Der Ausdruck (13.) läßt sich auch ohne Hülfe der auflösenden Gleichung, wie folgt, aus der Figur finden.

Es ist nemlich in der Figur $C_2\,C_3\,C_4\ldots\ldots C_n$ die Seite $C_2\,C_n$, vermöge der ersten auflösenden Gleichung, gleich $z_{3,n}$.

Bezeichnet man also in dem Dreieck $C_1\,C_2\,C_n$ den Winkel $C_1\,C_2\,C_n$ durch φ, so ist nach (§. 360. V.)

$$17. \quad \cos\varphi = \frac{z_{3,n}^2 + c_2^2 - c_1^2}{2c_2 z_{3,n}} \text{ und}$$

$$18. \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{[(z_3+c_2+c_1)(z_{3,n}+c_2-c_1)(z_{3,n}-c_2+c_1)(c_2+c_1-z_{3,n})]}}{2c_2 z_{3,n}}.$$

Nun sey $C_n K$ auf $C_2 C_3$ senkrecht und $C_2 C_3$ werde zur Grundlinie der Figur $C_2 C_3 C_4 \ldots C_n$ angenommen, so ist

$$C_n K = p_{4,n} \text{ und } C_2 K = c_4 - p_{4,n},$$

also da

$$\frac{C_n K}{z_{3,n}} = \pm \sin(\gamma_2 - \varphi) \text{ und } \frac{C_2 K}{z_{3,n}} = \cos(\gamma_2 - \varphi),$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $\gamma_2 > \varphi$, und das untere, wenn $\gamma_2 < \varphi$ ist,

$$19. \begin{cases} \sin(\gamma_2 - \varphi) = \frac{p_{4,n}}{z_{3,n}} \text{ und } \cos(\gamma_2 - \varphi) = \frac{c_3 - q_{4,n}}{z_{3,n}}, \\ \qquad \text{wenn } \gamma_2 > \varphi \text{ und} \\ \sin(\varphi - \gamma_2) = \frac{p_{4,n}}{z_{3,n}} \text{ und } \cos(\varphi - \gamma_2) = \frac{c_3 - q_{4,n}}{z_{3,n}}, \\ \qquad \text{wenn } \gamma_2 < \varphi \text{ ist.} \end{cases}$$

Nun ist

$$\cos\gamma_2 = \cos\varphi\cos(\gamma_2 - \varphi) - \sin\varphi\sin(\gamma_2 - \varphi) \text{ und}$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\varphi\cos(\varphi - \gamma_2) + \sin\varphi\sin(\varphi - \gamma_2).$$

Setzt man hierin die Werthe von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus (17. und 18.) und von $\pm\sin(\gamma_2 - \varphi)$ und $\cos(\gamma_2 - \varphi)$ aus (19.), so findet man den Ausdruck (13.).

Es ist indessen besser, den Ausdruck wie oben aus der auflösenden Gleichung zu entwickeln, weil man, wenn man einmal allgemeine Gleichungen aus der Figur aufgestellt hat, darnach sicherer und leichter rechnet als aus der Figur selbst.

γ) Für die Rechnung mit Zahlen läſst sich die Aufgabe noch etwas bequemer, mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe, wie folgt auflösen:

In der Figur $C_2 C_3 C_4 \ldots C_n$ ist zu Folge (Aufgabe I. Gleichung 1.) die Seite

$$21. \quad C_3 C_n = z_{3,n},$$

und zu Folge (Aufgabe 2. Gleichung 5.) die Tangente des Winkels $C_3 C_2 C_n$,

$$22. \quad \tang C_3 C_2 C_4 = \frac{p_{4,n}}{c_3 - q_{4,n}}.$$

Ferner findet man in dem Dreieck $C_1 C_2 C_n$ aus den gegebenen drei Seiten c_1, c_2 und $C_2 C_4 = z_{3,n}$ (21.), zu Folge (§. 360. 83.) den Winkel $C_1 C_2 C_n$ wie folgt:

$$25. \quad tang\tfrac{1}{2}C_1C_2C = \sqrt{\left[\frac{(c_1+z_{3,2}-c_2)(c_1+c_2-z_{3,n})}{(c_2+z_{3,n}-c_1)(c_1+c_2+z_{3,n})}\right]}.$$

Hat man nach (22. und 23.) die Winkel $C_3\,C_2\,C_n$ und $C_1\,C_2\,C_n$ berechnet, so giebt ihre Summe den verlangten Winkel γ_2.

Aufgabe 4. (§. 375. 2.) *In dem* n *Eck* (*Fig.* 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die drei Winkel* γ_n, γ_1 und γ_2 *gegeben. Man sucht den mittlern Winkel* γ_1.

Auflösung. Da die Gleichung, welche diesen Winkel γ_1 geben soll, zwar ihn, aber nicht die beiden andern unbekannten Winkel γ_n und γ_2 enthalten mufs, so mufs sie zwei getrennte Winkel nicht enthalten. Die auflösende Gleichung ist also die zweite (§. 374.), und zwar sind hier die dortigen $k=2$ und $m=n$; also ist die auflösende Gleichung (§. 373. 4.) hier

$$24. \quad z^2_{3,4} = z^2_{1,2},$$

weil $m+1=n+1$ der Zeiger des auf γ_n folgenden Winkels γ_1 ist.

In $z^2_{3,n}$ ist Alles bekannt, wie aus (16.) zu sehen, und $z^2_{1,2}$ ist

$$25. \quad z^2_{1,2} = c^2_1 + c^2_2 - 2c_1c_2\cos\gamma_1;$$

also ist

$$z^2_{3,n} = c^2_1 + c^2_2 - 2c_1c_2\cos\gamma_1,$$

woraus

$$26. \quad \cos\gamma_1 = \frac{c^2_1 + c^2_2 - z^2_{3,n}}{2c_1c_2}$$

folgt. Aus diesem Ausdruck findet man den gesuchten Winkel γ_1. Der Ausdruck von $z^2_{3,n}$ steht in (16.).

Es ist leicht zu sehen wie wiederum der Winkel γ_1 auch unmittelbar aus der Figur, nämlich aus dem Dreiecke $C_1\,C_2\,C_n$ gefunden werden kann.

Aufgabe 6. (§. 375. 3.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_n *und* γ_1 *und den getrennten Winkel* γ_m *gegeben. Man sucht den Winkel* γ_m.

Auflösung. α) Die Gleichung, welche den Winkel γ_m geben soll, mufs diesen Winkel, aber nicht die zusammenliegenden Winkel γ_n und γ_1 enthalten. Sie ist also die erste auflösende Gleichung (§. 373. 3.). Da in derselben γ_m mit andern Winkeln summirt vorkommt, so mufs man es aus allen Gliedern, wo es vorkommt, absondern. Dieses giebt, wie leicht zu sehen, eine Gleichung von der Form

$$27. \quad \varkappa\sin\gamma_m + \lambda\cos\gamma_m = \mu,$$

wo $\varkappa$, λ und μ gänzlich aus gegebenen Gröfsen zusammengesetzt sind. Aus dieser Gleichung kann man $\cos\gamma_m$, wie z. B. oben in der dritten Aufgabe aus der Gleichung (9.) entwickeln.

β) Die Aufgabe läſst sich aber auch mit Hülfe der ersten und zweiten, wie folgt auflösen.

Es sey z. B. γ_5 der gesuchte Winkel γ_m, so ist in der Figur $C_1 C_2 \ldots C_5$, zu Folge (Aufgabe 1. Gleichung 1.), die Seite

$$28. \quad C_1 C_5 = z_{2m},$$

und in der Figur $C_5 C_6 \ldots C_n$, nach eben der Gleichung, die Seite

$$29. \quad C_5 C_n = z_{m+1,n},$$

wo $z_{2,m}$ und $z_{m+1,n}$ von lauter gegebenen Gröfsen abhängen.

Ferner ist zu Folge (Aufgabe 2. Gleichung 3.), in der Figur $C_5 C_6 \ldots C_n$, die Tangente des Winkels $C_6 C_5 C_1$,

$$30. \quad \tang C_6 C_5 C_1 = \frac{p_{m+2,n}}{c_{m+1} - q_{m+2,n}},$$

und nach derselben Aufgabe, in der Figur $C_1 C_2 \ldots C_m$, entweder der Winkel

$$31. \quad C_4 C_5 C_1 = 2(m-2)\varrho - C_2 C_1 C_5 \quad (5.)$$

und darin

$$32. \quad \tang C_2 C_1 C_5 = \frac{p_{3,m}}{c_2 - q_{3,m}},$$

oder mit der Bezeichnung (Aufgabe 2. Gleichung 7.) unmittelbar:

$$33. \quad \tang C_4 C_5 C_1 = \frac{{}_{m-1,2}p}{c_m - {}_{m-1,2}q},$$

wo überall rechterhand Alles von gegebenen Gröfsen abhängt.

Endlich ist in dem Dreieck $C_1 C_m C_n$, dessen Seiten c_1, $z_{2,m}$ und $z_{m+1,n}$ sind, auf die Weise wie in der vorigen Aufgabe (Gleichung 23.)

$$34. \quad \tang \tfrac{1}{2} C_1 C_5 C_n = \sqrt{\left[\frac{(c_1 + z_{2,m} - z_{m+1,n})(c_1 + z_{m+1,n} - z_{2,m})}{(z_{2,m} + z_{m+1,n} - c_1)(c_1 + z_{2,m} + z_{m+1,n})}\right]}.$$

Hat man nach den Ausdrücken (30. 31. und 32.) oder (33. und 34.) die drei Winkel $C_6 C_5 C_1$, $C_4 C_5 C_1$ und $C_1 C_5 C_4$ berechnet, so giebt ihre Summe den gesuchten Winkel $C_4 C_5 C_6 = \gamma_m$.

Aufgabe 6. (§. 375. 4.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_n *und* γ_1 *und den getrennten Winkel*

γ_m gegeben. Man sucht einen der beiden zusammenliegenden Winkel, z. B. γ_1.

Auflösung. Die Gleichung, welche den Winkel γ_1 geben soll, mufs diesen Winkel, nicht aber die getrennten Winkel γ_n und γ_m, enthalten. Sie ist also die zweite auflösende Gleichung (§. 373. 6.), und zwar ist das dortige k hier n. Auf der einen Seite der Gleichung ist, wie leicht zu sehen, Alles bekannt; auf der andern ist der unbekannte Winkel mit andern Winkeln summirt, und zwar der erste unter denselben. Also ist die Auflösung der der dritten Aufgabe ähnlich.

Mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe läfst sich die Aufgabe wie folgt auflösen.

Es sey, wie in der vorigen Aufgabe, γ_s der Winkel γ_m, so ist, wie dort (Gleichung 28. und 29.),

$$35.\quad C_1 C_s = z_{2,m},\quad C_s C_n = z_{m+1,n},$$

also in dem Dreieck $C_1 C_s C_n$, auf die Weise wie (Gleichung 34.),

$$36.\quad \tang \tfrac{1}{2} C_s C_1 C_n = \sqrt{\left[\frac{(c_1 + z_{m+1,n} - z_{2,m})(z_{2,m} + z_{m+1,n} - c_1)}{(c_1 + z_{2,m} - z_{m+1,n})(c_1 + z_{2,m} + z_{m+1,n})}\right]}.$$

Ferner ist, wie (Gleichung 32.),

$$37.\quad \tang C_2 C_1 C_s = \frac{p_{3,m}}{c_2 - q_{3,m}}.$$

Die Summe der Winkel $C_s C_1 C_n$ und $C_2 C_1 C_s$, welche (36. und 37.) giebt, ist der gesuchte Winkel γ.

Aufgabe 7. (§. 375. 6.) *In dem n Eck (Fig. 174. 1.) sind die Seiten und Winkel bis auf die drei getrennten Winkel γ_k, γ_m und γ_n gegeben. Man sucht einen dieser Winkel, z. B. γ_n.*

Auflösung. Die Gleichung, welche den Winkel γ_n geben soll, mufs diesen Winkel, nicht aber die beiden andern fehlenden Winkel enthalten. Sie ist also die zweite auflösende Gleichung (§. 374. 6.). Diese Gleichung enthält den Winkel γ_n, nicht aber die Winkel γ_k und γ_m. Es kommt daher nur darauf an, γ_n daraus zu entwickeln, welches eine Auflösung wie in der dritten Aufgabe giebt.

Mit Hülfe der ersten und zweiten Aufgabe findet man den gesuchten Winkel wie folgt.

Der Winkel γ_k sey γ_4 und der Winkel γ_m der Winkel γ_6, so ist in der Figur $C_2 C_4 C_4 C_6$, nach der ersten Aufgabe, die Seite

$$38.\quad C_4 C_6 = z_{k+1,m}.$$

In der Figur $C_3 C_4 \ldots C_n$ ist die Seite

39. $C_3 C_n = z_{k+1,n}$,

und in der Figur $C_6 C_7 C_n$ die Seite

40. $C_6 C_n = z_{m+1,n}$;

also ist in dem Dreieck $C_3 C_6 C_n$,

41. $tang \frac{1}{2} C_6 C_n C_3$

$$= \sqrt{\left[\frac{(z_{k+1,m} + z_{k+1,n} - z_{m+1,n})(z_{k+1,m} + z_{m+1,n} - z_{k+1,n})}{(z_{k+1,n} + z_{m+1,n} - z_{k+1,m})(z_{k+1,m} + z_{k+1,n} + z_{m+1,n})}\right]}.$$

Ferner ist nach der zweiten Aufgabe, in der Figur $C_n C_1 C_2 C_3 C_4$,

42. $tang\, C_3 C_4 C_1 = \frac{p_{2,k}}{c_1 - q_{2,k}}$,

und in der Figur $C_6 C_7 C_n$,

43. $tang\, C_6 C_7 C_1 = \frac{{}_{n-1,m+1}p}{C_n - {}_{n-1,m+1}q}$,

oder

44. $C_6 C_n C_7 = 2(n-m-2)\varrho - C_n C_6 C_7$ und

45. $tang\, C_n C_6 C_7 = \frac{p_{m+2,n}}{c_{m+1} - q_{m+2,n}}$.

Die Summe der drei Winkel $C_6 C_n C_3$, $C_3 C_n C_1$, und $C_n C_6 C_7$ ist der gesuchte Winkel γ_n.

Aufgabe 8. (§. 375. 8.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel γ_1 und γ_n und bis auf die Seite* c_2 *an einem dieser Winkel gegeben. Man sucht die fehlende Seite* c_2.

Auflösung. α) Die Gleichung, welche die fehlende Seite geben soll, darf die beiden fehlenden Winkel nicht enthalten. Sie ist also die erste auflösende Gleichung (3. oder 2. §. 374.), welche die Winkel γ_1 und γ_n nicht enthält. In der Gestalt (§. 374. 1.) ist die auflösende Gleichung $c_1^2 = z_{2,n}^2$. Es ist aber

$$z_{2,n}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{2,n} \text{ (§. 373. 17.)}.$$

Daher ist

46. $c_1^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}$, oder

$$c_2^2 - 2c_2 q_{3,n} + z_{3,n}^2 - c_1^2 = 0,$$

woraus folgt:

47. $c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(q_{3,n}^2 - z_{3,n}^2 + c_1^2)}$.

Es ist aber $z_{3,n}^2 = p_{3,n}^2 + q_{3,n}^2$ (§. 373. 7.). Setzt man dieses in die Wurzelgröfse von c_2 (47.), so erhält man

48. $c_2 = q_{2,n} \pm \sqrt{(c_1^2 - p_{3,n}^2)}$,

welches die gesuchte Seite c_2 durch lauter bekannte Gröfsen giebt.

β) Dieser Ausdruck folgt auch unmittelbar aus der Figur; denn wenn $C_n V$, aus C_n, auf der Seite c_2 senk-

recht steht, so ist, wie leicht zu sehen, $p_{3,n} = C_n V$ und $q_{3,n} = C_2 V$, also

$$c_2 = C_2 V \pm \sqrt{(C_1 C_n^2 - C_n V^2)}, \text{ das heifst}$$

$$c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(c_1^2 - p_{3,n}^2)},$$

je nachdem γ_2 stumpf oder spitz ist; eben wie (48.).

Aufgabe 9. (§. 375. 9.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_{n-1} *und* γ_n, *und bis auf die Seite* c_1, *an einem der beiden Winkel, gegeben. Man sucht den an der fehlenden Seite liegenden fehlenden Winkel* γ_n.

Auflösung. α) Zu Folge der dritten auflösenden Gleichung (§. 374. 10.) ist

$$49. \quad c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ldots \ldots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

welche Gleichung die fehlende Seite c_1 nicht enthält.

Die Gleichung ist so viel als

$$60. \quad p_{2,n-1} \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n grade, und das untere, wenn n ungrade ist.

Sodann ist $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_{n-1} = 2(n-2)\varrho - \gamma_n$; also $\sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) = \sin(2n\varrho - 4\varrho - \gamma_n) = \sin(2n\varrho - \gamma_n)$, also

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) \begin{cases} = -\sin\gamma_n, & \text{wenn } n \text{ grade und} \\ = +\sin\gamma_n, & \text{wenn } n \text{ ungrade ist.} \end{cases}$$

Also ist in (60.) in allen Fällen

$$p_{2,n-1} - c_n \sin\gamma_n = 0,$$

und daraus folgt

$$61. \quad \sin\gamma_n = \frac{p_{2,n-1}}{c_n};$$

welches den gesuchten Winkel durch bekannte Gröfsen giebt.

β) Der Ausdruck (61.) folgt auch leicht unmittelbar aus der Figur; denn $p_{2,n-1}$ ist nichts anders als das Perpendikel $C_7 P_7$ aus C_7 auf c, und es ist $c_n \sin\gamma_n = C_7 P_7 = p_{2,n-1}$; welches den Ausdruck (61.) giebt.

Aufgabe 10. (§. 375. 10.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_{n-1} *und* γ_n, *und bis auf die Seite* c_1 *an einem der beiden Winkel gegeben. Man sucht den* nicht *an der fehlenden Seite liegenden Winkel* γ_{n-1}.

Auflösung. Der Winkel γ_{n-1} läfst sich vermittelst der dritten auflösenden Gleichung (§. 374. 10.), etwa in der Gestalt (60.), finden. Kürzer aber ist es, nach der Gleichung (61.) erst den andern unbekannten Winkel γ_n zu suchen. Alsdann ist

$$62. \quad \gamma_{n-1} = 2(n-2)\varrho - (\gamma_n + \gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-2}).$$

Aufgabe 11. (§. 375. 11.) *In dem n Eck (Fig. 174. I.) sind die Seiten und die Winkel bis auf die beiden an einander liegenden Winkel γ_m und γ_{m+1}, und bis auf eine davon getrennte Seite c_1 gegeben. Man sucht einen der fehlenden Winkel, z. B. γ_m.*

Auflösung. α) Die dritte auflösende Gleichung, in der Gestalt (§. 374. 10.) ist

$$52.\quad c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1+\gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm c_m \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_{m-1}) \\ \mp c_{m+1} \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_m) \\ \pm c_{m+2} \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_{m-1}+\gamma_m+\gamma_{m+1}) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_{n-1}) = 0.$$

Die oberen Zeichen gelten, wenn m grade, die unteren, wenn m ungrade ist.

Die erste Reihe dieser Gleichung ist so viel als $p_{2,m}$, nemlich

$$53.\quad p_{2,m} = c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1+\gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm c_m \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots + \gamma_{m-1}).$$

Sodann ist

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots\ldots + \gamma_m = 2(n-2)\varrho - (\gamma_{m+1}+\gamma_{m+2} \ldots\ldots + \gamma_n)$$
$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots\ldots + \gamma_{m+1} = 2(n-2)\varrho - (\gamma_{m+2}+\gamma_{m+3} \ldots\ldots + \gamma_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots\ldots + \gamma_{n-1} = 2(n-2)\varrho - \gamma_n.$$

Das letzte Glied links, in der Gleichung (52.), nemlich $\pm c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots \gamma_{n-1})$, ist also gleich

$$\pm c_n \sin(2(n-2)\varrho - \gamma_n) = \pm c_n \sin(2n\varrho - \gamma_n).$$

Nun ist dieses Glied positiv, wenn n grade, und negativ, wenn n ungrade ist; hingegen ist $\sin(2n\varrho - \gamma_n)$ gleich $-\sin\gamma_n$, wenn n grade, und gleich $+\sin\gamma_n$, wenn n ungrade ist. Also ist das letzte Glied immer gleich $-c_n \sin\gamma_n$. Auf gleiche Weise ist das vorletzte Glied $+c_{n-1} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1})$; das diesem vorhergehende Glied ist gleich $-c_{n-2} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2})$ u. s. w. Die Glieder in der letzten Zeile der Gleichung (52.) sind also zusammengenommen

$$-[c_n \sin\gamma_n - c_{n-1} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}) + c_{n-2} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}) \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm c_{m+2} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1} \ldots\ldots + \gamma_n)],$$

welches, mit der Bezeichnung (7.), so viel ist als $-{}_{n,m}p_1$, nemlich

$$54.\quad {}_{n,m+2}p = c_n \sin\gamma_n - c_{n-1} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm c_{m+2} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1} \ldots\ldots + \gamma_{m+2}).$$

Zusammengenommen also ist die Gleichung (52.) folgende:

$$55.\quad p_{2,m} \mp c_{m+1} \sin(\gamma_1+\gamma_2+_3 \ldots\ldots + \gamma_{m-1}+\gamma_m) - {}_{n,m+2}p = 0,$$

und daraus folgt

$$56. \quad \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots\ldots+\gamma_{m-1}+\gamma_m) = \pm \frac{p_{2,m} - {}_{n,m+1}p}{c_{m+1}}.$$

Da die Gröfsen $p_{2,m}$ und ${}_{n,m}p$, wie aus (53. und 54.) zu sehen, die unbekannten Stücke γ_m, γ_{m+1} und c_1 nicht enthalten, sondern ganz aus gegebenen Stücken zusammengesetzt sind, so giebt die Gleichung (56.), in welcher das obere Zeichen gilt, wenn m grade, und das untere, wenn m ungrade ist, den Winkel

$$57. \quad \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots\ldots+\gamma_{m-1}+\gamma_m.$$

Zieht man davon die gegebenen Winkel $\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots+\gamma_{m-1}$ ab, so findet man den gesuchten Winkel γ_m.

β) Die Gleichung (56.) läfst sich auch leicht unmittelbar aus der Figur finden. Es sey z. B. γ_4 der gesuchte Winkel γ_m, so sind die Gröfsen $p_{2,m}$ und ${}_{n,m}p$ nichts anders als die Perpendikel C_4P_4 und C_5P_5 aus C_4 und C_5 auf c_1, und $\pm\sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots+\gamma_n)$ ist der Sinus des Winkels, welchen die Seite $C_4C_5 = c_{m+1}$ mit der Seite c_1 macht, also wenn C_5T mit c_1 parallel ist, $\pm\sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots+\gamma_m) = \frac{C_4T}{c_{m+1}}$. Nun ist $C_4T = p_{2,m} - {}_{n,m}p$. Also ist $\pm\sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots+\gamma_m) = \frac{p_{2,m} - {}_{n,m}p}{c_{m+1}}$; wie (56.).

Aufgabe 12. (§. 375. 12.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. 1.) *sind die Seiten und die Winkel, bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_m *und* γ_{m+1} *und bis auf eine davon getrennte Seite* c_2, *gegeben. Man sucht die fehlende Seite* c_1.

Auflösung. α) Wenn man die zwischen den beiden fehlenden Winkeln γ_m und γ_{m+1} liegende Seite c_{m+1} zur Grundlinie nimmt, so ist die erste auflösende Gleichung, für diese Grundlinie,

$$58. \quad z^2_{m+2,n,m} = c^2_{m+1};$$

wo c_{m+1} bekannt ist.

Diese Gleichung enthält zwar die fehlende Seite c_1, nicht aber die beiden fehlenden Winkel γ_m und γ_{m+1}. Man kann also daraus c_1 finden. Die Gleichung ist nach c_1 vom zweiten Grade.

β) Oder man sucht erst nach der vorigen Aufgabe, und zwar nach (56. und 57.), einen der fehlenden Winkel γ_m und hierauf aus

$$59. \quad \gamma_{m+1} = 2(n-2)\varrho - (\gamma_1+\gamma_2 \ldots\ldots+\gamma_m) - (\gamma_{m+2}+\gamma_{m+3} \ldots\ldots \gamma_n),$$

auch den andern γ_{m+1}. Alsdann giebt die erste auflösende Gleichung, für die Grundlinie c_1, nemlich

$$60. \quad z_{2,n}^2 = c_1^2,$$

weil jetzt auch alle Winkel in $z_{2,n}$ bekannt sind, die fehlende Seite c_1 unmittelbar.

Aufgabe 13. (§. 375. 1.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. 1.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf die zwei getrennten Winkel* γ_1 *und* γ_m *und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite* c_2 *gegeben. Man sucht die fehlende Seite* c_2.

Auflösung. α) Wenn man in die zweite auflösende Gleichung $n=1$ setzt, so enthält die Gleichung die beiden fehlenden Winkel γ_1 und γ_m nicht, wohl aber die fehlende Seite c_2, welche also daraus gefunden werden kann.

Es ist nemlich

$$61. \quad y_{2,m}^2 = z_{m+1,n,1}^2,$$

wo $z_{2,m}$ die fehlende Seite c_2 enthält, $z_{m+1,n,1}$ aber aus lauter bekannten Gröfsen zusammengesetzt ist.

Nun ist zu Folge (§. 373. Gleichung 17.) $z_{2,m}^2 = z_{3,n}^2 + c_2^2 - 2c_2 q_{3,n}$, wo $z_{3,n}$ und $q_{3,n}$ nur noch lauter bekannte Gröfsen enthalten.

Es ist also

$$c_2^2 - 2c_2 q_{3,n} + z_{3,n}^2 - z_{m+1,1}^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(q_{3,n}^2 - z_{3,n}^2 + z_{m+1,1}^2)}, \text{ oder weil}$$

$z_{3,n}^2 = p_{3,n}^2 + q_{3,n}^2$ ist (§. 375. 7.),

$$62. \quad c_2 = q_{3,n} \pm \sqrt{(z_{m+1,n,1}^2 - p_{3,n}^2)}$$

folgt; wodurch man die fehlende Seite c_2 aus den gegebenen Stücken findet.

Aufgabe 14. (§. 375. 14.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel, bis auf die zwei getrennten Winkel* γ_1 *und* γ_m *und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite* c_1 *gegeben. Man sucht den an der fehlenden Seite liegenden Winkel* γ_1.

Auflösung. α) Die dritte auflösende Gleichung (§. 374. 10.), nemlich

$$63. \quad c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1+\gamma_2) + c_3 \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ldots$$
$$\ldots \pm c_m \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots + \gamma_{m+1})$$
$$\mp c_{m+1} \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots + \gamma_m) \pm c_{m+2} \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots + \gamma_{m+1}) \ldots$$
$$\ldots \pm c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots \gamma_{n-1}) = 0$$

enthält die fehlende Seite c_1 und den gegebenen Winkel γ_n nicht, dagegen aber die fehlenden Winkel γ_1 und γ_m. Nun sind in dieser Gleichung linkerhand die Glieder der ersten Reihe zusammen so viel als $p_{2,m}$ und die übrigen Glieder, ganz auf die Weise wie in der Auflösung der eilften Aufgabe, so viel als $-_{n,m+1}p$. Also ist

64.

64. $p_{2,m} - {}_{n,m+1}p = 0$, oder $p_{2,m} = {}_{n,m+1}p$,
welches sich auch leicht unmittelbar aus der Figur sehen läfst; denn, wenn z. B. γ_5 der Winkel γ_m ist, so bedeuten $p_{2,m}$ und ${}_{n,m+1}p$, beide das Perpendikel $C_5 P_5$.
Nun ist zu Folge (§. 373. Gleichung 13.)

65. $p_{2,m} = (c_2 - q_{3,m}) \sin\gamma_1 - p_{3,m} \cos\gamma_1$.

Also ist in (64.)

66. $(c_2 - q_{3,m}) \sin\gamma_1 - p_{3,m} \cos\gamma_1 = {}_{n,m+1}p$.

Man setze, der Kürze wegen,

67. $c_2 - q_{3,m} = \varkappa$, $p_{3,m} = \lambda$ und ${}_{n,m+1}p = \mu$,

so ist

68. $\varkappa \sin\gamma_1 - \lambda \cos\gamma_1 = \mu$.

Dieses giebt
$\lambda \cos\gamma_1 = \varkappa \sin\gamma_1 - \mu$ und
$\lambda^2 (1 - \sin\gamma_1^2) = \varkappa^2 \sin\gamma_1^2 - 2\varkappa\mu \sin\gamma_1 + \mu^2$, oder
$(\varkappa^2 + \lambda^2) \sin\gamma_1^2 - 2\varkappa\mu \sin\gamma_1 + \mu^2 - \lambda^2 = 0$, oder

$$\sin\gamma_1^2 - \frac{2\varkappa\mu}{\varkappa^2+\lambda^2}\sin\gamma_1 + \frac{\mu^2-\lambda^2}{\varkappa^2+\lambda^2} = 0; \text{ also}$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{\varkappa\mu}{\varkappa^2+\lambda^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa^2\mu^2}{(\varkappa^2+\lambda^2)^2} - \frac{\mu^2-\lambda^2}{\varkappa^2+\lambda^2}\right)}, \text{ oder}$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{\varkappa\mu}{\varkappa^2+\lambda^2} \pm \frac{\sqrt{(\varkappa^2\mu^2 - \varkappa^2\mu^2 + \varkappa^2\lambda^2 - \lambda^2\mu^2 + \lambda^4)}}{\varkappa^2+\lambda^2}, \text{ oder}$$

69. $$\sin\gamma_1 = \frac{\varkappa\mu \pm \lambda\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)}}{\varkappa^2+\lambda^2}.$$

Nun ist
$\varkappa^2 + \lambda^2 = (c_2 - q_{3,m})^2 + p_{3,m}^2 = c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + q_{3,m}^2 + p_{3,m}^2$,
und weil $q_{3,m}^2 + p_{3,m}^2 = z_{3,m}^2$ (§. 373. 8.),

70. $\varkappa^2 + \lambda^2 = c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2$.

Setzt man dieses, so wie die Ausdrücke von $\varkappa$, λ und μ, (67.) in (69.), so findet man

71. $$\sin\gamma_1 = \frac{(c_2 - q_{3,m})\,{}_{n,m+1}p \pm p_{3,m}\sqrt{(c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2 - {}_{n,m+1}p^2)}}{c_2^2 - 2c_2 q_{3,m} + z_{3,m}^2},$$

welches den gesuchten Winkel γ_1 durch die gegebenen Stücke ausdrückt.

β) Unmittelbar aus der Figur kann man den Ausdruck (71.) wie folgt finden.

Der fehlende Winkel γ_m sey γ_5 (Fig. 174. I.) und $C_5 U$ auf $C_1 C_2$, $C_5 P_5$ auf $C_1 C_n$ senkrecht, so ist

72. $$\begin{cases} C_1 U = c_2 - q_{3,m} = \varkappa \ (67.), \\ C_5 U = p_{3,m} = \lambda \ (67.), \\ C_5 P_5 = {}_{n,m+1}p = \mu \ (67.), \end{cases}$$

$(C_1 C_5)^2 = C_1 U^2 + C_5 U^2 = \varkappa^2 + \lambda^2$;
$(C_1 P_5)^2 = C_1 C_5^2 - C_5 P_5^2 = \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2$.

Nun ist $C_5 U = C_1 C_5 \sin\varphi$, $C_1 U = C_1 C_5 \cos\varphi$,
$C_5 P_5 = C_2 C_5 \sin\psi$, $C_1 P_5 = C_1 C_5 \cos\psi$, oder
$\lambda = \sin\varphi\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}$, $\varkappa = \cos\varphi\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}$,
$\mu = \sin\psi\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}$, $\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)} = \cos\psi\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}$; also

$$73. \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{\lambda}{\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}}, & \cos\varphi = \dfrac{\varkappa}{\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}}, \\ \sin\psi = \dfrac{\mu}{\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}}, & \cos\psi = \dfrac{\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)}}{\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2)}}. \end{cases}$$

Nun ist $\gamma_1 = \psi + \varphi$, wenn die Linie $C_1 C_5$ zwischen $C_1 C_2$ u. $C_1 C_2$ fällt, und $\gamma_1 = \psi - \varphi$, wenn die Linie $C_1 C_5$ aufserhalb $C_2 C_1 C_n$ fällt, also ist für die verschiedenen Fälle: $\sin\gamma_1 = \sin\psi\cos\varphi \pm \cos\psi\sin\varphi$. Setzt man hierin die Ausdrücke von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\psi$, $\cos\psi$ aus (73.), so findet man

$$74. \quad \sin\gamma_1 = \frac{\varkappa\mu \pm \lambda\sqrt{(\varkappa^2+\lambda^2-\mu^2)}}{\varkappa^2+\lambda^2};$$

welches der Ausdruck (69.) ist.

Aufgabe 15. (§. 375. 15.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf die zwei getrennten Winkel* γ_1 *und* γ_m *und bis auf die an dem einen fehlenden Winkel liegende Seite* c_1 *gegeben. Man sucht den getrennten Winkel* γ_m.

Auflösung. Man suche den andern fehlenden Winkel γ_1 nach der 14ten Aufgabe, so findet man

$$75. \quad \gamma_m = 2(n-2)\varrho - (\gamma_1+\gamma_2 \ldots + \gamma_{m-1}) - (\gamma_{m+1}+\gamma_{m+2} \ldots + \gamma_n).$$

Aufgabe 16. (§. 375. 16.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei getrennte Winkel, z. B.* γ_k *und* γ_m, *und bis auf eine an beide Winkel* n i c h t *anliegende Seite, z. B.* c_1, *gegeben. Man sucht den einen fehlenden Winkel, z. B.* γ_k.

Auflösung. Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie c_1 ist

$$\begin{aligned} 76. \quad & c_2\sin\gamma_1 - c_3\sin(\gamma_1+\gamma_2) + c_4\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3) \ldots\ldots \\ & \ldots \pm c_k\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}) \\ & \mp c_{k+1}\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_k) \pm c_{k+2}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{k+1})\ldots \\ & \ldots \pm c_m\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{m-1}) \\ & \mp c_{m+1}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_m) \pm c_{m+2}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{m+1})\ldots \\ & \ldots \pm \sin c_n(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$77. \begin{cases} \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-1} = 2(n-2)\varrho - \gamma_n \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots+\gamma_{n-2} = 2(n-2)\varrho - (\gamma_n+\gamma_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\ldots\gamma_m = 2(n-2)\varrho - (\gamma_n+\gamma_{n-1}\ldots\gamma_{m+1}). \end{cases}$$

Also ist

$$78.\ \begin{cases} \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots +\gamma_{n-1}) = \pm \sin \gamma_n \\ \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots +\gamma_{n-2}) = \pm \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots +\gamma_m) = \pm \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1} \ldots +\gamma_{m+1}). \end{cases}$$

Die obern Zeichen gelten für ein ungrades, die untern für ein grades n. Nun ist das letzte Glied $c_n \sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots +\gamma_{n-1})$ negativ, wenn n ungrade, und positiv, wenn n grade ist. Also ist das letzte Glied immer negativ und die Zeichen der vorhergehenden Glieder wechseln ab. Daher ist die dritte Zeile linkerhand in (76.) so viel als

$$79.\ -(c_n \sin \gamma_n - c_{n-1} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}) + c_{n-2} \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1}+\gamma_{n-2}) \ldots \\ \ldots \pm \sin(\gamma_n+\gamma_{n-1} \ldots +\gamma_{m+1}),$$

das heifst, so viel als $-{}_{n,m+1}p$.

Die erste Zeile ist so viel als $p_{2,k}$. Also ist zusammen, in (76.)

$$80.\ p_{2,k} - p_{n,m+1} \\ + [(c_{k+1}(\sin\gamma_1+\gamma_2 \ldots +\gamma_k) - c_{k+2}\sin(\gamma_1+\gamma_2 \ldots +\gamma_{k+1}) \ldots \\ \ldots \pm c_m(\gamma_1+\gamma_2 \ldots +\gamma_{m-1}))] = 0.$$

Die Gröfsen $p_{2,k}$ und $-{}_{n,m+1}p$ sind ganz aus gegebenen Stücken zusammengesetzt, und nur die zweite Zeile links in (80.) enthält ein unbekanntes Stück, nemlich den Winkel γ_k.

Man setze

$$81.\ \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \ldots +\gamma_k = \varphi,$$

so ist die zweite Zeile in (80.) links so viel als

$$82.\ \mp [c_{k+1}\sin\varphi - c_{k+2}\sin\varphi\cos\gamma_{k+1} + c_{k+3}\sin\varphi\cos(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2}) \ldots \\ \ldots \pm c_m \sin\varphi\cos(\gamma_{k+1} \ldots \gamma_{m-1}) \\ - c_{k+2}\cos\varphi\sin\gamma_{k+1} + c_{k+3}\cos\varphi\sin(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2}) \ldots \\ \ldots \pm c_m \cos\varphi\sin(\gamma_{k+1} \ldots \gamma_{m-1})],$$

oder weil

$$c_{k+2}\cos\gamma_{k+1} - c_{k+3}\cos(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2}) \ldots \pm c_m\cos(\gamma_{k+1} \ldots +\gamma_{m-1}) \\ = q_{k+2,m},$$

$$c_{k+2}\sin\gamma_{k+1} - c_{k+3}\sin(\gamma_{k+1}+\gamma_{k+2}) \ldots \pm c_m\cos(\gamma_{k+1} \ldots +\gamma_{m-1}) \\ = p_{k+2,m},$$

so viel als

$$83.\ \mp [(c_{k+1} - q_{k+2,m})\sin\varphi - p_{k+2,m}\cos\varphi],$$

wo $p_{k+2,m}$ und $q_{k+1,m}$ lauter bekannte Gröfsen enthalten. Also ist die Gleichung (80.) nunmehr

84. $p_{2,k} - {}_{n,m+1}p \pm [(c_{k+1} - q_{k+2,m}) \sin\varphi - p_{k+2,m} \cos\varphi] = 0$, wo, wie aus (76.) zu sehen, das obere Zeichen gilt, wenn k grade ist, und das untere, wenn k ungrade ist.

Setzt man der Kürze wegen

85. $c_{k+1} - q_{k+2,m} = \varkappa$, $p_{k+2,m} = \lambda$ und $p_{2,k} - {}_{n,m+1}p = \mu$, so ist in (84.)

$$86.\quad \mu \mp (\varkappa \sin\varphi - \lambda \cos\varphi) = 0.$$

Daraus folgt $\pm \lambda \cos\varphi = \pm \varkappa \sin\varphi - \mu$ und $\lambda^2 (1 - \sin\varphi^2) = \varkappa^2 \sin\varphi^2 \mp 2\varkappa\mu \sin\varphi + \mu^2$, oder $(\varkappa^2 + \lambda^2) \sin\varphi^2 \mp 2\varkappa\mu \sin\varphi + \mu^2 - \lambda^2 = 0$, also

$$\sin\varphi = \pm \frac{\varkappa\mu}{\varkappa^2 + \lambda^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa^2\mu^2}{(\varkappa^2 + \lambda^2)} + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\varkappa^2 + \lambda^2}\right)},$$

oder, wie in (69.),

$$87.\quad \sin\varphi = \frac{\pm \varkappa\mu \pm \lambda\sqrt{(\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2)}}{\varkappa^2 + \lambda^2}.$$

Es ist

$$\varkappa^2 + \lambda^2 = c_{k+1}^2 - 2c_{k+1} q_{k+2,m} + q_{k+2,m}^2 + p_{k+2,m}^2,$$

und da $q_{k+2,m}^2 + p_{k+2,m}^2 = z_{k+2,m}^2$,

$$88.\quad \varkappa^2 + \lambda^2 = c_{k+1}^2 - 2c_{k+1} q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2.$$

Setzt man diese Ausdrücke von $\varkappa^2 + \lambda^2$ und μ in (81.), so findet man

$$89.\quad \sin\varphi = \frac{\left\{\begin{array}{l}\pm (c_{k+1} - q_{k+2,m})(p_{2,k} - {}_{n,m+1}p) \\ \pm p_{k+2,m}\sqrt{(c_{k+1}^2 - 2c_{k+1} q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2 - (p_{2,k} - {}_{n,m+1}p)^2)}\end{array}\right\}}{c_{k+1}^2 - 2c_{k+1} q_{k+2,m} + z_{k+2,m}^2}.$$

Hieraus findet man den gesuchten Winkel γ_k in lauter bekannten Größen, weil $\varphi = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_k$ (81.), und folglich

$$90.\quad \gamma_k = \varphi - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4 \ldots - \gamma_{k-1})$$

ist.

Auch kann man das Resultat, wenn man will, auf eine ähnliche Art wie in der vorigen Aufgabe, unmittelbar aus der Figur ableiten.

Aufgabe 17. (§. 376. 17.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und Winkel bis auf zwei getrennte Winkel, z. B.* γ_k *und* γ_m *und bis auf eine an beide Winkel* *nicht anliegende Seite* c_1 *gegeben. Man sucht die fehlende Seite* c_1.

Auflösung. Die zweite auflösende Gleichung (§. 374. 6.) enthält die beiden fehlenden Winkel γ_k und

γ_m nicht, wohl aber die fehlende Seite c_1. Also kann man diese Seite daraus finden.

Die Gleichung welche sie giebt ist vom zweiten Grade.

Man kann aber auch nach der 16ten Aufgabe den einen fehlenden Winkel γ_k, und aus $\gamma_m = 2(n-2)\varrho - (\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-1}) - (\gamma_{m+1} + \gamma_{m+2} \ldots + \gamma_n)$ den andern fehlenden Winkel suchen. Alsdann giebt die erste auflösende Gleichung (§. 374.) die fehlende Seite c_1 unmittelbar.

Aufgabe 18. (§. 375. 18.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei an einander liegende Seiten, z. B.* c_1 *und* c_2, *gegeben. Man sucht eine dieser beiden Seiten, z. B.* c_2.

Auflösung. Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie c_1 ist

$$p_{2,n} = c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ldots \ldots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) = 0,$$

oder weil zu Folge (§. 373. 13.)

$p_{2,n} = (c_2 - q_{3,n}) \sin\gamma_1 - p_{3,n} \cos\gamma_1$ ist, $(c_2 - q_{3,n}) \sin\gamma_1 = p_{3,n} \cos\gamma_1$. Daraus folgt:

$$91. \quad c_2 = p_{3,n} \cot\gamma_1 + q_{3,n};$$

welches die gesuchte Seite durch die gegebenen Gröfsen giebt.

Aufgabe 19. (§. 375. 19.) *In dem* n *Eck* (Fig. 174. I.) *sind die Seiten und die Winkel bis auf zwei getrennte Seiten, z. B.* c_1 *und* c_m, *gegeben. Man sucht eine dieser beiden Seiten, z. B.* c_m.

Auflösung. Die dritte auflösende Gleichung für die Grundlinie c_1 ist

$$92. \quad c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ldots \ldots$$
$$\ldots \pm c_{m-1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-2}) \mp c_m \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-1})$$
$$\pm c_{m+1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_m) \mp c_{m+2} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m+1}) \ldots$$
$$\ldots \pm c_n \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{n-1}) = 0.$$

Die erste Zeile ist so viel als $p_{2,m-1}$. Setzt man

$$93. \quad \gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-1} = \alpha,$$

so ist die zweite Zeile $\mp c_m \sin\alpha$ und die dritte Zeile so viel als

$$\pm[(c_{m+1} \sin\alpha \cos\gamma_m + c_{m+2} \sin\alpha \cos(\gamma_m + \gamma_{m+1}) \ldots \ldots \ldots \pm c_n \sin\alpha \cos(\gamma_m + \gamma_{m+1} \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$+ c_{m+1} \cos\alpha \sin\gamma_m + c_{m+2} \cos\alpha \sin(\gamma_m + \gamma_{m+1}) \ldots \ldots \ldots \pm c_n \cos\alpha \sin(\gamma_m + \gamma_{m+1} \ldots + \gamma_{n-1})],$$

oder so viel als

$\pm[q_{m+1,n} \sin\alpha + p_{m+1,n} \cos\alpha]$. Zusammengenommen also ist die Gleichung (92.),

$$94. \quad p_{2,m-1} \mp c_m \sin\alpha \pm (q_{m+1,n} \sin\alpha + p_{m+1,n} \cos\alpha) = 0.$$

Daraus folgt

$$95.\quad c_m = q_{m+1,n} + p_{m+1,n}\cot\alpha \pm p_{1,m-1}\operatorname{cosec}\alpha.$$

Das obere Zeichen gilt, wie aus (92.) zu sehen, wenn m ungrade, das untere wenn m grade ist. Auch ist unmittelbar aus (92.)

$$96.\quad c_m = \frac{\left\{\begin{array}{l} c_{m+1}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_m) - c_{m+2}\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{m+1})\ldots \\ \ldots \pm c_n\sin(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_{n-1}) \pm p_{2,m-1} \end{array}\right\}}{\sin(\gamma_1+\gamma_2\ldots+\gamma_{m-1})},$$

welches die gesuchte Seite c_m durch die gegebenen Stücke giebt.

377.

Anmerkung. Im Viereck, der einfachsten Figur nächst dem Dreieck, finden von den 19 Aufgaben für ein beliebiges Vieleck (§. 375. und 376.) die 3te, 4te, 5te, 16te und 17te nicht Statt, weil im Viereck drei fehlende Winkel nicht getrennt seyn können, und von zwei getrennten Winkeln keine Seite abgesondert seyn kann.

Die möglichen Aufgaben beim Viereck sind also folgende, und zwar so numerirt, wie sie auf einander folgen:

Gegeben.	Gesucht.	*Die Aufgabe correspondirt mit folgender Aufgabe beim Vieleck (§. 376):*
Alle Seiten und Winkel bis auf:		
I. *Drei Winkel,*	3) *ein fehlender äußerer Winkel*	6
	4) *der fehlende mittlere Winkel*	7
II. *Zwei Winkel und eine Seite dazwischen,*	1) *die fehlende Seite* .	1
	2) *einer der fehlenden Winkel*	2
III. *Zwei Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,*	5) *die fehlende Seite* .	8
	6) *der fehlende Winkel an der fehlenden Seite*	9
	7) *der andere fehlende Winkel*	10
IV. *Zwei Winkel und eine davon getrennte Seite,*	8) *einer der fehlenden Winkel*	11
	9) *die fehlende Seite* .	12
V. *Zwei getrennte Winkel und eine Seite an dem einen Winkel,*	10) *die fehlende Seite* .	13
	11) *der Winkel an der fehlenden Seite* . .	14
	12) *der getrennte fehlende Winkel*	15

V. Zwei Seiten an einander, 13) *eine fehlende Seite* 18

V. Zwei getrennte Seiten, 14) *eine fehlende Seite* 19

Man kann diese Aufgaben unmittelbar durch die allgemeine Ausdrücke (§. 376.) auflösen.

Der Raum gestattet nicht die Auflösungen durchzugehen. Sie haben aber keine Schwierigkeit. Man darf nur jedesmal die Seiten c_5, c_6 .... c_n *gleich Null setzen, weil im gegenwärtigen Falle nur die vier Seiten* c_1, c_2, c_3, c_4 *existiren.*

378.

Erläuterung. Da nicht allein die Seiten und die Winkel einer Figur zwischen den Seiten, sondern auch die Diagonalen und selbst andere, nach bestimmten Regeln liegende grade Linien, nebst den Winkeln, die sie mit einander und mit den Seiten einschliefsen, bestimmende Stücke einer Figur seyn können, so giebt es noch weit mehr Aufgaben: aus den bestimmenden Stücken einer Figur die fehlenden zu finden. Die Zahl solcher Aufgaben, deren Auflösung übrigens nirgend Schwierigkeit hat, ist sehr grofs. Man kann dieses an: *Biörnsen introductio in tetragonometriam* sehen. Obgleich dieses Buch blos vom Viereck handelt, so füllen doch die Aufgaben über diese Figur schon einen Band. Es läfst sich also hier auf dem beschränkten Raume nichts Umfassenderes von diesem Gegenstande sagen. Wir müssen uns begnügen einige besondere, am häufigsten vorkommende Sätze zu berühren.

379.

Lehrsatz. *Das Product der Sinus der Winkel zwischen den Diagonalen einer Figur, die je zwei auf einander folgende Seiten verbinden, und je einer dieser Seiten, abwechselnd genommen, ist dem Product der Sinus der Winkel zwischen den nemlichen Diagonalen und den anderen Seiten gleich.*

Z. B. Wenn man in (Fig. 175.)

die Diagonal, welche die Seiten c_1 und c_2 verbindet, durch z_1,

die Diagonal, welche die Seiten c_2 und c_3 verbindet, durch z_2

u. s. w. bezeichnet, so ist

$$\sin(z_1 c_1) \cdot \sin(z_2 c_2) \cdot \sin(z_3 c_3) \ldots \sin(z_n c_n)$$
$$= \sin(z_1 c_2) \cdot \sin(z_2 c_3) \cdot \sin(z_3 c_4) \ldots \sin(z_n c_1).$$

Beweis. Es ist

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin(z_1 c_1)}{\sin(z_1 c_2)}, \quad \frac{c_3}{c_2} = \frac{\sin(z_2 c_2)}{\sin(z_2 c_3)} \ldots \frac{c_1}{c_n} = \frac{\sin(z_n c_n)}{\sin(z_n c_1)}.$$

Multiplicirt man alle diese Gleichungen in einander, so heben sich linkerhand alle Factoren auf, und man findet

$$1 = \frac{\sin(z_1 c_1) \sin(z_2 c_2) \ldots \sin(z_n c_n)}{\sin(z_1 c_2) \sin(z_2 c_3) \ldots \sin(z_n c_1)},$$

woraus die Gleichung des Lehrsatzes folgt.

380.

Aufgabe. In einem Viereck sind zwei Seiten nebst dem Winkel, welchen sie einschliefsen, und den Winkeln zwischen der Diagonal, die durch den gegebenen Winkel geht, und den andern beiden Seiten gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Z. B. in (Fig. 176.) sind a, b, α, β und γ gegeben. Man sucht z. B. φ.

Erste Auflösung. Es ist

im Dreieck ACD, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{z}{\sin\psi}$, und

im Dreieck BCD, $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{z}{\sin\varphi}$;

also wenn man das zweite mit dem ersten dividirt:

$$2. \quad \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Nun ist

$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 4\varrho$ also $\varphi = 4\varrho - (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)$ und $\sin\psi = -\sin(\alpha + \beta + \gamma + \varphi) = -\sin(\alpha + \beta + \gamma)\cos\varphi - \cos(\alpha + \beta + \gamma)\sin\varphi$, folglich in (2.)

$$\frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = -\sin(\alpha + \beta + \gamma)\cot\varphi - \cos(\alpha + \beta + \gamma) \text{ und}$$

$$3. \quad \cot\varphi = -\left(\frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta \sin(\alpha + \beta + \gamma)} + \cot(\alpha + \beta + \gamma)\right),$$

wodurch man den gesuchten Winkel φ aus den gegebenen Stücken a, b, α, β und γ findet. Hat man φ gefunden, so ist $\psi = 4\varrho - (\alpha + \beta + \gamma + \varphi)$, und weil

in dem Dreieck ACD, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \psi)}$, und

in dem Dreieck BCD, $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin(\beta + \varphi)}$ ist,

$$\begin{cases} AD = \frac{a \sin(\alpha + \psi)}{\sin\alpha}, \\ BD = \frac{b \sin(\beta + \varphi)}{\sin\beta}. \end{cases}$$

Zweite Auflösung. Wie in der ersten Auflösung (2.) ist $\frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$.

Man setze

$$5. \quad \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \tang\lambda = \frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta},$$

welches immer angeht, weil die Tangente eines Winkels jede Gröfse von 0 bis ∞ haben kann, so ist

$$6. \quad \frac{1+\tang\lambda}{1-\tang\lambda} = \frac{1+\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}}{1-\frac{\sin\psi}{\sin\varphi}} = \frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi}.$$

Aber $\frac{\sin\varphi+\sin\psi}{\sin\varphi-\sin\psi} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}$ (§. 345. 86.) und $\frac{1+\tang\lambda}{1-\tang\lambda} = \tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)$ (§. 345. 103.); also

$$7. \quad \tang(\pi-\lambda) = \frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi)} \text{ und folglich.}$$

$$8. \quad \tang\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = \frac{\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)}.$$

Nun ist aus $(\alpha+\beta+\gamma+\varphi+\psi)$, $\varphi+\psi = 4\varrho-(\alpha+\beta+\gamma)$, also
$\tang\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \tang(2\varrho-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)) = -\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$
und folglich in (8.) $\tang\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = -\frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma}{\tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)}$,
oder

$$9. \quad \tang\tfrac{1}{2}(\psi-\varphi) = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)}.$$

Aus (5.) findet man λ, also da α, β, γ gegeben sind, aus (9.) $\frac{1}{2}(\psi-\varphi)$. Ferner ist $\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = 2\varrho-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$. Addirt und subtrahirt man $\frac{1}{2}(\psi-\varphi)$ und $\frac{1}{2}(\psi+\varphi)$, so findet man ψ und φ und wie oben (4.) AD und BD.

Anmerkung 1. Wenn $\alpha+\beta+\gamma = 2\varrho$, also das Viereck $ACBD$ centrisch nach den Ecken ist, so ist $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$ und $\cot(\alpha+\beta+\gamma)$ unendlich grofs, also in (3.) $\cot\varphi$ unbestimmt; desgleichen sind die Winkel am Mittelpuncte des Vierecks 2α und 2β: also ist nun für den Halbmesser r, $\frac{1}{2}a = r\sin\alpha$ und $\frac{1}{2}b = r\sin\beta$, folglich $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r = \frac{b}{\sin\beta}$, also $\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = 1$,

und in (6.) $tang\,\lambda = 1$ und $\lambda = \frac{1}{4}\pi$, folglich in (9.) $tang(\frac{1}{4}\pi + \lambda)$ $= tang\frac{1}{2}\pi = tang\,\varrho = \infty$, eben wie $tang\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$; mithin auch in (9.) $tang\,\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$, und folglich ψ und φ unbestimmt. Es können also, wenn $\alpha + \beta + \gamma = 2\varrho$ ist, φ und ψ seyn, was man will, das heifst, es sind, wenn das Viereck centrisch nach den Ecken ist, mit den nemlichen gegebenen Stücken, unzählige Vierecke möglich; was mit (§. 93.) übereinstimmt.

Anmerkung 2. Zur zweiten Auflösung sind, wie man sieht, blos die Logarithmen goniometrischer Linien nöthig: zur ersten Auflösung die Linien selbst, weil in (3.) rechterhand die Cotangente des Winkels $\alpha + \beta + \gamma$ zu addiren ist. Hat man also vielleicht Tafeln, welche nur die Logarithmen der goniometrischen Linien enthalten, nicht die Linien selbst, wie es z. B. mit den kleinern Vegaschen Tafeln der Fall ist, so müfste man, wenn man sich der ersten Auflösung bediente, erst noch die zu dem Logarithmen von $cot(\alpha + \beta + \gamma)$ gehörige Zahl aufschlagen. In diesem Falle ist die zweite Auflösung etwas kürzer; aufserdem aber nicht.

Anmerkung 3. Die Aufgabe dieses Paragraphs kommt besonders in der Feldmefskunst häufig vor, nemlich bei dem sogenannten Rückwärts-einschneiden. Man nennt sie gewöhnlich die Pothenotsche. Die obige zweite Auflösung ist von Delambre, und wie man sieht einer ähnlichen Auflösung beim Dreieck (§. 360. IV.) nachgebildet.

381.

Aufgabe. In einem beliebigen Vieleck sind zwei Seiten nebst dem Winkel, welchen sie einschliefsen, und den Winkeln zwischen den Diagonalen, die durch den gegebenen Winkel gehen und den übrigen Seiten, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Z. B. in (Fig. 177.) sind a, b, α_1, α_2 .... α_n und β_1, β_2 .... β_n gegeben. Man sucht z. B. φ.

Erste Auflösung. Es ist

$$1.\quad \begin{cases} \text{in dem Dreieck } ACD, & \dfrac{a}{\sin\alpha_1} = \dfrac{z_1}{\sin\psi}, \\ \text{in dem Dreieck } D_1CD_2, & \dfrac{z_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{z_2}{\sin\beta_1}, \\ \text{in dem Dreieck } D_2CD_3, & \dfrac{z_2}{\sin\alpha_3} = \dfrac{z_3}{\sin\beta_2}, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \text{in dem Dreieck } D_nCB, & \dfrac{z_n}{\sin\varphi} = \dfrac{b}{\sin\beta_n}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so findet man

$$\frac{a z_1 z_2 z_3 \ldots z_n}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots \sin\varphi} = \frac{z_1 z_2 z_3 \ldots z_n b}{\sin\psi \sin\beta_1 \sin\beta_2 \ldots \sin\beta_n},$$

oder

$$2.\quad \frac{b \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_n}{a \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 \ldots \sin\beta_n} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}.$$

Nun ist

$$\psi + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \ldots + \alpha_n + \beta_n + \varphi = 2(n-2)\varrho,$$

also

$$3.\quad \psi = 2(n-2)\varrho - (\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \ldots + \alpha_n + \beta_n) - \gamma - \varphi \text{ und}$$

$$4.\quad \sin\psi = \pm \sin(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \ldots + \alpha_n + \beta_n + \gamma + \varphi),$$

je nachdem n grade oder ungrade ist.

Bezeichnet man

$$5.\quad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \ldots + \alpha_n + \beta_n + \gamma \text{ durch } x,$$

so ist

$$\sin\psi = \mp \sin(x + \varphi) = \mp (\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi),$$

also in (2.)

$$\frac{b \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_n}{a \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 \ldots \sin\beta_n} = \mp (\sin x \cot\varphi + \cos x) \text{ und}$$

$$6.\quad \cot\varphi = \mp \frac{b \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_n}{a \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 \ldots \sin\beta_n \sin x} - \cot x;$$

wodurch man den Winkel φ aus den gegebenen Stücken a, b, α_1, β_1, α_2, β_2, ... α_n, β_n findet. Hat man φ gefunden, so erhält man aus (3.) ψ. Ferner ist alsdann in dem Dreieck ACD_1

$$\frac{a}{\sin\alpha_1} = \frac{AD}{\sin(\alpha_1 + \psi)} = \frac{z_1}{\sin\psi}, \text{ also}$$

$$7.\quad AD_1 = \frac{a \sin(\alpha_1 + \psi)}{\sin\alpha_1} \text{ und } z_1 = \frac{a \sin\psi}{\sin\alpha_1};$$

in dem Dreieck $D_1 C D_2$

$$\frac{z_1}{\sin\alpha_2} = \frac{D_1 D_2}{\sin(\beta_1 + \alpha_2)} = \frac{z_2}{\sin\beta_1}, \text{ also}$$

$$8.\quad D_1 D_2 = \frac{z_1 \sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_2} = \frac{a \sin\psi \sin(\beta_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} \text{ und}$$

$$z_2 = \frac{z_1 \sin\beta_1}{\sin\alpha_2} = \frac{a \sin\psi \sin\beta_1}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2};$$

in dem Dreieck $D_2 C D_3$

$$\frac{z_2}{\sin\alpha_3} = \frac{D_2 D_3}{\sin(\beta_2 + \alpha_3)} = \frac{z_3}{\sin\beta_2}; \text{ also}$$

$$9.\quad D_2 D_3 = \frac{z_2 \sin(\beta_2 + \alpha_3)}{\sin\alpha_3} = \frac{a \sin\psi \sin\beta_1 \sin(\beta_2 + \alpha_3)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3} \text{ und}$$

$$z_3 = \frac{z_2 \sin \beta_2}{\sin \alpha_3} = \frac{a \sin \psi \sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}$$

u. s. w., welches die übrigen Seiten des Vielecks AD_1, D_1D_2, D_2D_3 etc. giebt.

Zweite Auflösung. Wie in der ersten Auflösung findet man die Gleichung (2.). Man setze

$$10. \quad \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} = \tang \lambda = \frac{b \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \ldots \sin \alpha_n}{a \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \ldots \sin \beta_n},$$

so ist, wie im vorigen Paragraph (2te Auflösung),

$$11. \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{\tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tang (\tfrac{1}{4}\pi + \lambda)}.$$

Nun ist nach (3. und 6.)

$$\varphi + \psi = 2(n-2)\varrho - x; \text{ also}$$

$$12. \quad \begin{cases} \tang \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = + \cot \tfrac{1}{2} x, & \text{wenn } n \text{ ungrade, und} \\ \tang \tfrac{1}{2}(\psi + \varphi) = - \tang \tfrac{1}{2} x, & \text{wenn } n \text{ grade ist;} \end{cases}$$

und folglich in (11.)

$$13. \quad \tang \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{\cot \tfrac{1}{2} x}{\tang (\tfrac{1}{4}\pi + \lambda)}, \text{ wenn } n \text{ ungrade, und}$$

$$14. \quad \tang \tfrac{1}{2}(\psi - \varphi) = \frac{\tang \tfrac{1}{2} x}{\tang (\tfrac{1}{4}\pi + \lambda)}, \text{ wenn } n \text{ grade ist.}$$

Aus (6.) findet man x und aus (10.) λ, also aus (13. u. 14.) $\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)$ oder $\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi)$. Addirt und subtrahirt man $\tfrac{1}{2}(\psi - \varphi)$ und $\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = 2(n-2)\varrho - x$, so findet man die gesuchten Winkel ψ und ψ und hierauf die übrigen Seiten der Figur, wie in der ersten Auflösung.

Anmerkung 1. Die Aufgabe ist wieder unbestimmt, wenn

$$15. \quad x \text{ oder } \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 \ldots + \alpha_n + \beta_n + \gamma = 2m\varrho$$

ist, wo m eine beliebige ganze Zahl seyn kann, die kleiner ist als $n-2$. Denn wenn $x = 2m\varrho$, so ist $\sin x = 0$, und folglich in (6.) $\cot \varphi = \infty - \infty$, welches für $\cot \varphi$ keinen bestimmten Werth giebt. In diesem Fall also sind mit den nemlichen gegebenen Stücken unzählige verschiedene Vielecke möglich.

Anmerkung 2. Wenn man Tafeln hat, welche nur die Logarithmen goniometrischer Linien, nicht die Linien selbst enthalten, so ist die zweite Auflösung etwas vortheilhafter; sonst ist die erste besser.

Zusatz. Wenn in (15.) $x = 2m\varrho$, so ist $\tfrac{1}{2}x = m\varrho$, also

$$16. \quad \begin{cases} \tang \tfrac{1}{2} x = 0, & \text{wenn } m \text{ grade und} \\ \tang \tfrac{1}{2} x = \infty, & \text{wenn } m \text{ ungrade,} \\ \cot \tfrac{1}{2} x = 0, & \text{wenn } m \text{ ungrade und} \\ \cot \tfrac{1}{2} x = \infty, & \text{wenn } m \text{ grade ist.} \end{cases}$$

In keinen dieser Fälle aber darf $tang\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ oder $tang\,\frac{1}{2}(\psi-\varphi)$ (13. und 14.) einen bestimmten Werth haben, weil unzählige verschiedene Vielecke mit den nemlichen gegebenen Stücken möglich sind. Also muſs der Divisor

$tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)=0$ seyn, wenn m ungrade } und n un-
$tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)=\infty$, wenn m grade . . } grade ist;
$tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)=0$, wenn m grade und } und n grade
$tang(\frac{1}{4}\pi+\lambda)=\infty$, wenn m ungrade } ist.

Es muſs also

$\lambda=(n+\frac{1}{4})\pi$ und folglich $tang\,\lambda=\pm1$, also zu Folge (10.)

$$\frac{b\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n}{a\sin\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_n}=\pm1, \text{ oder}$$

17. $b\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n=\pm a\sin\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_n$

seyn, sobald

18. $\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2\ldots+\alpha_n+\beta_n+\gamma=2m\varrho$

ist. Dieser Satz gilt für jedes beliebige Vieleck.

382.

Anmerkung. Es giebt eine groſse Menge polygonometrischer Aufgaben, von der Art wie in den beiden vorigen Paragraphen. Der Raum gestattet aber nicht dabei länger zu verweilen. Man findet darüber mehreres Interessante in Lamberts Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik, Berlin, 1792; in: Lexell, de resol. polyg. rect.; in den Petersburger Commentarien; in: Mascheroni, problèmes pour les arpenteurs, Paris 1803; in: Carnot, géometrie de position; in: Meyer Hirsch, geometrische Aufgaben, Berlin 1806; in den Annales des mathem. von Gergonne; in den Abhandlungen von Däsel, Puissant, Brianchon und Andern.

383.

Erläuterung. Nächst der Aufgabe, aus gegebenen bestimmenden Stücken einer Figur die fehlenden Stücke zu finden, kommt besonders diejenige häufig vor: aus den gegebenen bestimmenden Stücken den Inhalt der Figur zu finden.

Nimmt man blos Seiten und Winkel der Figur zu bestimmenden Stücken, so sind die in (§. 371.) aufgezählten zehn Fälle bestimmender Stücke möglich. der Inhalt der Figur muſs also gefunden werden können:

aus den Seiten und Winkeln der Figur

I. *weniger drei Winkel, welche*

1) *entweder an einander liegen, oder*

2) *zwei an einander, einer abgesondert, oder*

3) *alle drei getrennt;*

II. *weniger zwei Winkel und einer Seite, und zwar*

4) *die Winkel an einander, die Seite dazwischen;*

5) *die Winkel an einander, die Seite an dem einen Winkel;*

6) *die Winkel an einander, die Seite abgesondert;*

7) *die Winkel getrennt, die Seite an dem einen Winkel;*

8) *die Winkel getrennt, die Seite abgesondert;*

III. *weniger zwei Seiten, welche*

9) *an einander liegen, oder*

10) *von einander abgesondert sind.*

Man findet den Inhalt in diesen zehn Fällen, und zwar in der Ordnung, wie sie sich einer auf den andern beziehen, wie folgt.

384.

Aufgabe 1. (§. 383. 4ter Fall) *In dem* n Eck $C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_n und γ_1 *und die dazwischen liegende Seite* c_1 *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. α) In dem Viereck $C_2 C_3 C_n C_1$ ist, wenn man die Seite $C_1 C_2$ zur Grundlinie nimmt, nach (§. 373. 1.)

1. $c_3 \sin(c_3 c_2) + v_4 \sin(v_4 c_2) + c_1 \sin(c_1 c_2) = 0$

und nach (§. 373. 3.) ist der Winkel

2. $(c_1 c_2) = (c_3 c_2) + (v_4 c_3) + (c_1 v_4) - 4\varrho$.

Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit c_2, so findet man

3. $c_2 c_3 \sin(c_3 c_2 + c_2 v_4 \sin(v_4 c_2) + c_2 c_1 \sin(c_1 c_2) = 0$.

Nun ist der Inhalt des Vierecks $C_2 C_3 C_n C_1$, welcher mit $F_{2,4}$ bezeichnet werden mag, gleich der Summe des Inhalts der Dreiecke $C_2 C_3 C_n$ und $C_n C_1 C_2$. Also ist zu Folge (§. 364. I.)

4. $2 F_{2,4} = c_3 v_4 \sin(v_4 c_3) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1)$,

wo der Winkel

5. $(c_2 c_1) = 4\varrho - ((c_3 c_2) + (v_4 c_3) + (c_1 v_4))$

ist.

Aus (2. und 5.) folgt $(c_1 c_2) = -(c_2 c_1)$ und also $\sin(c_1 c_2) = -\sin(c_2 c_1)$.

Die Gleichungen (3. und 4.) sind daher

$$6.\quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 v_4 \sin(v_4 c_2) - c_2 c_1 \sin(c_2 c_1) = 0.$$

$$7.\quad 2F_{2,4} = c_3 v_4 \sin(v_4 c_3) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$8.\quad 2F_{2,4} = c_3 c_2 \sin(c_3 c_2) + v_4 c_2 \sin(v_4 c_2) + v_4 c_3 \sin(v_4 c_3),$$

das heifst: der zwiefache Inhalt des Vierecks $C_2 C_3 C_n C_1$ ist gleich der Summe der Producte zu zweien, von drei Seiten in die Sinus der Winkel, welche sie einschliefsen.

β) In dem Fünfeck $C_2 C_3 C_4 C_n C_1$ ist nach (§. 373. 1.), wenn man wieder die Seite c_2 zur Grundlinie nimmt,

$$9.\quad c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) + v_5 \sin(v_5 c_2) + c_1 \sin(c_1 c_2) = 0$$

und nach (§. 373. 5.) ist der Winkel

$$10.\quad (c_1 c_2) = (c_3 c_2) + (c_4 c_3) + (v_5 c_4) + (c_1 v_5) - 6\varrho.$$

Multiplicirt man die Gleichung (9.) mit c_2, so erhält man

$$11.\quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 c_4 \sin(c_4 c_2) + c_2 v_5 \sin(v_5 c_2) + c_2 c_1 \sin(c_1 c_2) = 0.$$

Nun ist der Inhalt des Fünfecks $C_2 C_3 C_4 C_n C_1$, welcher durch $F_{2,5}$ bezeichnet werden mag, gleich der Summe des Inhalts des Vierecks $C_2 C_3 C_4 C_n$ und des Dreiecks $C_2 C_3 C_1$. Der Inhalt des Vierecks ist nach der Regel (β.) gleich

$$c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4),$$

der Inhalt des Dreiecks ist $c_2 c_1 \sin(c_2 c_1)$. Also ist

$$12.\quad 2F_{2,5} = c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1),$$

wo der Winkel

$$13.\quad (c_2 c_1) = 6\varrho - ((c_3 c_2) + (c_4 c_3) + (v_5 c_4) + (c_1 v_5))$$

ist. Aus (10. und 13.) folgt $(c_1 c_2) = -(c_2 c_1)$ und also $\sin(c_1 c_2) = -\sin(c_2 c_1)$. Die Gleichungen (11. und 12.) sind daher

$$14.\quad c_2 c_3 \sin(c_3 c_2) + c_2 c_4 \sin(c_4 c_2) + c_2 v_5 \sin(v_5 c_2) - c_2 c_1 \sin(c_2 c_1) = 0 \text{ und}$$

$$15.\quad 2F_{2,5} = c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4) + c_2 c_1 \sin(c_2 c_1).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man

$$16.\quad 2F_{2,5} = c_3 c_2 \sin(c_3 c_2) + c_4 c_2 \sin(c_4 c_2) + v_5 c_2 \sin(v_5 c_2) + c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + v_5 c_3 \sin(v_5 c_3) + v_5 c_4 \sin(v_5 c_4)$$

das heifst: der zwiefache Inhalt des Fünfecks $C_1 C_2 C_3 C_{n-1} C_n$ ist gleich der Summe der Producte je zweier von vier Seiten in die Sinus der Winkel, die sie einschliefsen.

γ) Es ist leicht zu sehen, dafs man, wenn man so fortfährt, nemlich allemal den Inhalt des Dreiecks $C_2 C_n C_1$ zu dem Reste der Figur addirt, eine ähnliche Regel für das Sechseck, Siebeneck u. s. w. findet.

Es ist also allgemein für das n Eck $C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$

$$17.\quad 2F_{2,n} = c_3 c_2 \sin(c_3 c_2) + c_4 c_2 \sin(c_4 c_2) \ldots + c_n c_2 \sin(c_n c_2)$$
$$+ c_4 c_3 \sin(c_4 c_3) + c_5 c_3 \sin(c_5 c_3) \ldots + c_n c_3 \sin(c_n c_3)$$
$$+ c_5 c_4 \sin(c_5 c_4) + c_6 c_4 \sin(c_6 c_4) \ldots + c_n c_4 \sin(c_n c_4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_n c_{n-1} \sin(c_n c_{n-1}),$$

das heifst: der zwiefache Inhalt einer beliebigen Figur von n Seiten, durch $n-1$ Seiten und die von denselben eingeschlossenen Winkel ausgedrückt, ist gleich der Summe der Producte der $n-1$ Seiten zu zweien, in die Sinus der Winkel, welche je zwei Seiten einschliefsen.

δ) Da

$$18.\quad \begin{cases} c_3 \sin(c_3 c_2) + c_4 \sin(c_4 c_2) \ldots + c_n \sin(c_n c_2) = p_{3,n} \\ c_4 \sin(c_4 c_3) + c_5 \sin(c_5 c_3) \ldots + c_n \sin(c_n c_3) = p_{4,n} \\ c_5 \sin(c_5 c_4) + c_6 \sin(c_6 c_4) \ldots + c_n \sin(c_n c_4) = p_{5,n} \\ \text{etc. (§. 373. III. 4.)}, \end{cases}$$

so kann man auch den Inhalt $F_{2,n}$ des Vielecks wie folgt ausdrücken:

$$19.\quad 2F_{2,n} = c_2 p_{3,n} + c_3 p_{4,n} + c_4 p_{5,n} \ldots + c_{n-1} p_{n,n}.$$

ε) Drückt man nach (§. 373. 3.) die Winkel $(c_3 c_2)$, $(c_4 c_2) \ldots (c_4 c_3)$ etc. durch die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ zwischen je zwei auf einander folgenden Seiten aus, so findet man

$$20.\quad 2F_{2,n} = c_3 c_2 \sin\gamma_2 - c_4 c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3) + c_5 c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \ldots$$
$$\ldots \mp c_n c_2 \sin(\gamma_2 + \gamma_3 \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$+ c_4 c_3 \sin\gamma_3 - c_5 c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4) + c_6 c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5) \ldots$$
$$\ldots \pm c_n c_3 \sin(\gamma_3 + \gamma_4 \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$+ c_5 c_4 \sin\gamma_4 - c_6 c_4 \sin(\gamma_4 + \gamma_5) \ldots\ldots$$
$$\ldots \mp c_n c_4 \sin(\gamma_4 + \gamma_5 \ldots + \gamma_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ c_n c_{n-1} \sin\gamma_{n-1}.$$

Aufgabe 2. (§. 383. ister Fall.) *In dem* n *Eck* $C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten bis auf drei an einander liegende Winkel* γ_n, γ_1 *und* γ_2 *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. α) Man findet aus den gegebenen Seiten $c_3, c_4, c_5 \ldots c_n$ und den Winkeln $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$

$\gamma_5 \ldots \gamma_{n-1}$, die sie einschliefsen, den Inhalt der Figur $C_2C_3C_4 \ldots C_n$ nach der ersten Aufgabe, nemlich:

$$21. \quad 2F_{3,n} = c_4c_3\sin(c_4c_3) + c_5c_3\sin(c_5c_3) \ldots + c_nc_3\sin(c_nc_3)$$
$$+ c_5c_4\sin(c_5c_4) + c_6c_4\sin(c_6c_4) \ldots + c_nc_4\sin(c_nc_4)$$
$$+ c_6c_5\sin(c_6c_5) + c_7c_5\sin(c_7c_5) \ldots + c_nc_5\sin(c_nc_5)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ c_nc_{n-1}\sin(c_nc_{n-1}).$$

Es fehlt an dem Inhalt der ganzen Figur $F_{2,n}$ nur noch der Inhalt des Dreiecks $C_1C_2C_n$. Für dieses Dreieck findet man die Seite $C_2C_n = z_{3,n}$, nach (§. 376. 1.), aus den gegebenen Seiten und Winkeln des Vielecks, nemlich:

$$22. \quad z_{3,n}^2$$
$$= c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 \ldots + c_n^2$$
$$- 2c_4c_3\cos(c_4c_3) - 2c_5c_3\cos(c_5c_3) \ldots - 2c_nc_3\cos(c_nc_3)$$
$$- 2c_5c_4\cos(c_5c_4) - 2c_6c_4\cos(c_6c_4) \ldots - 2c_nc_4\cos(c_nc_4)$$
$$- 2c_6c_5\cos(c_6c_5) - 2c_7c_5\cos(c_7c_5) \ldots - 2c_nc_5\cos(c_nc_5)$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$- 2c_nc_{n-1}\cos(c_nc_{n-1}).$$

Da nun die andern beiden Seiten c_1 und c_2 des Dreiecks gegeben sind, so kennt man alle drei Seiten desselben und kann folglich seinen Inhalt nach (§. 174.) berechnen. Addirt man den Inhalt dieses Dreiecks $C_1C_2C_n$ zu $F_{3,n}$ (19.), so erhält man den Inhalt der ganzen Figur aus den Seiten und Winkeln, weniger den drei an einander liegenden Winkeln γ_n, γ_1 und γ_2.

β) Man kann auch erst nach (§. 376. 3.) einen der äufsern Winkel von den fehlenden dreien, z. B. den Winkel γ_2 suchen. Alsdann sind alle Winkel, bis auf die an einander liegenden beiden, γ_1 und γ_n bekannt: man findet folglich den Inhalt der ganzen Figur $F_{2,n}$ auf einmal; nach der ersten Aufgabe.

Aufgabe 3. (§. 383. 2ter Fall.) *In dem n Eck* $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten, bis auf die beiden an einander liegenden Winkel* γ_n *und* γ_1 *und einen dritten, davon abgesonderten Winkel* γ_m, *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. α) Gesetzt der dritte fehlende Winkel γ_m sey der Winkel γ_5, so sind in der Figur $C_1C_2C_3C_4C_5$ die Seiten c_2, c_3, c_4, c_5, nebst den Winkeln γ_2, γ_3 und γ_4, die sie einschliefsen, und in der Figur $C_5C_6C_7C_n$ die Seiten c_6, c_7 und c_n, nebst den Winkeln γ_6 und γ_7, die sie einschliefsen, gegeben. Also

läſst sich der Inhalt dieser beiden Figuren nach der ersten Aufgabe finden. Er ist

$$23. \quad F_{2,m} + F_{m,n}.$$

An der ganzen Figur fehlt nur noch das Dreieck $C_1 C_m C_n$. Für dieses findet man aus (§. 380. 1.) die beiden Seiten

$$24. \quad C_1 C_m = z_{2,m} \text{ und } C_m C_n = z_{m,n}.$$

Die dritte Seite c_1 ist gegeben; also läſst sich der Inhalt des Dreiecks nach (§. 174.) finden. Addirt man denselben zu $F_{2,m} + F_{m,n}$, so erhält man den verlangten Inhalt der ganzen Figur, aus den gegebenen Stücken.

β) Man kann auch erst nach (§. 376. 6.) den getrennten Winkel γ_m suchen. Alsdann sind alle Winkel, bis auf die an einander liegenden beiden γ_1 und γ_n, bekannt, und man findet folglich den Inhalt der ganzen Figur $F_{2,n}$ auf einmal; nach der ersten Aufgabe.

Aufgabe 4. (§. 383. 3ter Fall.) *In dem n Eck* $C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten bis auf die drei von einander getrennten Winkel* γ_p, γ_m *und* γ_n *gegeben. Man verlangt den Inhalt* der Figur.

Auflösung. α) Gesetzt der fehlende Winkel γ_p sey der Winkel γ_3 und γ_m der Winkel γ_5, so sind in der Figur $C_n C_1 C_2 C_3$ die Seiten c_1, c_2, c_3, nebst den Winkeln γ_1, γ_2, welche sie einschlieſsen, in der Figur $C_5 C_6 C_7 C_n$ die Seiten c_6, c_7, c_n, nebst den Winkeln γ_6 und γ_7, welche sie einschlieſsen, und in der Figur $C_3 C_4 C_5$ die Seiten c_4, c_5, nebst dem Winkel γ_4, welchen sie einschlieſsen, gegeben. Also läſst sich der Inhalt dieser drei Figuren nach der ersten Aufgabe finden. Er ist

$$25. \quad F_{1,p} + F_{p+1,m} + F_{m+1,n}.$$

Nun fehlt an dem Inhalt der ganzen Figur noch der Inhalt des Dreiecks $C_3 C_5 C_n$ oder $C_p C_m C_n$. Die drei Seiten dieses Dreiecks findet man nach (§. 376. I.) aus den gegebenen Stücken der Figur, nämlich

$$26. \quad c_n c_p = z_{1,p}, \quad C_p C_m = z_{p+1,m} \text{ und } C_{m,n} = z_{m+1,n}.$$

Man kann also den Inhalt des fehlenden Dreiecks nach (§. 174.) aus seinen drei Seiten berechnen. Addirt man denselben zu (25.), so erhält man den Inhalt der ganzen Figur aus den gegebenen Stücken.

Man kann auch erst nach (§. 376. 7.) einen der drei fehlenden Winkel suchen, z. B. den Winkel γ_p. Alsdann fehlen nur noch die beiden Winkel γ_m und γ_n, und der Inhalt ist nach der ersten Aufgabe:

$$27. \quad F_{1,p} + F_{p+1,n}.$$

γ) Oder man kann nach (§. 376. 7.) erst zwei der fehlenden Winkel, z. B. die Winkel γ_p und γ_m, suchen;

Alsdann findet man den Inhalt der ganzen Figur $F_{2,n}$ nach der ersten Aufgabe, auf einmal.

Aufgabe 6. (§. 383. 5ter Fall.) *In dem n Eck* $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ (Fig. 172.) *sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel γ_n und γ_1, und bis auf die an dem einen dieser Winkel liegende Seite* c_2 *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. α) Man suche nach (§. 376. 8.) die fehlende Seite c_2, so sind alle Seiten, welche die gegebenen Winkel einschliefsen, bekannt, und man findet also den Inhalt der Figur $F_{2,n}$ nach der ersten Aufgabe.

β) Oder man suche nach (§. 376. 10.) den fehlenden Winkel γ_n. Alsdann fehlt nur noch die Seite c_2 und der Winkel γ_1 an derselben. Also findet man den Inhalt der Figur $F_{2,n}$ nunmehr nach der ersten Aufgabe.

Aufgabe 6. (§. 383. 6ter Fall.) *In dem n Eck* $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Winkel γ_n und γ_1 und eine davon getrennte Seite* c_m *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. Man suche nach (§. 376. 12.) die fehlende getrennte Seite, so sind alsdann alle Seiten, welche die gegebenen Winkel einschliefsen, bekannt. Also findet man nunmehr den Inhalt der Figur $F_{2,n}$ nach der ersten Aufgabe.

Aufgabe 7. (§. 383. 7ter Fall.) *In dem n Eck* $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Winkel γ_1 und γ_m und die eine Seite* c_1 *an dem einen Winkel gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. α) Der fehlende Winkel γ_m sey z. B. der Winkel γ_5, so ist der Inhalt der Figur $C_1C_2C_3 \ldots C_5$ nach der ersten Aufgabe gleich $F_{2,m}$ und der Inhalt der Figur $C_5C_6 \ldots C_n$ gleich $F_{m+1,n}$, ihre Summe also

$$28. \quad F_{2,m} + F_{m+1,n}.$$

An der ganzen Figur fehlt nur noch das Dreieck $C_1C_mC_n$. Man suche in der Figur $C_5C_6 \ldots C_n$, deren Seiten und Winkel bis auf die Seite C_5C_n und die beiden an derselben liegenden Winkel bekannt sind, nach (§. 376. 2.), den Winkel $C_5C_nC_7$, so findet man, wenn man diesen Winkel von γ_n abzieht, den Dreiecks-Winkel $C_5C_nC_1$.

Ferner ist in dem Dreieck $C_1C_mC_n$ die Seite $C_mC_1 = z_{2,m}$ und die Seite $C_mC_n = z_{m+1,n}$. Also kennt man die

beiden Seiten C_mC_1 und C_mC_n und den Winkel $C_mC_nC_1$ dieses Dreiecks, und kann also nach (§. 364. II.) seinen Inhalt finden. Denselben zu (28.) gethan, giebt den Inhalt der ganzen Figur.

β) Oder man sucht nach (§. 376. 13.) erst die fehlende Seite c_1 aus den gegebenen Stücken. Alsdann sind alle Seiten, welche gegebene Winkel einschliefsen, bekannt; folglich ist alsdann der Inhalt, nach der ersten Aufgabe,

$$29.\quad F_{2,m} + F_{m+1,n,1}.$$

γ) Oder man sucht nach (§. 376. 15.) erst den getrennten Winkel γ_m aus den gegebenen Stücken. Alsdann sind alle Winkel, welche von den gegebenen Seiten eingeschlossen werden, bekannt. Also findet man alsdann den Inhalt der ganzen Figur $F_{2,n}$ nach der ersten Aufgabe auf einmal.

Aufgabe 8. (§. 383. 8ter Fall.) *In dem* n *Eck* $C_1C_2C_3\ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Winkel* γ_1 *und* γ_m *und eine abgesonderte Seite* c_p *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. Man suche erst nach (§. 376. 16.) den einen fehlenden Winkel. Zieht man ihn und sämmtliche gegebene Winkel von $(n-2)2\varrho$ ab, so findet man auch den andern fehlenden Winkel; also sind alsdann alle Winkel, welche von den gegebenen Seiten eingeschlossen werden, bekannt. Folglich findet man alsdann den Inhalt der Figur nach der ersten Aufgabe.

Aufgabe 9. (§. 383. 9ter Fall.) *In dem* n *Eck* $C_1C_2C_3\ldots C_n$ (Fig. 178.) *sind die Winkel und Seiten bis auf die beiden an einander liegenden Seiten* c_1 *und* c_2 *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. Man suche die eine fehlende Seite, z. B. c_2 nach (§. 376. 18.), so fehlt nur noch die eine Seite c_1. Man findet also den Inhalt $F_{2,n}$ nach der ersten Aufgabe.

Da nach (§. 376. 18. Gleichung 91.)

$$30.\quad c_2 = p_{3,n}\cot\gamma_1 + q_{3,n},$$

und nach der ersten Aufgabe (Gleichung 19.)

$$31.\quad F_{2,n} = c_2 p_{3,n} + c_3 p_{4,n} + c_4 p_{5,n} \ldots c_{n-1} p_{n,n},$$

so erhält man, wenn man den Werth von c_2 aus (30.) in (31.) setzt,

$$32.\quad F_{2,n} = p_{3,n}^2\cot\gamma_1 + p_{3,n}q_{3,n} + c_3 p_{4,n} + c_4 p_{5,n} \ldots + c_{n-1}p_{n,n}$$

welches den Inhalt des Vielecks ohne Hülfe der beiden Seiten c_1 und c_2 giebt.

Aufgabe 10. (§. 383. 10ter Fall.) *In dem n Eck* (Fig. 178.) *sind die Winkel und die Seiten bis auf die beiden von einander getrennten Seiten* c_n *und* c_m *gegeben. Man verlangt den Inhalt der Figur.*

Auflösung. Man suche die eine fehlende Seite c_m nach (§. 376. 19.), so fehlt nur noch die eine Seite c_1. Man findet also den Inhalt der Figur $F_{1,n}$ nach der ersten Aufgabe.

385.

Anmerkung. Im Viereck, *der einfachsten Figur nächst dem Dreiecke, finden von den 10 Aufgaben für das beliebige Vieleck (§. 383. 384.) die 2te, 3te und 8te nicht Statt, weil drei Winkel im* Viereck *nicht von einander und eine Seite von zwei abgesonderten Winkeln nicht getrennt seyn können. Es bleiben also für das Viereck nur folgende Aufgaben.*

Den Inhalt eines Vierecks zu finden:

aus den Seiten und Winkeln

I. 1) *weniger drei Winkel;*

II. *weniger zwei Winkel und eine Seite, und zwar*

2) *die Winkel an einander, die Seite dazwischen;*

3) *die Winkel an einander, die Seite an dem einen Winkel;*

4) *die Winkel an einander, die Seite abgesondert;*

5) *die Winkel getrennt, die Seite an dem einen Winkel;*

III. *weniger zwei Seiten*

6) *an einander, oder*

7) *von einander getrennt.*

Die gegebenen Stücke sind die bestimmenden in (§. 76. und 77.).

Wir überlassen dem Leser, wie in (§. 377.), die allgemeinen Ausdrücke auf das Viereck anzuwenden, welches keine Schwierigkeit hat.

386.

Anmerkung. Die verschiedenen Ausdrücke des Inhalts eines beliebigen Vielecks durch die bestimmenden Stücke enthalten zugleich die Auflösung der verschiedenen Aufgaben: eines der bestimmenden Stücke zu finden, wenn der Inhalt und die übrigen bestimmenden Stücke gegeben sind, deren es, wie leicht zu sehen, eine Menge giebt. Man darf nur jedesmal aus demjenigen Ausdruck des Inhalts durch die

gegebenen und das eine fehlende bestimmende Stück, dieses letztere entwickeln.

Diese Aufgaben sind diejenigen von der sogenannten *Theilung der Figuren*, das heifst die Aufgaben: ein Stück von gegebenem Inhalt, von einer gegebenen Figur, unter diesen oder jeden Bedingungen abzuschneiden, oder auch: eine Figur von gegebenem Inhalt zu finden, wenn ihre bestimmenden Stücke, bis auf eines, gegeben sind.

Der Raum gestattet nicht, alle diese Aufgaben der Reihe nach durchzugehen. Es mögen hier nur folgende zwei stehen, welche am häufigsten vorkommen.

387.

Aufgabe 1. *Von einem gegebenen Vielecke, vermittelst einer graden Linie, deren Lage gegen die Seiten des Vielecks gegeben ist, ein Stück von gegebenem Inhalte abzuschneiden.*

Auflösung. Das gegebene Vieleck sey $C_2 C_4 C_5 \ldots$ $\ldots C_n$ (Fig. 179.). Der gegebene Inhalt des abzuschneidenden Stücks sey F. Die gesuchte Schnittlinie sey $C_1 C_2$, so dafs der Inhalt des Vielecks $C_2 C_3 C_4 \ldots : C_7 C_1 = F$ ist. Auch der Winkel $C_3 C_2 C_1$ oder $C_2 C_1 C_7$ ist alsdann gegeben, weil nach der Voraussetzung die Lage der Schnittlinie gegen die Seiten des Vielecks bekannt ist.

In so fern man nun etwa noch nicht weifs, durch welche Seiten des ganzen Vielecks die Schnittlinie gehen wird, berechne man zuvor die Inhalte der verschiedenen Vielecke $C_5 C_6 D_5$, $C_4 C_5 C_6 D_4$, $C_3 C_4 C_5 C_6 D_3$ etc., welche die, mit der gesuchten Schnittlinie parallel, durch die verschiedenen Ecken der gegebenen Figur gehenden graden Linien $C_5 D_5$, $C_4 D_4$, $C_3 D_3$ etc. von der ganzen Figur abschneiden, welches nach der 9ten Aufgabe in (§. 384.) geschehen kann, weil in allen den abgeschnittenen Vielecken die sämmtlichen Winkel und die Seiten, bis auf die beiden zusammenstofsenden Seiten $C_5 D_5$ und $D_5 C_6$, $C_4 D_4$ und $D_4 C_6$, $C_3 D_3$ und $D_3 C_6$ bekannt sind. Ist nicht etwa eines dieser abgeschnittenen Vielecke grade selbst so grofs als das Stück, welches von der Figur abgeschnitten werden soll, so liegt nothwendig die gesuchte Schnittlinie $C_8 C_1$ zwischen denjenigen auf einander folgenden zwei Parallelen, z. B. $C_7 D_7$ und $C_{11} D_{11}$, welche eine kleinere und eine gröfsere Fläche, als abgeschnitten werden soll, von der gegebenen Figur abtheilen. Man erfährt also nunmehr, durch

welche Seiten der gegebenen Figur die gesuchte Schnittlinie geht. Es kommt nur noch darauf an, eines der fehlenden bestimmenden Stücke des abgeschnittenen Vielecks, von der gegebenen Gröſse, $C_2C_3C_4 \ldots C_7C_1$ zu finden. In diesem Vieleck sind die Seiten und Winkel bis auf die drei Seiten C_3C_2, C_2C_1 und C_1C_7 bekannt, und auſserdem der Inhalt. Drückt man also diesen Inhalt durch die bestimmenden Stücke, und etwa ohne Hülfe der beiden zusammenstoſsenden Seiten C_2C_1 und C_1C_7, aber mit Hülfe der dritten fehlenden Seite C_3C_2 aus, welches nach der 9ten Aufgabe (§. 384.), und zwar durch die dortige Gleichung (32.), geschehen kann, so erhält man, weil der Inhalt gegeben ist, eine Gleichung, in welcher Alles gegeben ist, bis auf die eine Seite C_2C_3. Diese Seite C_2C_3 darf man also dann nur aus dieser Gleichung entwickeln. Ist sie gefunden, so ist es die gesuchte Schnittlinie C_2C_1 selbst, und die Aufgabe ist gelöset; denn alsdann kennt man in dem abgeschnittenen Vieleck $C_2C_3C_4 \ldots C_7C_1$ alle Seiten und Winkel, bis auf die zwei zusammenstoſsenden Seiten C_2C_1 und C_1C_7, wodurch das Vieleck vollkommen bestimmt wird (§. 95. IX.).

Aufgabe 2. Von einem gegebenen Vieleck, vermittelst zweier, in einem gegebenen Punct, unter einem gegebenen Winkel zusammenstoſsender grader Linien eine Fläche von gegebenem Inhalt abzuschneiden.

Auflösung. α) Der Punct, in welchen die gesuchten Schnittlinien PC_1 und PC_2 (Fig. 179.), unter einem gegebenen Winkel $C_2PC_1 = \lambda$ zusammenstoſsen, sey P. Sind nun z. B. $C_3C_4C_5C_6C_7PC_3$ und $C_{12}C_3C_4C_5C_6C_7C_8PC_{12}$ zwei Vielecke, deren erstes kleiner, das zweite gröſser ist als die abzuschneidende Fläche $C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_1PC_2$, während zugleich der Winkel C_3PC_7 im ersten Vieleck kleiner und der Winkel $C_{12}PC_8$ im zweiten gröſser ist, als der gegebene Winkel λ, so werden die Schnittlinien PC_1 und PC_2 nothwendig zwischen PC_3, PC_{12} und PC_7, PC_8 liegen, und folglich durch die Seiten $C_{12}C_3$ und C_7C_8 gehen.

β) Der Punct P kann auf verschiedene Weise gegeben seyn. Er sey durch die beiden graden Linien

$$1. \quad PC_3 = a \text{ und } PC_7 = b$$

gegeben, welche ihn, weil die Lage der Eckpuncte C_3 und C_7 des Vielecks gegeben ist, bestimmen. Alsdann sind auch die Winkel

2. $PC_3C_2 = \alpha$ und $PC_7C_1 = \beta$ und $C_2PC_1 = \delta$ bekannt. Nun sey ferner der unbekannte Winkel

3. $C_7PC_1 = \varphi$,

so ist der Winkel $C_3PC_2 = \lambda - \delta - \varphi$, und in dem Dreieck C_7PC_1,

$$\frac{b}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{c}{\sin\varphi},$$

in dem Dreieck C_3PC_2

$$\frac{a}{\sin(\alpha + \lambda - \delta - \varphi)} = \frac{c_3}{\sin(\lambda - \delta - \varphi)}.$$

Daraus folgt

$$3.\quad b = c_1 \frac{\sin\beta\cos\varphi + \cos\beta\sin\varphi}{\sin\varphi} = c_1(\sin\beta\cot\varphi + \cos\beta)$$

und

$$a = c_3 \frac{\sin(\alpha + \lambda - \delta)\cos\varphi - \cos(\alpha + \lambda - \delta)\sin\varphi}{\sin(\lambda - \delta)\cos\varphi - \cos(\lambda - \delta)\sin\varphi}, \text{ oder}$$

$$4.\quad a = c_3 \frac{\sin(\alpha + \lambda - \delta)\cot\varphi - \cos(\alpha + \lambda - \delta)}{\sin(\lambda - \delta)\cot\varphi - \cos(\lambda - \delta)}.$$

Aus (3.) folgt

$$5.\quad \cot\varphi = \frac{b - c_1\cos\beta}{c_1\sin\beta};$$

aus (4.) folgt

$$(a\sin(\lambda - \delta) - c_3\sin(\alpha + \lambda + \delta))\cot\varphi$$
$$= a\cos(\lambda - \delta) - c_3\cos(\alpha + \lambda - \delta); \text{ also}$$

$$6.\quad \cot\varphi = \frac{a\cos(\lambda - \delta) - c_3\cos(\alpha + \lambda - \delta)}{a\sin(\lambda - \delta) - c_3\sin(\alpha + \lambda - \delta)}.$$

Setzt man $\cot\varphi$ in (5. und 6.) gleich, so erhält man

$$(b - c_1\cos\beta)(a\sin(\lambda - \delta) - c_3\sin(\alpha + \lambda - \delta))$$
$$= c_1\sin\beta(a\cos(\lambda - \delta) - c_3\cos(\alpha + \lambda - \delta)), \text{ oder}$$
$$ab\sin(\lambda - \delta) - bc_3\sin(\alpha + \lambda - \delta) - ac_1\cos\beta\sin(\lambda - \delta)$$
$$+ c_1c_3\cos\beta\sin(\alpha + \lambda - \delta)$$
$$= ac_1\sin\beta\cos(\lambda - \delta) - c_1c_3\sin\beta\cos(\alpha + \lambda - \delta), \text{ oder}$$
$$a[b\sin(\lambda - \delta) - c_1\sin(\beta + \lambda - \delta)]$$
$$= c_3[b\sin(\alpha + \lambda - \delta) - c_1\sin(\alpha + \beta + \lambda - \delta)]; \text{ also}$$

$$7.\quad c_3 = a\frac{b\sin(\lambda - \delta) - c_1\sin(\beta + \lambda - \delta)}{b\sin(\alpha + \lambda - \delta) - c_1\sin(\alpha + \beta + \lambda - \delta)}.$$

Dieses drückt die unbekannte Seite c_3 durch die unbekannte Seite c_1, übrigens aber durch lauter gegebene Größsen aus.

γ) Ferner ist in dem Dreieck C_7PC_1,

$$\frac{p}{\sin\beta} = \frac{c_1}{\sin\varphi}.$$

und in dem Dreiecke C_3PC_2,

$$\frac{q}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{\sin(\lambda-\delta-\varphi)}$$ woraus

$$8. \quad p = c_1 \frac{\sin\beta}{\sin\varphi} \text{ und } q = c_2 \frac{\sin\alpha}{\sin(\lambda-\delta-\varphi)}$$

folgt. Da man zu Folge (5. u. 7.) φ und c_2 durch c_1 und bekannte Gröfsen ausdrücken kann, so kann man auch p und q dadurch ausdrücken. Folglich können alle vier fehlenden Seiten c_1, c_2, p und q durch die eine fehlende Seite c_1 allein, und durch bekannte Gröfsen ausgedrückt werden.

δ) Sucht man nun nach der zweiten Aufgabe in (§. 384.) den Inhalt der abzuschneidenden Figur $C_2C_3C_4\ldots C_7C_1P$ aus den Seiten und Winkeln, mit Ausnahme der drei Winkel $C_3C_2P_1$, C_2PC_1 und PC_1C_7, so findet man, weil der Inhalt gegeben ist, eine Gleichung, in welcher alles bekannt ist, bis auf die Seite c_1, die man also daraus finden kann und dann weiter aus (5. und 7.) auch den Winkel φ und die Seite c_2, so dafs dadurch die Aufgabe gelöset ist.

ε) Kürzer noch ist es, wenn man erst den Inhalt der Figur $C_3C_4C_5\ldots C_7P$ berechnet und denselben von der abzuschneidenden Fläche F abzieht. Der Rest, welcher durch G bezeichnet werden mag, ist alsdann die Fläche der beiden Dreiecke C_3PC_2 und C_1PC_7. Diese Fläche ist

$$9. \quad G = ac_2 \sin\alpha + bc_1 \sin\beta.$$

Setzt man hierin den Ausdruck von c_2 durch c_1 (7.), so findet man

$$10. \quad G = a^2 \sin\alpha \frac{b\sin(\lambda-\delta) - c_1\sin(\beta+\lambda-\delta)}{b\sin(\alpha+\lambda-\delta) - c_1\sin(\alpha+\beta+\lambda-\delta)} + bc_1\sin\beta.$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung die Seite c_1, so ist die Aufgabe ebenfalls gelöset.

Anm. 1. Die Aufgabe: von einem gegebenen Vieleck, vermittelst einer graden Linie, die durch einen gegebenen Punct gehet, einen bestimmten Theil abzuschneiden, ist nur ein einzelner Fall der zweiten Aufgabe des gegenwärtigen Paragraphs, nemlich der Fall, wenn die beiden Schnittlinien C_1P und C_2P in einer und derselben graden Linie liegen und also der Winkel λ gleich 2ϱ ist. Es ist für diesen Fall in (10.)

$$11. \quad G = a^2 \sin\alpha \frac{c_1\sin(\beta-\delta) + b\sin\delta}{c_1\sin(\alpha+\beta-\delta) - b\sin(\alpha-\delta)} + bc_1\sin\beta.$$

Anm. 2. Die Aufgabe: von einem gegebenen Vieleck, vermittelst einer graden Linie durch einen gegebenen Punct, z. B. C_1, der in einer Seite des Vielecks liegt, einen bestimmten Theil abzuschneiden, ist ferner nur ein einzelner Fall von dem vorigen, nemlich der Fall, wenn $a = c_2$ und $\alpha = o$, oder auch das Dreieck C_1PC_2 gleich Null ist. Es ist also für diesen Fall blos

12. $G = bc_1 \sin\beta$ und folglich $c_1 = \frac{G}{b \sin\beta}$.

388.

Anmerkung. Nimmt man nicht blos die Seiten und die Winkel zwischen den Seiten, sondern auch vielleicht die Diagonalen und andere Linien von gegebener Lage zu bestimmenden Stücken eines Vielecks an, so entstehen noch eine Menge von Aufgaben über den Inhalt. Wir wollen von denselben folgender einen erwähnen.

389.

Aufgabe. Aus der Länge einer beliebigen graden Linie und den Winkeln zwischen ihr und den graden Linien aus den Endpuncten der gegebenen Linie nach den Ecken eines Vielecks den Inhalt des Vielecks zu finden.

Z. B. aus der Linie $AB = a$ (Fig. 180.) und den Winkeln $C_1AB = \alpha_1$, $C_1BA = \beta_1$, $C_2AB = \alpha_2$, $C_2BA = \beta_2$ etc. den Inhalt des Vielecks $C_1C_2C_3 \ldots$ zu finden.

Auflösung. Es sey C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 etc. auf AB senkrecht und

$$1. \begin{cases} AD_1 = p_1, & AD_2 = p_2, & AD_3 = p_3 \ldots, \\ C_1D_1 = q_1, & C_2D_2 = q_2, & C_3D_3 = q_3 \ldots, \end{cases}$$

so ist

$p_1 \tan\alpha_1 = (a - p_1) \tan\beta_1$, also

$p_1 (\tan\alpha_1 + \tan\beta_1) = a \tan\beta_1$, und folglich

$$2. \begin{cases} p_1 = a \frac{\tan\beta_1}{\tan\alpha_1 + \tan\beta_1}; \text{ und eben so} \\ p_2 = a \frac{\tan\beta_2}{\tan\alpha_2 + \tan\beta_2}, \\ p_3 = a \frac{\tan\beta_3}{\tan\alpha_3 + \tan\beta_3}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ferner ist $q_1 = p_1 \tan\alpha_1$; also

$$5. \begin{cases} q_1 = a \dfrac{\tan\alpha_1 \tan\beta_1}{\tan\alpha_1 + \tan\beta_1}, \\ q_2 = a \dfrac{\tan\alpha_2 \tan\beta_2}{\tan\alpha_2 + \tan\beta_2}, \\ q_3 = a \dfrac{\tan\alpha_3 \tan\beta_3}{\tan\alpha_3 + \tan\beta_3}, \end{cases}$$

etc.

Nun ist nach (§. 189.) der Inhalt des Vielecks, in p_1, p_2, p_3 .... und q_1, q_2, q_3 .... ausgedrückt,

$$4.\ \tfrac{1}{2}[(p_1 - p_3)q_2 + (p_2 - p_4)q_3 + (p_3 - p_5)q_4 \ldots], \text{ oder}$$

$$5.\ \tfrac{1}{2}[(q_3 - q_1)p_2 + (q_4 - q\ )p_3 + (q_5 - q_3)p_4 \ldots].$$

Setzt man hierin die obigen Ausdrücke von p_1, p_2, p_3 .... q_1, q_2, q_3 ...., so findet man den Inhalt des Vielecks durch die gegebenen Gröſsen a; α_1, α_2, α_3 .... β_1, β_2, β_3 ....

Anhang.

Auflösung einiger Aufgaben von Figuren in der Ebene, durch die grade Linie und den Kreis.

390.

Erläuterung. I. *Die Figuren wurden hier oben überall als* vorhanden, *oder* gegeben *betrachtet. Dieselben lassen sich auch wirklich keinesweges sinnlich darstellen. Denn die Zeichnungen, welche man auf dem Papiere erblickt, sind nicht die Figuren selbst, von welchen die Sätze handeln, sondern nur Bilder, die in der Einbildungskraft die Vorstellung der wirklichen Figuren erregen. Was auf dem Papiere Punct und Linie genannt wird, sind nicht Punct und Linie, sondern körperliche Räume. Der Punct und der Strich auf dem Papiere, oder auf sonst einer Tafel, sind entweder kleine Vertiefungen, oder es sind Körperchen, welche von dem zeichnenden Stifte oder Griffel auf dem Papiere zurück bleiben; auch ist die Oberfläche des Papiers oder der Tafel, worauf sich die Puncte und Striche befinden, keineswegs eben, sondern mehr oder weniger gekrümmt und uneben. Man kann also die wirklichen geometrischen Figuren, welche man untersuchen will, immmer nur blos* voraussetzen. *Die Sätze, welche von denselben bewiesen werden sollen, hängen aber auch von der sinnlichen Darstellung der Figuren, nicht etwa ab, weil sie sonst, da sich die Figuren nicht sinnlich darstellen lassen, gar nicht existiren würden. Kommt es auf die Darstellung der Bilder der Figuren an, so müssen vielmehr umgekehrt die Sätze von den wirklichen Figuren erst die Regeln dazu liefern, und nur was nach diesen Regeln zusammengesetzt ist, kann für Bilder der wirklichen Figuren gelten. Auch die* Möglichkeit *der vorausgesetzten Figuren hängt nicht von der Möglichkeit der Darstellung ihrer Bilder ab, sondern davon, dafs die Sätze, welche man von den vorausgesetzten Figuren findet, auf keine Widersprüche führen.*

Deshalb sind absichtlich alle Aufgaben von Darstellung der Bilder der Figuren *vermieden worden. Was bei dieser* Darstellung *Theil an den Gesetzen der Figuren hat, ist in die Sätze selbst, zu welchen es gehört, übertragen und die Figuren sind dagegen* vorausgesetzt *worden. Man gewinnt, wie es scheint, durch dieses Verfahren an Einheit der Methode und vermeidet die* Verwechselung der wirklichen Figuren mit ihren Bildern,

in welche die Lernenden leicht verfallen und welche sie verleitet, die blos näherungsweise Darstellung dessen, was nur in der Einbildungskraft existirt, für dieses selbst zu nehmen.

II. *Sobald indessen die Geometrie, so wie sie sich in der Einbildungskraft, als Wissenschaft reiner, auf Gegenstände innerer Anschauung sich beziehender Vernunftschlüsse, aus sich selbst entwikkelt hat, mit ihren Resultaten auf äussere Dinge angewendet werden soll, kommt es auf die Darstellung der Bilder ihrer Figuren an, für welche man auch wohl noch andere äussere sinnliche Gegenstände nimmt, die vielleicht noch weiter von den idealen Figuren abweichen.*

Diese Darstellung der Figuren ist, wenn man die Zahl zu Hülfe nimmt, das heisst, die Vielfachheit gleichartiger Raumgrössen durch die Zahl ausdrückt, ohne Einschränkung, wenigstens näherungsweise möglich, und die Schwierigkeit, diejenigen Maasse, welche zur Darstellung der Figuren nöthig sind, durch die Zahl auszudrücken, nimmt sogar verhältnissmässig ab, je mehr die Verwickelung der Gesetze des Gegenstandes zunimmt. Werden aber die Abmessungen einer Figur, nemlich die Längen der Linien und die Grössen der Winkel, von welchen die Ausdehnung der Figuren abhängt, durch Zahlen bestimmter Einheiten, und auf diese Weise die Verhältnisse der Theile der Figuren gegen einander ausgedrückt, so ist es nothwendig, dass man die Zahlen oder Mengen der Einheiten, die allerdings durch Rechnung, ohne Grenze genau gefunden werden können, auch mit der verlangten Genauigkeit in die Bilder der Figur übertragen könne, und dass man also eingetheilte Maassstäbe der Linien und Winkel verfertige, von welchen sich auch der kleinste, durch die Zahl ausgedrückte Bruchtheil der Einheit mit der verlangten Genauigkeit abnehmen lässt. Dieses hat aber öfters grosse Schwierigkeiten, und es giebt Fälle, wo sich die Bilder geometrischer Figuren, nach ihren Eigenschaften, viel genauer ohne Hülfe der Zahl als mit Hülfe derselben darstellen lassen. In andern Fällen, wo die Genauigkeit vielleicht grade nicht das Haupt-Erforderniss ist, lassen sich die Bilder der Figuren zuweilen wenigstens schneller darstellen, als wenn man die Rechnung zu Hülfe nimmt.

Wo es z. B. auf eine sehr grosse Genauigkeit ankommt, z. B. bei der Verfertigung physicalischer, geodätischer und astronomischer Instrumente, ist es in der Ausführung schon ungemein schwierig, blos das Bild einer graden Linie zu zeichnen; noch schwieriger ist es, wegen der ab- und zunehmenden Ausdehnung der Körper in verschiedenen Temperaturen, einen gradlinigen oder krummlinigen Maassstab in gleiche Theile zu theilen, von welchem man die berechneten, und durch die Zahl ausgedrückten Linien und Winkel des Bildes einer Figur abnehmen könnte. In andern Fällen, wo weniger Genauigkeit und nur eine verhältnissmässige Annäherung, dagegen aber eine schnelle Ausführung verlangt wird, z. B in der Perspective und den zeichnenden und bildenden Künsten, oder bei dem Formen der Stoffe zu diesem oder jenem Zweck, z. B. der Steine, des Holzes etc., etwa in der Baukunst, würde die Hülfe der Rechnung in vielen Fällen langwierig und um so unnützer seyn, da es doch vielleicht an Maassstäben fehlt, die genau berechneten Abmessungen der Figur mit eben der Genauigkeit zu übertragen.

In allen solchen Fällen also ist es von grossem Nutzen, und da wo selbst die Genauigkeit ohne Hülfe der Zahl grösser ist,

als mit ihrer Hülfe, z. B. bei der Verfertigung genauer Instrumente, sogar von der gröfsten Wichtigkeit, Mittel zu haben, die Bilder geometrischer Figuren ohne Hülfe der Zahl darzustellen.

Man mufs indessen, wie überall, auch hier in der Wahl der Mittel zum Zweck vorsichtig seyn, und nicht die Hülfe der Zahl etwa da verwerfen, wo die rechnende Methode wirklich nicht der Construction der Figuren-Bilder durch Zeichnung, welche man die graphische Methode nennen kann, eigenthümlicher Umstände wegen, nachsteht. Zieht man die graphische Methode der rechnenden etwa blos deshalb vor, weil es dem Ausführenden an Fertigkeit in der Rechnung fehlt, so geschieht solches leicht auf Kosten der Genauigkeit, und diese Wahl ist nicht gerechtfertigt. Es mag zwar allerdings leichter seyn, die Regeln der Zusammensetzung eines Figuren-Bildes ohne Rechnung, in das Gedächtnifs zu fassen, als die nöthige Fertigkeit in der zur genauen Construction der Figur dienenden Rechnung zu erwerben. Nimmt man aber blos auf eine solche Art von Erleichterung Rücksicht, so entgilt es der Zweck und man benutzt nicht die Hülfe der Mathematik, sondern man verschmäht oder vernachlässigt sie. Es kommt auf die Mittel der Ausführung an. Hat man Maafsstäbe, die genauer sind als man die einzelnen Linien und Winkel construiren kann, und man soll genau verfahren, so ist es besser, zu rechnen, und zwar um so mehr, weil die Fehler, welche man beim Zeichnen in den einzelnen Theilen macht, sich fortpflanzen und vervielfältigen, was beim Rechnen nicht der Fall ist. Dagegen da, wo entweder eine gröfsere Genauigkeit verlangt wird, als die Maafsstäbe gewähren, oder wo es auf Genauigkeit nicht ankömmt, ist es besser die Figuren, wo es angeht, ohne Hülfe der Rechnung zu construiren oder zu zeichnen. Man kann z. B. eine beliebige, von graden Linien umschlossene Figur in der Ebene in ein Rechteck oder in ein Quadrat von gleicher Gröfse verwandeln, oder die Figur in beliebige Theile theilen, ohne Rechnung. Kommt es aber, wie z. B. in der Feldmefskunst, auf Genauigkeit an, so verliert man daran, wenn man sich statt der Rechnung der zeichnenden Methode bedient. Ueberall, wo man auf dem Papiere mit Genauigkeit zeichnen soll, hat die rechnende Methode vor der graphischen, wegen der gröfsern Genauigkeit Vorzüge.

III. *Die graphische Methode, Figuren-Bilder darzustellen, ist besonders von den Alten, denen die Rechenkunst in ihrer jetzigen Ausdehnung und Geschmeidigkeit fehlte, cultivirt worden, und theils solcher classischen Vorbilder wegen, theils weil die Aufgabe in der That ein trefflicher Gegenstand für den geometrichen Scharfsinn ist, theils auch wegen ihres wirklichen grofsen unmittelbaren Nutzens in den oben erwähnten Fällen hat man den Gegenstand auch in neuer Zeit angelegentlich verfolgt. Eine Sammlung der Resultate dahin gehöriger Untersuchungen würde aber allein ein grofses Werk füllen. Die sogenannte beschreibende Geometrie (géometrie descriptive) würde sich unmittelbar daran anschliefsen. In keinem Fall, scheint es, gehören diese Untersuchungen in einen Lehrbegriff der Geometrie, oder, wenn man will, in eine Theorie der Geometrie, wie die gegenwärtige, die sich blos mit den idealen Vorstellungen der Figuren beschäftigt, sondern vielmehr zu den mannigfaltigen Anwendungen dieser Theorie auf sinnliche Gegenstände. Da indessen fast in allen Lehrbüchern mehr oder weniger Regeln der Figuren-Zeichnung angetroffen werden, so dürfen diesel-*

ben auch hier nicht ganz fehlen, sondern es müssen wenigstens die nothwendigsten ihren Platz finden.

IV. *Euclid verlangt in den Forderungen (postulatis)*, dafs man eine grade Linie ziehen und beliebig verlängern, und das man aus einem gegebenen Puncte, mit beliebigem Halbmesser, eine Kreislinie beschreiben könne. *Diese beiden Dinge sind die Elemente der beschreibenden Geometrie. Man kann mit Hülfe der graden Linie und des Kreises, zeichnend alle Aufgaben auflösen, welche rechnend die Auflösung von Gleichungen des ersten und zweiten Grades erfordern. Wegen der Schwierigkeit, das Bild einer graden Linie darzustellen, kann man auch blos* die einzige *Forderung machen:* eine Kreislinie *zu ziehen, was in der Ausführung wirklich am genauesten möglich ist, und es giebt sehr sinnreiche Auflösungen, einer Menge geometrischer Aufgaben,* blos durch den Kreis. *Wir wollen einige Aufgaben, sowohl durch die grade Linie und den Kreis, als durch den Kreis allein aufzulösen, zusammenstellen, müssen aber wegen der weitern Ausführung dieses Gegenstandes auf Werke verweisen, die sich damit insbesondre beschäftigen.*

391.

α) Eine grade Linie DE (Fig. 181.) *zu finden, die auf einer andern* BC, *durch einen gegebenen Punct* A *in derselben, senkrecht steht, mache man eine willkührliche Länge derselben* AB, *gleich* AC *und beschreibe aus* B *und* C, *mit einem willkührlichen Halbmesser* BD = DC, *der aber gröfser ist als* AB, *zwei Kreisbogen, die sich, z. B. in* D, *schneiden, so ist* DA, *durch* A, *auf* BAC *senkrecht.* Denn weil $AB = AC$, $BD = BC$ und $DA = DA$ ist, so ist $\triangle BAD = \triangle CAD$ und folglich $BAD = CAD = \varrho$.

Die Aufgabe wird durch den Kreis allein gelöst; denn man findet durch den Kreis allein einen zweiten Punct D des Perpendikels DAE.

β) Eine grade Linie DE (Fig. 181.) *zu finden, die auf einer andern, durch die beiden Puncte* B *und* C *gegebenen,* BC *senkrecht ist und sie halbirt, beschreibe man mit willkührlichen Halbmessern* BD = CD *und* BE = CE *Kreisbogen, die sich z. B. in* D *und* E *schneiden, so ist* DE *auf* BC *senkrecht und halbirt* BC. Denn wegen $BD = CD$, $BE = CE$ und $DE = DE$ ist, $\triangle DBE = \triangle DCE$, also $BDE = CDE$ und $BED = CED$, folglich, weil $BD = CD$, $DA = DA$ und $BE = EC$, $EA = EA$, $\triangle BDA = \triangle CDA$ und $\triangle BEA = \triangle CEA$ und mithin $BAD = CAD = \varrho$ und $BA = CA$. Die Auflösung geschiehet ebenfalls durch den Kreis allein.

γ) Auf eine gegebene grade Linie AB (Fig. 182.) *aus einem gegebenen Puncte* C, *aufserhalb derselben,* CD *auf* AB *senkrecht zu ziehen, nehme man, wenn die Linie* AB *nicht etwa durch zwei Puncte* A *und* B *gegeben ist, zwei solche Puncte willkührlich an und beschreibe mit* BD = BC *und* AD = AC, *aus* B *und* A *Kreisbogen, die sich z. B. in* C *und* D *schneiden, so ist* CD *auf* AB *senkrecht;* denn da $AC = AD$, $BC = BD$ und $AB = AB$, so ist $\triangle ACB = \triangle ADB$; folglich $CAE = DAE$ und $CBE = DBE$, also, weil $AC = AD$, $AE = AE$ und $BC = BD$, $BE = BE$ ist, $\triangle AEC = \triangle AED$ und $\triangle BEC = \triangle BED$, mithin $AEC = AED = \varrho$ und $BEC = BED = \varrho$. Die Auflösung geschieht wieder durch den Kreis allein.

δ) *Ein Perpendikel AD (Fig. 183.) auf eine gegebene grade Linie AB durch ihren Endpunct A zu ziehen.*

Ist blos die grade Linie AB *und der Punct* A *gegeben, so nehme man willkührlich* AE = EB, *ziehe mit beliebigem Halbmesser* AF = BF, *aus* A *und* B *Kreisbogen und durch ihren Durchschnitt* F *und den Punct* E *die grade* FE, *welche auf* AB *senkrecht steht*, weil $AF = BF$, $AE = BE$ und $EF = EF$, also $\triangle AEF = \triangle BEF$, und folglich $AEF = BEF = \varrho$ ist. *Ist dagegen auch der Punct* B *gegeben, so errichte man auf* AB, *nach* (2.), *ein Perpendikel* FE, *welches* AB *in* E *halbirt. Ferner ziehe man aus* E *den Halbkreis* ACB. *Durch den Punct* C, *wo derselbe das Perpendikel* FE *schneidet, und durch* B *ziehe man* BCD *grade, und mache* CD = CB, *so ist* DA *auf* AB *durch ihren Endpunct* A *senkrecht.* Denn wegen $EA = EC = EB$ und $AEC = BEC = \varrho$, ist $\triangle AEC = \triangle BEC$ und $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$; also $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varrho$, folglich auch $ACD = \varrho$, und weil $CD = CA = CB$, $\triangle DCA = \triangle ACB$, mithin $\nu = \beta$, folglich $\alpha + \nu$, oder $DAB = \varrho$.

Diese Auflösung geschieht durch die grade Linie und den Kreis zugleich. Will man sich des Kreises allein bedienen, so ziehe man aus A *und* B, *mit einem beliebigem Halbmesser* AF = BF, *der nicht kleiner als* ½AB, *also etwa gleich* AB, *oder gröſser als* AB *ist, oder* AB *nahe kommt, zwei Kreisbogen, die sich in* F *schneiden und aus* F *mit dem nemlichen Halbmesser den Kreis* BAHG *und mache in demselben die Sehnen* BI = HI = HG, *so ist* GA *auf* AB *senkrecht.* Denn wegen $FB = FI = FH = FG = BI = IH = HG$ sind die Dreiecke BFI, IFH und HFG gleichseitig und folglich ihre Winkel gleich ⅔ϱ; also $BFI + IFH + HFG = 2\varrho$; folglich ist BFG eine grade Linie und mithin $BIHG$ ein Halbkreis; also der Winkel BAG, oder BAD, da er im Umfange eines Halbkreises liegt, ein rechter. Nimmt man AF oder BF gleich AB, so fällt I in A.

392.

Eine Parallele mit einer gegebenen graden Linie AB (Fig. 184.) *durch einen gegebenen Punct* C *zu ziehen, beschreibe man,*

α) *im Fall die Linie* AB *durch zwei Puncte* A *und* B *gegeben ist, aus* C, *mit dem Halbmesser* CD = AB, *und aus* B, *mit dem Halbmesser* BD = CA, *Kreisbogen, die sich z. B. in* D *schneiden; so ist* CD *mit* AB *parallel;* denn wegen $CD = AB$, $BD = AC$ und $CB = CB$ ist $\triangle ACB = \triangle DBC$, also $ABC = DCB$ und folglich CD mit AB *parallel.*

β) *Ist die grade Linie* AB *selbst gegeben, so nehme man in derselben irgend einen Punct* B *an, beschreibe mit dem Halbmesser* CB, *aus* C *und* B *Kreisbogen* BF *und* CE *und mache die Sehne* BF *gleich der Sehne* CE, *so ist* CF *mit* AB *parallel;* denn wegen $CB = FC = AB$ und $CE = BF$, ist $\triangle CBF = \triangle CBE$, also $FCB = EBC$, folglich CF mit EB parallel.

Beide Auflösungen bedürfen blos des Kreises.

393.

α) *Eine grade Linie von gegebener Länge* BC (Fig. 185.) **zu halbiren** *errichte man, wenn man sich des Kreises und der graden Linie zugleich bedienen will, auf dieselbe ein Perpendikel* DE *nach* (2.). *Dasselbe halbirt* BC *in* A.

Will

Will man blos den Kreis gebrauchen, oder es sind blos die beiden Puncte B *und* C *gegeben, und man soll einen Punct* A *finden, der mit ihnen in grader Linie liegt und von* B *und* C *gleich entfernt ist, so beschreibe man mit dem Halbmesser* BC *aus* C *den Kreis* BFGH, *mache die Sehnen* BF, FG, GH *gleich* BC, *beschreibe aus* B *mit dem Halbmesser* BH *den Kreis* IHK, *mache die Sehnen* HI *und* HK *gleich* FH *und beschreibe mit dem Halbmesser* FH *aus* I *und* K *zwei Kreisbogen. Ihr Durchschnitt* A *liegt mit den gegebenen Puncten* B *und* C *in grader Linie, und ist von* B *und* C *gleich weit entfernt.* Denn wegen $BC = FC = GC = HC = BF = FG = GH$ ist $BCF = FCG = GCH = \frac{2}{3}\varrho$, also $BCF + FCG + GCH = 2\varrho$, folglich BCH eine grade Linie und $BFGH$ ein Halbkreis. Da ferner $IH = KH$ und $AI = BK$ ist, so ist BH auf IK senkrecht. (2) und da $AI = AK$ ist, so ist auch AH auf IK senkrecht; folglich liegt A in der graden Linie BCH. Nun ist, wegen $BI = BH$, $BIH = BHI$, und wegen $AI = HI$, $IAH = AHI = BHI$, also $IAH = BHI$; folglich sind die Dreiecke IBH und AIH, weil sie ausserdem den Winkel BHI gemein haben, ähnlich. Mithin ist $\frac{AH}{IH} = \frac{IH}{BH}$, oder $AH.BH = IH^2$, oder weil $IH = FH$ ist, $AH.BH = FH^2$. Aber $BFH = \varrho$, weil $BFGH$ ein Halbkreis ist. Also, nach dem Pythagorischen Lehrsatze, $FH^2 = BH^2 - BF^2$, oder weil $BH = 2BC$ und $BF = BC$, $FH^2 = 4BC^2 - BC^2 = 3BC^2$, also vorhin $AH.BH = 3BC^2$, oder weil $BH = 2BC$, $2BC.AH = 3BC^2$, oder wenn man mit BC dividirt, $2AH = 3BC$, oder weil $AH = AC + CH = AC + BC$, $2AC + 2BC = 3BC$, also $2AC = BC$, oder $AC = \frac{1}{2}BC$. Folglich liegt der Punct A mit B und C in grader Linie und ist von B und C gleich weit entfernt.

Es giebt auch noch andere Verfahren, die Länge einer graden Linie blos mit Hülfe des Kreises zu halbiren.

β) *Eine grade Linie* AB_n (Fig. 186.) *von gegebener Länge in eine beliebige Zahl* n *gleicher Theile zu theilen, ziehe man unter einem beliebigen Winkel* C_nAB_n *die grade Linie* AC_n *durch* A *und nehme eine beliebige Länge* $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4$ *etc., doch so, dass* AC_n *nicht viel grösser ist als* AB_n. *Zieht man alsdann, mit* C_nB_n *parallel, die graden Linien* C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3 *etc., so ist* $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 \ldots\ldots = \frac{1}{n}AB_n$. Denn wegen der Parallelen sind die Dreiecke AC_1B_1, AC_2B_2, AC_3B_3 ...... ähnlich. Da nun $AC_2 = 2AC_1$, $AC_3 = 3AC_1 \ldots$, $AC_n = n.AC_1$ ist, so ist $AB_2 = 2AB_1$, $AB_3 = 3AB_1 \ldots$ $AB_n = nAB_1$.

Will man sich blos des Kreises bedienen und AB (Fig. 187.) *ist die in* n *gleiche Theile zu theilende Entfernung, so beschreibe man aus* B *mit dem Halbmesser* AB *die Kreislinie* AHIC *und mache* AH = HI = IC = AB. *Das Nemliche thue man aus* C, *aus dem daraus entstehenden Punct* D, *aus* E *u. s. w.* n — 1 *mal wiederholt, bis man, z. B. nach* G *gelangt. Hierauf beschreibe man aus* A *und* G *mit dem nemlichen Halbmesser* AB *die Kreislinien* BK *und* FL, *und aus* A *und* G, *mit dem Halbmesser* AG, *die Kreislinien* GL *und* AK. *Ferner aus dem Durchschnittspuncte* K *der Kreislinien* BHK *und* AK, *mit dem Halbmesser* AK, *den Bogen* AM, *und endlich aus* G, *mit dem Halbmesser* KL, *den Bogen* PMN, *welcher den vorigen* AM *in* M *schneidet; so ist* AM *der nte Theil der gegebe-*

nen Linie AB. *Diesen nten Theil kann man, wie vorhin die Linie* AB, *vervielfältigen, so findet man auch die übrigen Theilungspuncte der gegebenen Entfernung* AB. Da nemlich $KL = GM$, $KM = AK = GL$ und $ML = ML$, so ist $\triangle LMG = \triangle KLM$, also $KLM = LMG$ und MG mit KL *parallel*. Da ferner $AK = LG$, $AL = KG$, $KL = KL$ und $AG = AG$, so ist $\triangle ALK = \triangle GKL$ und $\triangle AGK = \triangle GAL$, also $LKA = KLG$, $KAG = LGA$, und folglich $LKA + KAG = KLG + LGA = 2\varrho$; folglich auch AG mit KL parallel; mithin liegt M in der graden Linie AG. Nun sind die Dreiecke AKM und KGA gleichschenklig, über AM und AK, und haben den Winkel A gemein; also sind die beiden gleichen Winkel in dem einen so grofs als in dem andern; folglich sind die Dreiecke ähnlich und es sind $\frac{AK}{AM} = \frac{AG}{AK}$, oder weil $AK = AB$, $\frac{AB}{AM} = \frac{AG}{AB}$, folglich, weil $AG = n.AB$, auch $AB = n.AM$.

Die Verfahren passen natürlich auch für die Halbirung der gegebenen Entfernung (α.).

394.

α) *Einen Winkel* DEF (Fig. 188.) *zu beschreiben, der einem gegebenen Winkel* ACB *gleich ist, nehme man auf den Schenkeln des gegebenen Winkels beliebige Längen vom Scheitel ab, z. B* CA = CB, *mache auf der Linie* EF, *an welche der Winkel* DEF = ACB *gelegt werden soll*, EF = CB, *ziehe mit* DE = AC *aus* E, *und mit* DF = AB *aus* F *Kreisbogen, so geht der andere Schenkel* DE *eines dem Winkel* ACB *gleichen Winkels* DEF *durch den Durchschnittspunct* D *der beiden Kreisbogen.* Denn die drei Seiten der Dreiecke DEF und ACB sind alsdann gleich, folglich sind die Dreiecke, mithin die Winkel DEF und ACB gleich.

β) Winkel *zu zeichnen, die zwei-, drei-, viermal so grofs als ein gegebener Winkel* BAC = α (Fig. 189.) *ziehe man aus dem Scheitel des Winkels* A, *mit einem beliebigen Halbmesser* AB, *einen Bogen, der den einen Schenkel des Winkels in* B *schneidet, aus* B *mit dem nämlichen Halbmesser einen Bogen, der den andern Schenkel in* C *schneidet, aus* C *mit dem nemlichen Halbmesser einen Bogen, der den vorigen Schenkel in* D *schneidet und so abwechselnd weiter; so ist* CBD = 2α, DCE = 3α, EDF = 4α, FEG = 5α, GFC = 6α, FGQ = 7α, GHC = 8α, KIQ = 9α, LKC = 10α, *u. s. w., wo die zunehmenden Winkel auch in die Verlängerungen der Schenkel übergehen.* Wegen $BC = AB$ ist nemlich $BCA = BAC$, also der äufsere Winkel $CBD = 2BAC = 2\alpha$; wegen $DC = BC$ ist $CDB = CBD = 2\alpha$, also im Dreieck DCA der äufsere Winkel $DCE = CDA + DAC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$; eben so $EDF = 4\alpha$, $FEG = 5\alpha$, $GFP = 6\alpha$; ferner wegen $HG = FG$, $GHF = GFH = 2\varrho - 6\alpha$, also $AHG = 2\varrho - (2\varrho - 6\alpha) = 6\alpha$, und mithin im Dreieck AHG der äufsere Winkel $HGQ = 7\alpha$ u. s. w.

Man kann auch blos aus dem Scheitel A (Fig. 190.) *des gegebenen Winkels* BAC, *mit einem beliebigen Halbmesser* AB, *einen Kreis ziehen und die Sehnen,* CD, DE, EF *etc. gleich* BC *machen, so sind die Winkel* CAD, DAE, EAF *etc. alle einander und dem gegebenen Winkel* BAC *gleich, und folglich ist* BAD = 2BAC, BAE = 3BAC *u. s. w.*

γ) *Einen beliebigen* Kreisbogen AB (Fig. 191.) *zu halbiren, errichte man auf seine Sehne* AB *nach* (§. 391. β.) *ein Perpendi-*

kel DE, *welches sie halbirt. Dasselbe halbirt auch den Bogen* AB; *zufolge* (§. 253. I.).

Ist der M i t t e l p u n c t M *des Kreisbogens gegeben, so kann man den Bogen* AB *auch ohne Hülfe der graden Linie halbiren. Man beschreibe nemlich mit dem Halbmesser* AM = BM *des gegebenen Bogens* AB, *aus seinen Endpuncten* A *und* B, *die Bogen* GM *und* HM *und mache* MG = MH = AB, *ferner mit dem Halbmesser* HA = GB *aus* H *und* G *Bogen, die sich in* K *schneiden, endlich mit dem Halbmesser* MK *aus* G *und* H *Bogen, die sich in* F *schneiden, so liegt der Punct* F *in dem gegebenen Bogen* AB *und halbirt ihn*; denn die Dreiecke GAM, AMB und MBH sind gleich und gleichschenklig über GM, AB und MH; also ist $AGM = AMG = MAB = ABM = BMH = BHM$, folglich AB mit GM und HM parallel, also GMH eine grade Linie; desgleichen sind $ABMG$ und $ABHM$ gleiche Parallelogramme. In diesen Parallelogrammen ist zufolge (§. 129.) $AB^2 + BM^2 + MG^2 + GA^2 = AM^2 + GB^2$, oder weil $BM = GA = AM$ und $AB = MG$, $2MG^2 + AM^2 = GB^2$. Nun soll $GK = HK = GB$ seyn, also ist $GK^2 = HK^2 = 2MG^2 + MA^2$. Die Dreiecke KMG, KMH sind gleich, denn es ist $GK = HK$, $GM = HM$ und $KM = KM$. Also sind bei M rechte Winkel und es ist $MK^2 = GK^2 - GM^2$, also weil vorhin $GK^2 = 2MG^2 + AM^2$ war, $MK^2 = MG^2 + AM^2$. Ferner sind FG und FH beide gleich MK und also einander gleich, folglich ist auch $\triangle FMG = \triangle FMH$; denn es ist auch $GM = HM$ und $FM = FM$; mithin ist $FMG = FMH = \varrho$, also $FM^2 = FG^2 - GM^2$, folglich, weil vorhin $FG^2 = MK^2 = MG^2 + AM^2$ war, $FM^2 = AM^2$, oder $FM = AM$. Mithin liegt der Punct F in dem gegebenen Bogen AB, und da $FMG = FMH = \varrho$ und $AMG = BMH$ ist, so ist auch $FMA = FMB$ und folglich Bogen AF = Bogen BF; mithin halbirt der Punct F den Bogen AB.

δ) E i n e n g e g e b e n e n Winkel ACB (Fig. 192.) zu halbiren *und die Hälfte* abermals zu halbiren *u. s. w. ziehe man durch den einen Schenkel* AC *des Winkels, in beliebiger Entfernung von dem andern* BC, *mit diesem parallel, eine grade Linie* DF *und mache* DE = DC, *so ist* ECB = ½ACB. *Ferner mache man* EF = EC, *so ist* FCB = ½ECB *u. s. w.* Denn in dem gleichschenkligen Dreieck DCE ist $DCE = DEC$, also weil der äußere Winkel $PDC = DCE + DEC$, $DCE = \frac{1}{2}PDC$, und weil die Wechselswinkel PDC und DCB gleich sind, $DCE = \frac{1}{2}DCB$, also auch $ECB = \frac{1}{2}ACB$. Eben so ist in dem Winkel ECB, wenn $EF = EC$, $FCB = \frac{1}{2}ECB$ u. s. w.

ε) A n m e r k u n g. *In mehr als zwei gleiche Theile auf einmal läßt sich ein gegebener beliebiger Winkel blos durch die grade Linie und den Kreis, zeichnend nicht theilen; schon in drei Theile nicht.*

Diese Aufgabe ist, wie z. B. die von der Quadratur des Kreises, eine von denen, deren Auflösung nicht auf die Weise möglich ist, wie man es verlangt. Man kann d i e T h e i l u n g e i n e s W i n k e l s i n d r e i g l e i c h e T h e i l e *auf die Aufgabe bringen: an den zu theilen gegebenen Winkel* ACE (Fig. 193.) *ein Dreieck* ABC *mit willkührlichem Schenkel* AC *zu zeichnen, in welchem* BD = DC *ist, wann man* DC = AC *macht; denn wenn* BD = DC, *so ist* DBC = DCB, *also der äußere Winkel* ADC = 2B *und weil* DC = AC, *auch* DAC = 2B, *folglich in dem Dreieck* ABC *der äußere Winkel* ACE = BAC + ABC = 3B, *so daß also der Winkel* ABC = ⅓ACE

ist, wenn BD = DC = AC. *Allein das Dreieck* ACB *läſst sich durch die grade Linie und den Kreis allein nicht finden. Um so weniger läſst sich ein beliebiger Winkel, durch die grade Linie und den Kreis allein, in gleiche Theile theilen, deren Zahl eine gröſsere Primzahl als 3, oder eine Zahl ist, welche gröſsere Primzahlen als 2 zu Factoren hat. Dergleichen Auflösungen beruhen nicht mehr auf Gleichungen des zweiten, sondern auf Gleichungen des 3ten, 5ten, 7ten, 11ten Grades u. s. w. und erfordern, wenn sie durch Zeichnung geschehen sollen, nicht mehr blos den Kreis, sondern andere krumme Linien.*

395.

Der rechte Winkel dagegen, oder zwei oder vier rechte Winkel, also der Kreis-Umfang selbst, lassen sich, blos durch die grade Linie und den Kreis, nicht allein in zwei, sondern auch in mehrere gleiche Theile theilen, welches zugleich die Aufgabe ist: regelmäſsige Vielecke in und um einen Kreis zu beschreiben; denn die Seiten regelmäſsiger Veilecke im Kreise sind gleiche Theile des Umfanges, die Seiten regelmäſsiger Vielecke um den Kreis sind mit jenen parallel, und liegen gleichen Winkeln am Mittelpunct gegenüber. Diese Theilung des Kreis-Umfanges steht mit der Auflösung von Gleichungen mit zwei Gliedern in Verbindung, welche von jedem Grade möglich ist (Rechenkunst. §. 284.). Die Theilung des halben Umfanges in zwei, drei und fünf Theile, welche Zahlen die kleinsten Primzahlen sind, oder des ganzen Umfanges in vier sechs und zehn Theile, ist folgende.

α) *Den halben Kreis-Umfang* AIB (Fig. 194.) *in zwei gleiche Theile zu theilen errichte man, nach* (2.), *auf die Mitte des Durchmessers* AB *ein Perpendikel* IK, *so wird durch dasselbe der halbe Umfang in zwei, oder der ganze Umfang in vier gleiche Theile getheilt.*

Ohne Hülfe der graden Linie mache man AD = DE = EB = *dem Halbmesser* AC; *so daſs* ADEB *ein Halbkreis ist: ferner* AH = BH = AE = BD *und* AI = IB = HC, *so halbirt der Punct* I *den Halbkreis* AIB. Denn die Umfangs-Winkel im Halbkreise AEB und ADB sind rechte, und also ist z. B. $AE^2 = AB^2 - EB^2$, und weil $AB = 2AC$, $EB = AC$, $AE^2 = 4AC^2 - AC^2 = 3AC^2$. Also ist $AH^2 = BH^2 = AE^2 = 3AC^2$. Nun ist wegen $AH = BH$, $AC = BC$ und $HC = HC$, $\triangle ACH = \triangle BCH$, folglich $ACH = BCH = \varrho$, folglich $HC^2 = AH^2 - AC^2 = 3AC^2 - AC^2 = 2AC^2$; mithin ist $AI^2 = BI^2 = HC^2 = 2AC^2$. Wegen $AI = BI$, $AC = BC$ und $IC = IC$ ist $\triangle ACI = \triangle BCI$ und folglich $ACI = BCI = \varrho$, also $IC^2 = AI^2 - AC^2 = 2AC^2 - AC^2 = AC^2$ und folglich $IC = AC$. Mithin liegt I in dem Kreisumfange durch A und B, und da $AI = BI$ ist, so halbirt I den Halbkreis AIB.

Vier rechte Winkel werden durch den Durchmesser selbst halbirt und einen rechten Winkel halbirt man weiter, wenn man den Winkel ACI, *nach* (§. 394. δ.), *in zwei gleiche Theile theilt.*

β) *Den halben Kreisumfang* AIB (Fig. 194.) *in drei gleiche Theile zu theilen mache man* AD = DE = EB = *dem Halbmesser* AC, *so sind die Bogen* AD, DE, EB *Drittheile des halben Umfanges* ADEB *und also die Winkel* ACD, DCE *und* ECB *die dritten Theile von zwei rechten.* Denn die Dreiecke ACD, DCE und ECB sind gleichseitig und folglich ihre Winkel gleich $\frac{2}{3}\varrho$. Der dritte Theil von vier rechten Winkeln, oder vom

ganzen Umfange ist der zweifache Winkel ACE, und den dritten Theil vom rechten Winkel findet man, wenn man die Winkel ACD, DCE etc. nach (§. 394. δ.) halbirt.

γ) *Den halben Kreisumfang in fünf gleiche Theile zu theilen suche man nach* (α.) *die Hälfte des halben Umfanges, ziehe* DC (Fig. 195.), *halbire diese Linie nach* (§. 393. α.) *in* G, *ziehe* AG *und mache* FG = GC, *so ist* AF *die Sehne des fünften Theils des halben Umfanges, nemlich* AF = AI = IK = KL = LM = MB. Denn weil $ACG = \varrho$, so ist AC eine Tangente des mit dem Halbmesser GC aus G gezogenen Kreises FCH in C, also nach (§. 277.) $AC^2 = AF \cdot AH$, oder weil $FH = 2FG = 2GC = AC$, also $AH = AF + AC$, $AC^2 = AF(AF + AC) = AF^2 + AC \cdot AF$. Nun sey $MCB = \frac{2}{5}\varrho$, so ist $CMB + CBM = 2\varrho - \frac{2}{5}\varrho = \frac{8}{5}\varrho$, und weil das Dreieck MCB gleichschenklig ist, $CMB = CBM = \frac{4}{5}\varrho = 2MCB$. Es halbire PB den Winkel CBM, so ist $CBP = \frac{2}{5}\varrho$, also $CBP = PCB$, und folglich $PC = PB$, und da auch $PBM = \frac{2}{5}\varrho = MCB$ ist, so sind die Dreiecke PBM und MCB ähnlich, und folglich ist auch PBM gleichschenklig, mithin $PB = MB = PC$ und $\frac{MB}{PM} = \frac{MC}{MB}$, oder $MB^2 = MC \cdot PM$, oder weil $MP = MC - PC = MC - MB$ ist, $MB^2 = MC(MC - MB)$, oder auch weil $MC = AC$ ist, $MB^2 = AC(AC - MB)$, oder $AC^2 = MB^2 + AC \cdot MB$. Oben war $AC^2 = AF^2 + AC \cdot AF$. Zieht man eines vom andern ab, so erhält man $0 = MB^2 - AF^2 + AC(MB - AF)$, oder $0 = (MB - AF)(MB + AF + AC)$, woraus $MB - AF = 0$, also $MB = AF$ folgt, so dass also $MCB = \frac{2}{5}\varrho$ ist, wenn man $MB = AF$ macht.

Will man sich blos des Kreises bedienen, so halbire man nach (α.) *den halben Umfang* ATB (Fig. 195.) *in* T *und mache* TN = TQ = *dem Halbmesser* AC, *ferner* AR = BR = DN = DQ *und* QS = NS = CR, *so ist* CS *gleich der Sehne* AI *von* $\frac{1}{5}$ *des halben und* AS = BS *gleich der Sehne* AK *von* $\frac{1}{5}$ *des ganzen Umfanges;* denn die Umfangswinkel $DNT = DQT$ sind rechte, also ist $DN^2 = DT^2 - NT^2 = 4AC^2 - AC^2 = 3AC^2$, folglich $AR^2 = BR^2 = 3AC^2$. Da nun $AC = CB$, $AR = BR$ und $CR = CR$, so ist $\triangle ACR = \triangle BCR$ und $ACR = BCR = \varrho$, also $CR^2 = AR^2 - AC^2 = 3AC^2 - AC^2 = 2AC^2$, folglich auch $NS^2 = QS^2 = 2AC^2$. Nun ist $NC = NT$, $QC = QT$ und $NQ = NQ$, also $\triangle NCQ = \triangle NTQ$ und $CNZ = TNZ$. Aber $NC = NT$, $NZ = NZ$, also $\triangle CNZ = \triangle TNZ$, folglich $CZN = TZN = \varrho$ und $CZ = TZ = \frac{1}{2}CT = \frac{1}{2}AC$; folglich $NZ^2 = NC^2 - CZ^2 = AC^2 - \frac{1}{4}AC^2 = \frac{3}{4}AC^2$. Da $NS = QS$ war, so liegt S in dem Perpendikel auf die Mitte von NQ, und folglich mit CZ in grader Linie. Nun war $NS^2 = 2AC^2$, folglich ist, weil bei Z rechte Winkel sind, $SZ^2 = NS^2 - NZ^2 = 2AC^2 - \frac{3}{4}AC^2 = \frac{5}{4}AC^2$, oder $SZ = \frac{1}{2}ACS\sqrt{5}$. Daraus folgt, weil $CZ = TZ = \frac{1}{2}AC$, $SC = \frac{1}{2}AC\sqrt{5} - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC(\sqrt{5} - 1)$ und ST, oder $SC + AC = \frac{1}{2}AC\sqrt{5} + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AC(\sqrt{5} + 1)$. Also $SC(SC + AC) = \frac{1}{4}AC^2(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{4}AC^2(5 - 1) = AC^2$. Hieraus folgt, dass SC die Sehne vom fünften Theile des halben Umfanges ist. Denn weiter oben war dieselbe gleich $AF = MB$, und es war $AC^2 = AF^2 + AC \cdot AF$. Zieht man davon das vorige $AC^2 = SC^2 + AC \cdot SC$ ab, so findet man $0 = AF^2 - SC^2 + AC(AF - SC) = (AF - SC)(AF + SC + AC)$, woraus $AF - SC = 0$, also $SC = AF = MB$ folgt; so dass also, wie behauptet, CS die Sehne von $\frac{1}{5}$ des halben Umfanges ist.

Nach (§. 137.) ist das Quadrat der Seite des regelmäſsigen 5 Ecks gleich der Summe der Quadrate der Seiten des regelmäſsigen 6 Ecks und des regelmäſsigen 10 Ecks. Nun ist die Seite des regelmäſsigen 6 Ecks der Halbmesser *AC*, und, wie vorhin gefunden, *CS* die Seite des regelmäſsigen 10 Ecks: also ist die Seite des regelmäſsigen 5 Ecks gleich $\sqrt{(CS^2 + AC^2)}$, und dieses ist, weil bei *C* rechte Winkel sind, gleich *AS*. Also ist *AS* die Sehne von $\frac{1}{5}$ des ganzen Umfanges.

δ) Da man nach (8.) einen beliebigen Kreisbogen durch die grade Linie und den Kreis *halbiren* kann, so kann man ferner den Umfang, vermittelst seiner Hälfte, seines Drittheils und Fünftheils, in 4, 8, 16, 32.... in 6, 12, 24, 48.... und in 10, 20, 40, 80.... überhaupt in 2^n, in 3.2^n und in 5.2^n Theile theilen; und da $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, so kann man auch, vermittelst des Unterschiedes von $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ des Umfanges, $\frac{2}{15}$ und $\frac{1}{15}$ des Umfanges finden, und folglich den Umfang auch in $3.5.2^n$ gleiche Theile theilen.

396.

α) *Den Mittelpunct einer gegebenen Kreislinie zu finden, ziehe man in derselben zwei beliebige, nicht parallele Sehnen* AB *und* CD (Fig. 196.) *und auf diese Sehnen nach* (391. β.) *Perpendikel* ME *und* MF, *welche sie halbiren. Der Durchschnittspunct* M *der Perpendikel ist der Mittelpunct der Kreislinie.* Denn die schrägen Linien aus allen Puncten des Perpendikels *ME* nach *A* und *B* sind gleich lang (§. 58.) und alle schräge Linien aus Puncten ausserhalb *ME*, nach *A* und *B*, sind ungleich lang (§. 63.); eben so die schrägen Linien aus allen Puncten in und ausserhalb des Perpendikels *MF*, nach *C* und *D*. Also kann der Mittelpunct der Kreislinie nur in den Perpendikeln *ME* und *MF* liegen. Folglich liegt er in ihrem Durchschnitt *M*.

β) *Nach derselben Regel kann man durch 3 gegebene Puncte, z. B.* A, B, G (Fig. 196.), *eine Kreislinie ziehen.* Denn die graden Linien *AB*, *BG* und *GA*, welche die gegebenen Puncte verbinden, sind Sehnen des gesuchten Kreises. Zieht man also auf zwei derselben Perpendikel, welche sie halbiren, so ist der Durchschnittspunct dieser Perpendikel der Mittelpunct einer Kreislinie, in welcher die gegebenen drei Puncte liegen.

γ) *Will man, um den Mittelpunct einer gegebenen Kreislinie zu finden, nicht, wie in* (α.), *die grade Linie zu Hülfe nehmen, so ziehe man aus einem beliebigen Puncte* A *der gegebenen Kreislinie* (Fig. 197.) *mit einem beliebigen Halbmesser* AB, *welcher kleiner ist als der Durchmesser der gegebenen Kreislinie, und gröſser als der vierte Theil derselben, eine Kreislinie* BCDE *und mache* BC = CD = DE = AB, *so daſs* BCDE *ein Halbkreis und* BAE *eine grade Linie ist. Wenn* F *der Punct ist, wo die Kreislinie* BCDE *die gegebene Kreislinie schneidet, so ziehe man mit dem Halbmesser,* FE *aus* E *und* A *Bogen, die sich in* G *schneiden, und aus* G, *mit dem nemlichen Halbmesser, einen Bogen, der die Kreislinie* BCDE *in* H *schneidet, endlich mit dem Halbmesser* BH *aus* A *und* B *Bogen, die sich in* M *schneiden. Der Durchschnitt* M *dieser Bogen ist der Mittelpunct der gegebenen Kreislinie.*

Denn wegen *GA* = *GE* = *GH* ist *GHA* = *GAH* und *GAE* = *GEA*; und wegen *HA* = *AE*, △*HGA* = △*AGE*, also *GAH* = *GEA*,

und weil der äufsere Winkel $GAB = GEA + AGE$ ist, $GAB = GAH + AGE$, folglich $HAB = AGE = HGA$. Nun ist $BA = HA$, eben wie $GA = GH$; also ist, nächst $HAB = HGA$, $\frac{BA}{HA} = \frac{GH}{GA}$; folglich sind die Dreiecke HAB und HGA ähnlich, und folglich ist $\frac{GA}{AH} = \frac{AH}{BH}$, oder weil $GA = FE$, $AH = AE$, $AH = BA$ und $BH = BM$ ist, $\frac{FE}{AE} = \frac{BA}{BM}$. Es ist aber $AE = AF$ und $BM = AM$. Also ist auch $\frac{FE}{AF} = \frac{BA}{AM}$. Folglich sind die gleichschenkligen Dreiecke FAE und BMA ähnlich und folglich ist $MAB = MBA = AFE = AEF$. Nun ist der äufsere Winkel $FAB = AFE + AEF = 2AFE = 2MAB$, also ist $MAF = MAB$. Da nun aufserdem $AB = AF$ und $MA = MA$ ist, so ist $\triangle MAB = \triangle MAF$, und folglich, weil $MB = MA$, $MF = MA$; also $MA = MB = MF$, woraus folgt dafs M der Mittelpunct des gegebenen Kreises BFA ist.

397.

α) *Nach einem und demselben Puncte einer gegebenen graden Linie* DE (Fig. 198.) *aus zwei gegebenen Puncten* A *und* B *grade Linien zu ziehen, die mit der gegebenen Linie gleiche Winkel* $ACD = BCE$ *machen, ziehe man aus einem der gegebenen Puncte, z. B.* A, *nach* (391. α.), *auf* DE *die senkrechte* AFG, *mache* FG = AF *und ziehe* GCB *grade, so sind* AC *und* BC *die verlangten Linien;* denn wegen $AF = FG$, $FC = FC$ und $AFC = GFC = \varrho$ ist $\triangle AFC = \triangle GFC$, also $GCF = ACF$, und weil die Scheitelwinkel GCF und BCE gleich sind, $ACD = BCE$.

β) *Um aus zwei gegebenen Puncten* A *und* B (Fig. 199.) *grade Linien* AC, CO, OP, PM, MB *zu ziehen, die mit gegebenen graden Linien* DE, EK, KQ, QB *gleiche Winkel* DCA = OCE, COE = POK, OPK = MPQ, PMQ = BMR *machen, ziehe man wieder, aus einem der beiden gegebenen Puncte, z. B.* A, *auf die erste gegebene grade Linie* DE, AFG *senkrecht, und mache* GF = AF; *ferner ziehe man aus* G *auf die verlängerte gegebene zweite grade Linie* EK, GIL *senkrecht und mache* IL = GI; *sodann aus* L *auf die verlängerte dritte gegebene grade Linie* KQ, LHN *senkrecht und mache* HN = LH; *eben so aus* N *auf die verlängerte vierte gegebene grade Linie* QR, NST *senkrecht und mache* ST = NS *u. s. w. Zieht man alsdann* FMB, NPM, LOP, GCO *und* AC *grade, so sind die Winkel* DCA = OCE, COE = POK, OPK = MPQ *und* PMQ = BMR; denn wegen $AF = FG$, $FC = FC$ und $AFC = GFC = \varrho$ ist, $\triangle AFC = \triangle GFC$, also $GCF = ACF$, und weil die Scheitelwinkel GCF und OCE gleich sind, $DCA = OCE$. Eben so ist, wegen $GI = LI$, $IO = IO$ und $GIO = LIO$ u. s. w.

398.

α) *Aus einem gegebenen Puncte* A (Fig. 200.) *an eine gegebene Kreislinie* DFE, *deren Mittelpunct* C *ist, Tangenten zu ziehen, halbire man nach* (§. 393. α.) AC *in* B *und*

ziehe aus B *mit dem Halbmesser* AB=BC *eine Kreislinie. In den Puncten* D *und* E, *in welchen dieselbe die gegebene Kreislinie schneidet, berühren grade Linien* AD *und* AE *aus* A *den gegebenen Kreis.* Denn *ADE* und *AEC* sind Umfangswinkel des Kreises *ADCE* über dem Durchmesser, und folglich rechte. Also stehen *AD* und *AE* auf den Endpuncten der Halbmesser *DC* und *EC* des gegebenen Kreises senkrecht und sind folglich Tangenten desselben (§. 260. I.), die durch den gegebenen Punct *A* gehen.

β) Grade Linien DEC, FGC, MN, PQ (Fig. 201.) *zu ziehen, die zwei gegebene Kreise zugleich berühren, ziehe man aus den Mittelpuncten der beiden Kreise* A *und* B *beliebige, mit einander parallele Halbmesser, sowohl auf einerlei Seite der graden Linie* ABC, *welche die Mittelpuncte verbindet, wie* AH, BI, *als auf verschiedenen Seiten derselben, wie* AK, BL. *Durch die Durchschnittspuncte* H, I, K, L *solcher Halbmesser und der beiden Kreislinien ziehe man grade Linien* HIC *und* KC_1L. *Wo dieselben die grade Linie* ABC *durch die Kreis-Mittelpuncte schneiden, nemlich in* C *und* C_1, *treffen auch die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise die grade Linie durch die Mittelpuncte. Man darf also nur aus* C *und* C_1, *nach* (α.), *an den einen Kreis Tangenten* CE, CG *und* C_1M, C_1P *ziehen, so berühren dieselben auch den andern Kreis.* Wenn nämlich *AH* und *BI* parallel sind, so sind die Dreiecke *CAH* und *CBI* ähnlich. Also ist $\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{BI}$, oder $\frac{AB+BC}{BC} = \frac{AH}{BI} = \frac{AB}{BC} + 1$. Nun sey *DE* eine Tangente der beiden Kreise, so sind *AD* und *BE* auf *DE* senkrecht (§. 260. III.) und folglich mit einander parallel. *X* sey der Punct, in welchem die Tangente *DE* die grade Linie *AB* durch die Mittelpuncte trifft, so sind die Dreiecke *DAX* und *EBX* ähnlich. Also ist $\frac{AX}{BX} = \frac{AD}{BE}$, oder $\frac{AB+BX}{BX} = \frac{AD}{BE} = \frac{AB}{BX} + 1$. Vorhin war $\frac{AH}{BI} = \frac{AB}{BC} + 1$, und die Halbmesser *AD*, *AH* und *BE*, *BI* sind gleich, so daſs $\frac{AD}{AE} = \frac{AH}{BI}$: also ist $\frac{AB}{BX} + 1 = \frac{AB}{BC} + 1$, oder $\frac{AB}{BX} = \frac{AB}{BC}$, woraus $BX = BC$ folgt. Also trifft die Tangente *DE* an beide Kreise, die grade Linie *AB* durch die Mittelpuncte in dem nämlichen Puncte, wie die grade Linie *HIC* durch die Endpuncte beliebiger mit einander parallelen Durchmesser *AH* und *BI*. Eben so verhält es sich mit den andern Tangenten der beiden Kreise.

399.

α) Zwei Kreislinien BFHA *und* BF_1H_1A (Fig. 202.) *zu finden, welche beide durch zwei gegebene Puncte* A *und* B *gehen und zugleich eine gegebene grade Linie* E_1DE *berühren, ziehe man die grade* ABDK; *mache* DK=DB, *halbire* AK *in* M, *ziehe aus* M, *mit dem Halbmesser* MA, *den Kreis* KGA, *errichte in* D *das Perpendikel* DG *auf* KA *und mache* FD $=F_1D$ = GD, *so berühren die gesuchten Kreise die gegebene grade Linie* E_1DE *in* F *und* F_1 *und gehen also durch die drei Puncte* A, B, F *und* A, B, F_1. *Man kann daher ihre Mittelpuncte* C *und* C_1

nach (§. 396.) *finden und alsdann die Kreise aus* C *und* C_1 *mit den Halbmessern* CA *und* C_1A *ziehen.* Weil nemlich DF und DF_1 Tangenten sind, so ist $DF^2 = DF_1^2 = DB.DA$ (§. 277.). Ferner sind in dem Kreise KGA die rechtwinkligen Dreiecke KDG und ADG ähnlich, weil der Umfangswinkel $KGA = \varrho$ und also $KGD = \varrho - DGA = GAD$ ist. Also ist $\frac{KD}{GD} = \frac{GD}{DA}$, oder $GD^2 = KD.DA$, oder weil $KD = DB$ war, $GD^2 = DB.DA$. Vorhin war $DF^2 = DF_1^2 = DB.DA$; also ist $DF = DF_1 = DG$.

β) Die Kreislinie ABF (Fig. 203.) *zu finden, welche durch einen gegebenen Punct* A *geht und zugleich eine gegebene grade Linie* DC *in einem gegebenen Punct* B *berührt, ziehe man die grade* AB, *halbire sie in* E, *ziehe in* E, EM *auf* AB, *und in* B, MB *auf* DC *senkrecht. Der Durchschnittspunct* M *von* ME *und* MB *ist der Mittelpunct des gesuchten Kreises* ABF. Denn weil $AEB = MEB = \varrho$ und $AE = BE$, $ME = ME$; so ist $\triangle AEM = \triangle BEM$ und folglich $AM = MB$. Der Kreis ABF, welcher durch A und B geht, berührt aber DC in B, weil zugleich MB, in B, auf DC senkrecht ist.

γ) Zwei Kreislinien AED *und* AIH (Fig. 204.) *zu ziehen, welche zwei gegebene grade Linien* BP *und* BQ *berühren und zugleich durch einen gegebenen Punct* A *gehen, der innerhalb des Winkels liegt, welchen die Linien einschliessen, halbire man den gegebenen Winkel* PBQ, *ziehe auf die halbirende Linie* BCC_1, *aus dem gegebenen Puncte* A, *die grade Linie* AFG *senkrecht, mache* GF = FA *und suche nach* (α.) *die beiden Kreise, welche durch die beiden Puncte* A *und* G *gehen und zugleich eine der beiden gegebenen graden Linien* BP *oder* BQ *berühren. Diese Kreise sind die verlangten und berühren auch die andere gegebene grade Linie.* Die Mittelpuncte aller, BP und BQ berührenden Kreise, also auch die Mittelpuncte der beiden gesuchten Kreise, liegen nämlich in der den Winkel PBQ halbirenden graden Linie BCC_1 (§. 266.). GFA ist also eine Sehne und BC ein Durchmesser: also steht GFA auf BC senkrecht und GF ist gleich FA (§. 253. VI.).

δ) Zwei Kreislinien zu finden, welche zwei gegebene grade Linien BDD_1 *und* BEE_1 (Fig. 205.) *und einen gegebenen Kreis* KRS *zugleich berühren, ziehe man mit den gegebenen graden Linien, in Entfernungen die dem Halbmesser* MK *des gegebenen Kreises gleich sind, Parallelen* FG, F_1G_1 *und* HI_1, F_1I_1, *und suche nach* (β.) *die Mittelpuncte der Kreise* PMQ, P_1MQ, *etc., welche die Parallelen* FG, HI *und* F_1G_1, F_1I_1 *berühren und zugleich durch den Mittelpunct* M *des gegebenen Kreises* KRS *gehen. Die nemlichen Mittelpuncte haben die gesuchten Kreise, welche* BD *und* BE *und den Kreis* KRS *berühren. Die gesuchten Kreise können dann aus diesen Mittelpuncten gezogen werden, wenn man die Halbmesser um* KM *kleiner nimmt.* Denn z. B. der gesuchte Kreis DKE berührt die gegebenen graden Linien BD und BE und den gegebenen Kreis KRS, wo auch der Mittelpunct M des letztern, in einer mit der gesuchten concentrischen Kreislinie PMQ, liegen mag, also auch dann, wenn M in den Parallelen FG oder HI, also in den Puncten P und Q liegt, in welchen die Kreislinie PMQ die Parallelen FG und HI berührt. Eine Kreislinie PMQ, welche diese Parallelen berührt und zugleich durch den Mit-

telpunct des gegebenen Kreises geht, hat also mit der gesuchten Kreislinie *DKE* den Mittelpunct gemeinschaftlich, und ihr Halbmesser ist um *KM* gröſser. Eben so verhält es sich mit den andern gesuchten Kreislinien. Liegt der Mittelpunct des gegebenen Kreises *M* innerhalb der Parallelen F_1G_1 und F_1I_1, so giebt es vier gesuchte Kreise; liegt *M*, wie in der Figur, zwischen zwei Parallelen, so giebt es ihrer nur zwei.

ε) *Eine Kreislinie zu ziehen, welche drei andere gegebene Kreislinien* UVW, *αβγ und δεφ* (Fig. 157.) *berühret, ziehe man, concentrisch mit den beiden gröſsern gegebenen Kreisen αβγ und δεφ, die Kreislinien* GHI *und* DEF, *deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises* UVW *kleiner sind. Ferner aus dem Mittelpuncte* A *des kleinsten Kreises, innerhalb, Tangenten* AK *und* AN *an die beiden andern Kreise* GHI *und* DEF. *Sodann mache man* $AC_1 = AC$, *ziehe* C_1C_2 *mit* KN *parallel, mache* $AC_3 = AC_2$, *ziehe* C_3C_4 *mit* KN *parallel, und mache* $AC_5 = AC_4$. *Auf gleiche Weise mache man* AT *gleich dem Halbmesser* CN, *ziehe* TT_1 *mit* KN *parallel, mache* $AT_2 = AT_1$ *und ziehe* T_2T_3 *mit* KN *parallel. Hierauf ziehe man mit dem Halbmesser* AT_3 *aus* C_5 *eine Kreislinie* F_2MF_3. *An diese Kreislinie und die gegebene Kreislinie* GHI *lege man die Tangente* MI, *und ziehe durch die Berührungspuncte* M *und* I *und durch* A, *die graden Linien* AI *und* AM. *Der Mittelpunct* X *eines Kreises* ADG, *welcher durch die beiden Puncte* G *und* D, *in welchen* AI *und* AM *die Kreise* GHI *und* DEF *schneiden, und durch den Punct* A *geht, ist zugleich der Mittelpunct des gesuchten Kreises* pqr, *welcher die drei gegebenen Kreise* UVW, *αβγ und δεφ, und zwar innerhalb, berührt. Den Kreis, welcher die gegebenen Kreise auſserhalb berührt, findet man durch ein gleiches Verfahren, wenn man damit anfängt, um* B *und* C, *concentrisch mit αβγ und δεφ, Kreise zu ziehen, deren Halbmesser um den Halbmesser des kleinsten Kreises gröſser sind, statt daſs sie vorhin um eben so viel kleiner waren.* Wenn nämlich *LF* und *IM* parallele Tangenten an den gegebenen Kreislinien *DEF* und *GHI* sind, so ist zu Folge (§. 290.) $\frac{AK^2}{AN^2} = \frac{AM}{AF}$. Nun war $AC_1 = AC$ und C_1C_2 mit *KN* parallel, so daſs die Dreiecke *KAN* und C_2AC_1 ähnlich sind: also ist $\frac{AK}{AN} = \frac{AC_2}{AC_1} = \frac{AC_2}{AC}$, also $AC_2 = \frac{AK}{AN} \cdot AC$. Ferner war $AC_3 = AC_2$ und C_3C_4 mit C_1C_2 parallel, so daſs die Dreiecke C_4AC_3 und C_2AC_1 ähnlich sind; also ist $\frac{AC_2}{AC_1} = \frac{AC_4}{AC_3}$, oder $\frac{AC_2}{AC} = \frac{AC_4}{AC_2}$, also $AC_4 = \frac{AC_2^2}{AC}$, folglich, weil $AC_2 = \frac{AK}{AN} \cdot AC$ war, $AC_4 = \frac{AK^2}{AN^2} \cdot AC$, oder $\frac{AC_4}{AC} = \frac{AK^2}{AN^2}$. Nun war $AC_5 = AC_4$, also ist $\frac{AC_5}{AC} = \frac{AK^2}{AN^2}$. Eben so ist, wenn man $AT = CN = CF$ macht, TT_1 mit *KN* parallel zieht, $AT_2 = AT_1$ macht und T_2T_3 mit *KN* parallel zieht, $\frac{AT_3}{AT} = \frac{AK^2}{AN^2}$; also, weil $AT = CF$ war, wenn man $C_5M = AT_3$ macht, $\frac{C_5M}{CF} = \frac{AK^2}{AN^2}$. Nun ist die grade Linie *MI* eine Tangente an den

Kreis um C_5 und an den gegebenen Kreis um B; sie steht also auf den Halbmessern BI und C_5M, durch die Berührungspuncte, senkrecht. Ist nun LF eine mit MI parallele Tangente an den gegebenen Kreis um C, so ist auch der Halbmesser CF auf KF senkrecht, folglich ist alsdann C_5M mit CF parallel. Da nun $\frac{C_5M}{CF}=\frac{AK^2}{AN^2}$ und $\frac{AC_5}{AC}=\frac{AK^2}{AN^2}$ war, also $\frac{C_5M}{CF}=\frac{AC_5}{AC}$ ist, so sind in den Dreiecken ACF und AC_5M, wegen der Parallelen C_5M und CF, die Winkel bei C und C_5 gleich, und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliefsen, Gleichvielfache; folglich sind die Dreiecke ähnlich und ihre Winkel bei A sind gleich, so dafs A, F und M in grader Linie liegen, und $\frac{AM}{AF}$ ist gleich $\frac{AC_5}{AC}$, gleich $\frac{AK^2}{AN^2}$. Da nun diejenigen parallelen Tangenten LF und IM an die beiden gegebenen Kreise um C und B, für welche $\frac{AM}{AF}=\frac{AK^2}{AN^2}$ ist, zu Folge des Satzes (§. 290.) die Eigenschaft haben, dafs ihre Berührungspuncte F und I mit den Berührungspuncten D und G des Kreises um X, welcher die mit den zwei gegebenen, concentrischen Kreise DEF und GHI berührt, und durch den Mittelpunct A des dritten geht, in grader Linie liegen, und jetzt F mit A und M in grader Linie liegt, so sind die Berührungspuncte D und G die Durchschnittspuncte der graden Linien AM und AI mit den Kreisen DEF und GHI und der Mittelpunct X des gesuchten, die drei gegebenen berührenden Kreises, ist der Mittelpunct eines Kreises PQR durch D, G und A.

400.

Wenn zwei Seiten AC *und* BC *eines Vierecks* ADCB (Fig. 206.), *ferner die Diagonal* AB *an diesen beiden Seiten, oder auch statt ihrer der Winkel* BCA, *welchen die beiden Seiten einschliefsen, desgleichen die beiden Winkel* ADC *und* BDC *an der andern Diagonal, den gegebenen Seiten gegenüber, gegeben sind, und man soll das Viereck finden, so zeichne man mit den gegebenen Stücken zuerst das Dreieck* ACB *und lege nach* (394. α.) *an die gegebenen Seiten* AC *und* BC *die gegebenen Winkel, ihnen gegenüber, nemlich* CAE = CDA *und* CBF = CDB, *suche darauf nach* (399. β.) *die Mittelpuncte der Kreise* P *und* Q, *welche* AE *und* BF *berühren und zugleich durch* A *und* C, B *und* C *gehen, nemlich dadurch, dafs man* AC *in* G, BC *in* H *halbirt und* GP *auf* AC, HQ *auf* BC, *desgleichen* PA *auf* EA, QB *auf* FB *senkrecht zieht, von welchen Perpendikeln die Durchschnitte* P *und* Q *die gesuchten Mittelpuncte geben, so ist der zweite Durchschnittspunct* D *dieser beiden Kreise die vierte Ecke des Vierecks, und das verlangte Viereck ist* ADBC. Denn jeder Winkel im Umfange des Kreises um P, über der Sehne AC ist dem Winkel CAE zwischen der Sehne und der Tangente AE gleich (§. 275. I.). Also ist auch $CDA = CAE$. Eben so ist $CDB = CBF$. Also haben die Winkel CDA und CDB mit dem gemeinschaftlichen Schenkel CD die verlangte Gröfse, und folglich ist $ADBC$ das gesuchte Viereck.

Durch Rechnung ist diese Aufgabe in (§. 380.) gelöset.

Fallen die Mittelpuncte der beiden Kreise, deren Durchschnitt den gesuchten Punct D giebt, zusammen, nemlich wenn das gesuchte

Viereck centrisch nach den Ecken ist, so läſst sich aus den gegebenen Stücken das gesuchte Viereck nicht finden. Man sehe auch (§. 380. Anm.).

401.

Wenn der Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so läſst sich zwar eine grade Linie, welche genau so lang ist als der Umfang des Kreises, weder durch Zeichnung finden, noch durch Zahlen und Brüche ausdrücken; dagegen aber kann man durch Zeichnung, auf mancherlei Art, grade Linien finden, deren Länge der Länge des Umfanges sehr nahe kommt.

α) *Eins der leichtesten Mittel ist, daſs man die Seite* AE = EF = FA (Fig. 207.) *des dem Kreise eingeschriebenen regelmäſsigen Dreiecks und die Seite des regelmäſsigen Vierecks* AB = BC = CD = DA = GF *in eine grade Linie* AFG *zusammengesetzt. Die Summe* AG *dieser Linien ist nur um etwa den 214ten Theil des Halbmessers von der Länge des halben Kreis-Umfangs verschieden.* Denn da der Umfangs-Winkel ABC ein rechter und $AB = BC$ ist, so ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$, also $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}4AM^2 = 2AM^2$ und $AB = FG = AM\sqrt{2}$. Da auch der Umfangs-Winkel AEC ein rechter ist, so ist AE^2 oder $EF^2 = AC^2 - EC^2 = 4AM^2 - EC^2$, und da $EC = AM$, $EF^2 = 4AM^2 - AM^2 = 3AM^2$, also $EF = AM\sqrt{3}$; folglich ist $FG = AM(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Nun ist $\sqrt{2} = 1{,}4142136$ und $\sqrt{3} = 1{,}7320508$; also $AG = 3{,}1462644\,AM$. Der halbe Umfang $ABEC$ ist gleich $\frac{1}{2}\pi . AM = 3{,}1415926\,AM$. Also ist AG nur um $0{,}0046718 . AM$, oder um etwa den 214ten Theil des Halbmessers von der Länge des halben Umfanges verschieden.

β) *Noch genauer und ebenfalls sehr leicht findet man eine grade Linie, die so lang ist als ein bestimmter Theil des Kreis-Umfanges, durch Zeichnung, auf folgende Weise. Man nehme, wie vorhin,* AH = HE = EC = *dem Halbmesser* AM, *beschreibe mit dem Halbmesser* AE = CH, *aus* A *und* C *Bogen, die sich in* I *schneiden und aus* H *mit dem Halbmesser* HI *einen Bogen* IK, *der den Kreis-Umfang in* K *schneidet, so kommt die Länge der Sehne* AK *der Länge des vierten Theils* AHB *vom Kreis-Umfange sehr nahe.* Die Länge der Sehne AK ist, wenn man den Halbmesser gleich 1 setzt, gleich 1,5711996, die Länge des vierten Theils vom Kreis-Umfange ist 1,5707663; also die Sehne nur um 0,0004333, oder um etwa $\frac{1}{2300}$ des Halbmessers länger. Man findet diese Zahlen, wenn man aus den beiden Seiten $AH = 1$ und $AI = AE = \sqrt{3}$ des Dreiecks HAI, nebst dem eingeschlossenen Winkel $HAI = HAM - IAM$, die Seite $HI = HK$ berechnet, und die zu der Summe der Winkel AMH und HMK gehörige Sehne AK nimmt.

402.

Zu finden, wie oft eine gegebene grade Linie AB (Fig. 208.) *in einer andern* CD *enthalten ist.*

Erste Art. Man versuche, wie oft sich AB = CE = EF *von der Linie* CD *wegnehmen läſst, bis ein Rest* FD *bleibt, der kleiner ist als* AB; *es geschehe z. B. 2mal. Hierauf versuche man, wie oft sich der Rest* FD = CG = GH, *umgekehrt von der Linie* AB = CE *wegnehmen läſst, bis ein Rest* HE *bleibt, der kleiner ist als* AB; *es geschehe wiederum 2mal. Man versuche, wie oft sich der*

neue Rest HE *von dem vorigen Rest* FD = CG *wegnehmen läſst, bis ein Rest* IG *bleibt, der kleiner ist als* HE*; es geschehe* 1*mal. Man versuche wie oft sich der neue Rest* IG *von dem vorigen Rest* HE = CI *wegnehmen läſst, bis ein Rest bleibt, der kleiner ist als* IG*, welches* 3*mal seyn mag; und so immer fort: so kann man, so genau als man will, finden, wie oft* AB *in* CD *enthalten ist.*

In dem Beispiel ist

$$CD = 2AB + FD$$
$$AB = 2FD + HE$$
$$FD = 1HE + IG$$
$$HE = 3IG + MI \text{ u. s. w.}$$

Ist der letzte Rest MI so klein, daſs man ihn weglassen kann, so findet man $IG = \frac{HE}{3}$, also $FD = HE + \frac{HE}{3} = HE\,(1 + \frac{1}{3})$ und $HE = FD.\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$, folglich $AB = 2FD + FD.\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = FD.\left(2 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)$, und $FD = AB.\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$, folglich $CD = 2AB + AB.\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ $= AB.\left(2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}\right)$. So findet man in Zahlen, durch einen Kettenbruch ausgedrückt, wie oft AB in CD enthalten ist. Man kann daraus, zufolge Rechenkunst (§. 171.), auch gewöhnliche Brüche in den kleinsten Zahlen, finden, die das nemliche audrücken.

Statt jedesmal den neuen Rest von dem vorigen wegzunehmen, kann man auch alle Reste von der ursprünglichen Linie wegnehmen, welches ebenfalls Brüche giebt, die das verlangte bezeichnen.

Zweite Art. Man theile die eine der beiden zu vergleichenden Linien z. B. CD (Fig. 208.) *in eine beliebige Zahl gleicher Theile, z. B. in* 10 *gleiche Theile, auch wohl den ersten oder letzten dieser Theile wiederum in eben so viele Theile, und so ferner, bis die Theile so klein sind, daſs sie sich nicht unmittelbar weiter theilen lassen. Gesetzt* CK = KG *etc.* (Fig. 209.) *sey einer der letzten oder kleinsten* 10 *Theile, so errichte man auf* CD *durch die Theilungs-Puncte, Perpendikel* CE, KF, GH *etc., ziehe mit* CD*, in beliebigen gleichen Entfernungen* CM = MN *etc. von einander, Parallelen* MM_1, NN_1 *etc. und verbinde die auf einander folgenden Theilungs-Puncte von* CD *und der äuſsersten Parallele* EL*, durch grade Linien* KE, GF *etc., so geben diese Linien* KE, GF *etc. noch sichtbare Unterabtheilungen des kleinsten Theils* CK *von* CD*, der sich an sich selbst nicht weiter theilen lieſs;* denn z. B. der Theil M_2M_3, welchen die Linie EK, mit FK, von der Linie MM_1 abschneidet, ist der 10te Theil von $CK = EF$, wenn EC durch die Parallelen in 10 gleiche Theile getheilt wird; N_2N_3 ist $\frac{2}{10}$ von CK; u. s. w.

Die mit CD parallel gemessenen Entfernungen von Puncten in den beiden Linien EK und FK, welche zwischen zwei auf einander folgenden Parallelen liegen, geben wiederum noch Theile von den Zehntheilen der Linie CK. Ist z. B. die gegebene Linie AB (Fig. 208.) gleich der mit CD parallelen Linie XY (Fig. 209.), und XS ist gleich $\frac{3}{10}RS$, so ist $AB = UD + SV + \frac{3}{10}(RW - SV) = 4CK + \frac{5}{10}CK + \frac{3}{100}CK = 4{,}53CK = 0{,}453\,CD$.

Theilt man, statt der gegebenen Linie *CD*, die Einheit des Längenmaafses so ein, wie *CD*, so heifst die Figur *verjüngter Maasstab*, und da man nun dadurch finden kann, wieviel Theile jede beliebige Linie von der Einheit des Maafses enthält, so kann man auch die Länge beliebiger Linien auf diese Weise mit einander vergleichen.

Dritte Art. Man theile die eine von den beiden gegebenen Linien, z. B. CD, *in eine beliebige Zahl gleicher Theile, z. B. in 10 Theile, wie* (Fig. 210.), *verlängere sie, mit gleicher Theilung, nach* DK, *und lege die andere Linie* AB *an die eingetheilte Linie, und zwar einen Endpunct der einen Linie an einen Endpunct der andern, z. B.* A *an* C. *Der andere Endpunct* B *von* AB *falle in* E, *so kommt es nur darauf an, die Länge* FE, *vom nächsten Theilungs-Punct* F *der Linie* CD, *bis an* E, *zu schätzen; denn* AB *ist gleich* $FE + CF = FE + \frac{5}{10}CD$. *Diesen Theil* FD *zu messen, theile man eine dritte Linie, welche so lang ist als eine beliebige Zahl von gleichen Theilen der Linie* CD, *z. B. die Linie* MN = CG, *welche 7 Zehntheile von* CD *enthält, in einen Theil mehr, oder in einen Theil weniger, also in 8, oder in 6 gleiche Theile. Man lege die dritte Linie, mit einem ihrer Endpuncte* M, *an den Punct* E *der Linie* CD. *Trifft alsdann irgend ein Theilungs-Punct der Li.* MN *grade mit irgend einem Theilungs-Puncte der Linie* CD, *oder ihrer Verlängerung zusammen, z. B.* P *mit* L, *so dafs* MP = EL, *so läfst sich die Länge* FE *bis auf Bruchtheile von* CD *schätzen, deren Nenner, wenn* CG *in* n *Theile und* MN = CG *in* n + 1 *Theile getheilt worden,* n(n + 1) *ist, also bis auf Theile die viel kleiner sind als die von* CD. Weil nemlich $MN = CG$ seyn soll, so gehen n Theile von CD auf $n+1$ Theile von MN; folglich enthält jeder Theil von CD, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ Theile von MN, und jeder Theil von CD ist also um $\frac{1}{n}$ eines Theils MQ von MN gröfser, als jeder Theil von MN. Fällt also z. B., wenn man M in E legt, P in L, so ist die Länge CD, von C an bis zum nächst vorhergehenden Theilungspunct D, um $DD_1 = \frac{1}{n} MQ$ kürzer als CD_1, die Länge CR um $RR_1 = \frac{2}{n} MQ$ kürzer als CR_1, die Länge CS um $SS_1 = \frac{3}{n} MQ$ kürzer als CS_1, die Länge CG um $GG_1 = \frac{4}{n} MQ$ kürzer als CG_1 die Länge CH um $HH_1 = \frac{5}{n} MQ$ kürzer als CH_1, und endlich die Länge CF um $FM = \frac{6}{n} MQ$ kürzer als die Länge CM; und da nun, nach der Voraussetzung M_1 in E fällt, so ist $FM_1 = FE$ und folglich das gesuchte $FE = \frac{6}{n} MQ$. Nun war $MQ = \frac{MN}{n+1}$, also ist $FE = \frac{6}{n(n+1)} MN$, so dafs man also FE bis auf $n(n+1)$ Theile des beliebigen Stücks MN von CD genau findet. Zu der dritten Hülfslinie MN kann man wieder die Einheit des Maafses nehmen, oder wenigstens CD in Theile theilen, die in der Einheit des Maafses aufgehen.

Besonders ist diese Art, kleinere Theile einer Länge zu messen, bei der Ausmessung von Kreisbogen oder Winkeln gewöhnlich. Wenn man z. B. 14½ Grade oder 29 halbe Grade in 30 Theile theilt und einen beweglichen Bogen macht, der mit den 30 Theilen an einen in Grade getheilten Rand oder Limbus eines Kreises hergeschoben werden kann, so läſst sich dadurch ein beliebiger Bogen bis auf den 29 × 30sten Theil von den 29 halben Graden oder bis auf den 30sten Theil von einem halben Grade, also bis auf eine Minute messen. Ein solcher Bogen heiſst, nach seinem Erfinder, Nonius oder Vernier.

403.

α) Ein Quadrat AC (Fig. 211.) *zu finden, welches so groſs ist als ein gegebenes* Rechteck AF, *setze man die eine Seite* AE *des Rechtecks, in grader Linie, an die andere anstoſsende Seite* AG, *nemlich in* AH, *halbire* HG *in* M, *ziehe den Halbkreis* HBG *und verlängere* AE *bis in* B, *an den Umfang des Kreises, so ist* AB *die Seite eines Quadrats* AC, *welches so groſs ist, als das gegebene Parallelogramm* AF. Denn die rechtwinkligen Dreiecke *HAB* und *BAG* sind ähnlich, weil $HBG = \varrho$, also $HBA = \varrho - ABG = AGB$ ist. Also ist $\frac{HA}{AB} = \frac{AB}{AG}$, und folglich $AB^2 = AH . AG = AE . AG$; und da nun AB^2 den Inhalt des Quadrats *AC*, *AE.AG* den Inhalt des Parallelogramms *AF* ausdrückt, so ist das Quadrat *AC* so groſs als das Parallelogramm *AF*.

β) Will man ein Quadrat *zeichnen, welches so groſs ist als ein beliebiges* Parallelogramm AK, *so darf man nur statt der Seite* AI *die Höhe* AE *des Parallelogramms an die Grundlinie setzen; das übrige Verfahren bleibt das nämliche.*

γ) Verlangt man ein Quadrat AC, *welches so groſs ist, als ein gegebenes* Dreieck ALG, *so setze man die halbe Höhe* PN = LP *des Dreiecks, in* AH, *an seine Grundlinie, und verfahre wie vorhin.* Denn das Dreieck *ALG* ist so groſs als das Rechteck *AF* von gleicher Grundlinie und der halben Höhe des Dreiecks.

δ) Verlangt man ein Quadrat, *welches so groſs ist als eine beliebige, von graden Linien umschlossene* Figur ABCDEFG (Fig. 212.), *so darf man nur erst ein Dreieck von gleicher Gröſse suchen. Man ziehe z. B.* AH *mit der Diagonal* GB *parallel und verlängere* BC *bis in* H; *so haben die Dreiecke* ABG *und* HBG *gleiche Grundlinien* GB, *und zwischen den Parallelen* AH *und* GB, *gleiche Höhe. Sie sind also gleich groſs, und folglich ist auch das Dreieck* GHC *so groſs als das Viereck* GABC. *Man ziehe* HI *mit der Diagonal* GC *parallel, so haben die Dreiecke* GHC *und* GIC *gleiche Grundlinien* GC, *und zwischen den Parallelen* HI *und* GC *gleiche Höhe und sind folglich gleich groſs. Mithin ist auch das Dreieck* GID *so groſs als das Viereck* GHCD, *und folglich so groſs als das Fünfeck* GABCD. *Fährt man so fort, so kann man ein Dreieck finden, welches so groſs ist als die gegebene vielseitige Figur* ABCDEFG. *Sucht man alsdann, nach (γ), ein Quadrat, welches so groſs ist als das Dreieck, so hat man auch ein Quadrat, welches so groſs ist als die gegebene Figur.*

Man nennt auch dergleichen Verfahren, Figuren zu zeichnen, welche so groſs sind als andere: die gegebenen Figuren verwandeln.

Die Verwandelung der Figuren durch Zeichnung, um etwa den Inhalt einer gegebenen Figur an der verwandelten einfacheren Figur leichter berechnen zu können, sind nie rathsam, weil man durch die verwickelte Zeichnung auf dem Papiere zu sehr an der Genauigkeit verliert; auch sind sie schwerlich jemals nöthig, weil zu der Berechnung des Inhalts einer gradlinigen Figur nur die ersten Elemente der Rechenkunst, nemlich das Multipliciren von ganzen Zahlen und Brüchen gehört. Es ist, um den Inhalt einer Figur zu finden, immer besser, dieselbe nach (§. 188.) in Dreiecke zu theilen, Grundlinien und Höhen der Dreiecke auf einem verjüngten Maafsstabe zu messen, und danach den Inhalt in Zahlen zu berechnen.

404.

α) Ein Quadrat zu finden, welches so grofs ist als zwei oder mehrere, beliebige andere Quadrate zusammengenommen, setze man erst auf die Seite AB *des einen Quadrats, rechtwinklig, und durch den Endpunct derselben, die Seite* BC *eines andern Quadrats, so ist die Hypothenuse* CA *des rechtwinkligen Dreiecks* ABC *die Seite eines Quadrats, welches so grofs ist als die Quadrate über* AB *und* BC *zusammengenommen. Denn es ist in dem rechtwinkligen Dreieck* ABC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. *Man setze von neuem die Seite eines dritten Quadrats* CD *rechtwinklig auf* CA, *so ist die Hypothenuse* AD *die Seite eines Quadrats, welches so grofs ist, als die Quadrate über* AC *und* CD, *und folglich so grofs, als die drei Quadrate über* AB, BC *und* CD *zusammengenommen u. s. w.*

β) Ganz auf dieselbe Weise kann man eine Figur finden, die so grofs als mehrere beliebige ähnliche Figuren zusammengenommen, und ihnen allen ähnlich ist. Denn der Inhalt ähnlicher Figuren und die Quadrate ihrer Seiten sind Gleichvielfache (§. 205.). Eine beliebige Seite derjenigen ähnlichen Figur, welche so grofs ist als alle die gegebenen ähnlichen Figuren zusammengenommen, wird also eben so gefunden, als wenn die Figuren blos Quadrate über diesen Seiten wären; folglich nach (α.).

γ) Wenn die Quadrate, oder die ähnlichen Figuren, deren Summe man in eine, ebenfalls ähnliche Figur zusammenziehen will, gleich grofs *sind, also wenn blofs eine ähnliche Figur gesucht wird, die* 2, 3, 4 etc. *mal so grofs ist als eine gegebene Figur, so kann man auch die Seiten der gesuchten Figur, ohne Hülfe der graden Linie,* blos durch den Kreis *finden. Man beschreibe mit der Seite* AM (Fig. 214.) *der gegebenen Figur, um die ähnlich liegende Seite der mehrfach gröfseren Figur zu finden, als Halbmesser, einen Kreis und mache* AB = BC = CD = DE = EF = FA = MA. *Man beschreibe ferner mit dem Halbmesser* AC = BD, *aus* A *und* D, *zwei Kreise, die sich in* G *und* H *schneiden, sodann aus* C *und* E, *mit dem nemlichen Halbmesser, zwei Kreisbogen, die sich in* I *schneiden. Ferner mit dem Halbmesser* MG, *aus* A *und* D, *Kreisbogen, die sich in* L *und* P *schneiden, und endlich aus* A *und* L, *mit dem Halbmesser* AM, *Kreisbogen, die sich in* K *schneiden, so ist*

$$MG^2 = 2AM^2 \qquad BI^2 = 7AM^2$$
$$AC^2 = 3AM^2 \qquad GH^2 = 8AM^2$$
$$AD^2 = 4AM^2 \qquad AI^2 = 9AM^2$$
$$DK^2 = 5AM^2 \qquad KI^2 = 10AM^2$$
$$GI^2 = 6AM^2$$

denn in dem rechtwinkligen Dreieck ACD ist $CD = AM$ und $AD = 2AM$, also $AC^2 = 4AM^2 - AM^2 = 3AM^2$. Ferner ist, weil $AG = AC$ seyn soll, in dem rechtwinkligen Dreieck AMG, $MG^2 = AG^2 - AM^2 = 3AM^2 - AM^2 = 2AM^2$. Ferner ist $AD^2 = 4AM^2$. Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreiecke KAD, $KD^2 = AK^2 + AD^2$ und weil $AK = AM$, $KD^2 = 4AM^2 + AM^2 = 5AM^2$. Ferner ist $MQ = QD$, also weil $QI = QA$, $DI = AM$ und $MI = 2AM$, folglich wegen $GI^2 = GM^2 + MI^2$, $GI^2 = 2AM^2 + 4AM^2 = 6AM^2$. Ferner ist $AR = \frac{1}{2}AM$, also $BR^2 = AM^2 - \frac{1}{4}AM^2 = \frac{3}{4}AM^2$ und $RI = 2\frac{1}{2}AM$, also $RI^2 = 6\frac{1}{4}AM^2$, mithin BI^2 oder $BR^2 + RI^2 = 7AM^2$. Ferner war $MG^2 = 2AM^2$ und GH ist gleich $2GM$. Also ist $GH^2 = 2(2AM)^2 = 8AM^2$. Ferner ist $AI = 3AM$, also $AI^2 = 9AM^2$, und endlich ist, wegen $KH = AM$, $KI^2 = 9AM^2 + AM^2 = 10AM^2$. Die Quadrate über den Linien MG, AC, AD, DK, GI, BI, GH, AI und KI sind also 2, 3, 4, 5 .... 10 mal so grofs als das Quadrat über der Linie AM, und da die Inhalte beliebiger ähnlicher Figuren und die Quadrate über ähnlichliegenden Seiten Gleichvielfache sind, so sind zugleich MG, AC, BD etc. die Seiten ähnlicher Figuren, welche 2, 3, 4 etc. mal gröfser sind als die gegebene Figur, mit der ähnlichliegenden Seite AM.

Mit den obigen 9 Linien kann man auch alle g r ö f s e r e n *Vielfachen finden. Wenn z. B. eine 31 mal gröfsere Figur als die mit der Seite* AM *verlangt wird, so nehme man* AM *6 mal, welches eine 36 mal gröfsere Figur geben würde, ziehe einen Kreis* PQRS (Fig. 215.), *dessen Durchmesser* 6AM *ist. Man mache* PQ = QR = RS *dem Halbmesser gleich und setze die Linie* DK (Fig. 214.), *welche eine* 36 − 31 = 5 *mal gröfsere Figur giebt von* S *nach* Z, *so ist* PZ *die Seite der* 31 *mal gröfseren Figur; denn da* $PS^2 = 36AM^2$, $ZS = 5AM^2$ und das Dreieck PZS rechtwinklig ist, so ist $PZ^2 = 36AM^2 - 5AM^2 = 31AM^2$. Da die Quadrate bis 36 um nicht mehr als 1 + 10 verschieden sind, so kann man mit den obigen so Vielfachen alle Vielfachen bis zum 36fachen finden und mit diesen Vielfachen findet man die folgenden gröfsern Vielfache auf eine ähnliche Weise weiter.

δ) ***Die Seite eines Quadrats oder einer beliebigen andern Figur, deren Inhalt $\frac{m}{n}$ mal so grofs ist, als der Inhalt eines gegebenen Quadrats oder einer andern, der gesuchten ähnlichen Figur, kann man wie folgt finden.*** *Die Seite des gegebenen Quadrats oder der gegebenen Figur sey* AC (Fig. 216.), *so theile man* AC *in* m *gleiche Theile und mache in der graden Linie* CAB, AB *gleich* n *solcher Theile, halbire* BC *in* M, *ziehe den Halbkreis* BDC, *errichte* AD *auf* BC *in* A *senkrecht, mache* AE = AD, *ziehe unter einem beliebigen Winkel* FAE *die grade* AF, *mache* AF = AC, *ziehe die grade* FE *und mit ihr durch* C *parallel, die grade* GC; *so ist* AG *die ähnlich liegende Seite der gesuchten Figur, deren Inhalt $\frac{m}{n}$ mal der*

Inhalt der gegebenen Figur ist. Denn wegen $\frac{AC}{m} = \frac{AB}{n}$ ist $AB = \frac{n}{m} \cdot AC$, und weil in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken BAD und DAC, $\frac{BA}{AD} = \frac{AD}{AC}$, oder $AD^2 = AB \cdot AC$ ist, $AD^2 = \frac{n}{m} AC^2$, also $AD = AE = AC\sqrt{\frac{n}{m}}$. Nun sind die Dreiecke AGC und AFE, wegen den Parallelen GC und FE, ähnlich; Also ist $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AG}$ folglich, weil $AE = AC\sqrt{\frac{n}{m}}$ und $AF = AC$ ist, $\frac{AC\sqrt{\frac{m}{n}}}{AC} = \frac{AC}{AG}$, oder $\sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{AC}{AG}$, also $AG = AC\sqrt{\frac{m}{m}}$, oder $AG^2 = \frac{m}{n} AC^2$. Das Quadrat und folglich auch eine beliebige Figur über AG ist also $\frac{m}{n}$ mal so groſs als ein Quadrat oder eine ähnliche Figur über AC.

405.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen gradlinigen Figur gleich *ist, ziehe man durch alle Ecken* A, B, C, D.... (Fig. 217.) *der gegebenen Figur, parallele grade Linien, so sind alle Puncte in diesen Parallelen, welche, wie* A_1, B_1, C_1, D_1 .... *von* A, B, C, D .... *gleich weit entfernt sind, so nämlich daſs* $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ *etc. ist, die Ecken einer der Figur* ABCD .... *gleichen Figur* $A_1B_1C_1D_1$ .... Denn AA_1BB_1, BB_1CC_1, CC_1DD_1 etc. sind Parallelogramme, folglich ist $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1D_1 = CD$.... desgleichen ist A_1B_1 mit AB, B_1C_1 mit BC, C_1D_1 mit CD etc. parallel; also sind auch die Winkel $A_1B_1C_1$, $B_1C_1D_1$ etc. den Winkeln ABC, BCD etc. gleich; mithin sind alle Seiten und alle Winkel der Figur $A_1B_1C_1D_1$.... den Seiten und Winkeln der Figur $ABCD$.... gleich; folglich sind die Figuren $A_1B_1C_1D_1$.... und $ABCD$.... selbst gleich.

406.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen gradlinigen Figur ähnlich *ist, ziehe man durch alle Ecken* A, B, C, D *etc.* (Fig. 218.) *der gegebenen Figur, grade Linien nach einem und demselben Puncte* M, *so sind beliebige Puncte in diesen graden Linien, welche paarweise in Parallelen* A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 *etc. mit den Seiten der gegebenen Figur* A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 *etc. liegen, die Ecken einer der gegebenen ähnlichen Figur* $A_1B_1C_1D_1$ ..... Denn z. B. die Dreiecke AMB und A_1MB_1, BMC und B_1MC_1, CMD und C_1MD_1 etc. sind ähnlich, weil sie wegen der Parallelen AB und A_1B_1, BC und B_1C_1, CD und C_1D_1 etc. gleiche Winkel haben; also ist $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$ und $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, folglich $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Eben so ist $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, $\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$ u. s. w. Also ist

ist $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}$ etc. Mithin sind die Seiten der Figur $ABCD$ . . . . . Gleichvielfache, während zugleich, wegen der Parallelen, die Winkel der beiden Figuren, zwischen ähnlich liegenden Seiten, gleich sind. Also sind die beiden Figuren ähnlich.

Man darf daher nur, nachdem die Linien AM, BM, CM, DM etc. gezogen worden, von einer der Ecken der gesuchten Figur, z. B. A_1, ausgehend, Parallelen A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 etc. ziehen, so entsteht eine der gegebenen, ähnliche Figur $A_1B_1C_1D_1$ . . . .

Sollen die ähnlich liegenden Seiten der gesuchten Figur bestimmte Gleichvielfache von den Seiten der gegebenen Figur seyn, so macht man A_1M *zu eben einem solchen Vielfachen von* AM.
Denn wegen der ähnlichen Dreiecke AMB, und A_1MB_1 ist $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AM}{A_1M}$, und da $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ . . . ., auch $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \ldots = \frac{AM}{A_1M}$.

Soll der Inhalt der gesuchten Figur ein bestimmtes Vielfache von dem Inhalt der gegebenen seyn, so muss man eine Seite der verlangten Figur, z. B. A_1B_1 *aus der ähnlichliegenden Seite* AB *der gegebenen, suchen: das nämliche Vielfache ist* A_1M *von* AM, *wonach man dann die Parallele* A_1B_1 *mit* AB *und hierauf auch die übrigen Seiten der gesuchten Figur ziehen kann.*

407.

Von einem gegebenen Dreiecke ein Stück von gegebener Grösse gradlinig abzuschneiden, berechne man zuerst den Inhalt des ganzen Dreiecks und sehe zu, der wievielte Theil vom Ganzen das abzuschneidende Stück ist. Es sey der mte Theil.

α) *Soll nun die Theilungs-Linie durch einen der Scheitel-Puncte* A (Fig. 219.) *des gegebenen Dreiecks* ABC *gehen, so theile man die gegenüberliegende Seite* BC *in* m *gleiche Theile, mache* $BD = \frac{1}{m}BC$ *und ziehe die grade Linie* AD: *alsdann ist* ABD *der abzuschneidende mte Theil des Dreiecks* ABC.
Denn die Dreiecke ABD und ABC haben gleiche Höhen; also sind ihre Inhalte und ihre Grundlinien Gleichvielfache, folglich ist $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD} = m$.

β) *Soll die Theilungs-Linie durch einen gegebenen Punct* E *gehen, der in einer der Seiten des Dreiecks liegt, so theile man erst den abzuschneidenden mten Theil des Dreiecks* ABC *nach (α.) durch eine grade Linie* AD *ab, welche durch die gegenüberliegende Ecke* A *geht. Hierauf ziehe man die Grade* AE *und mit ihr parallel durch* D *die Grade* DF *und von* F *nach* E *die Grade* FE, *so ist* $\triangle BEF = \frac{1}{m}\triangle ABC$; denn $\triangle ABD$ ist gleich $\frac{1}{m}ABC$ und die Dreiecke FDA und FDE, über FD, zwischen den

Parallelen FD und AE, sind gleich grofs. Also ist $\triangle BFD + \triangle FDE = \triangle BFD + \triangle FDA$, das heifst, $\triangle BFE = \triangle ABD = \frac{1}{m} \triangle ABC$.

γ) *Soll die Theilungs-Linie durch irgend einen Punct* D (Fig. 220.) *im Innern des Dreiecks gehen und zusammen mit der graden Linie* DA, *welche diesen Punct mit einem der Scheitel des Dreiecks verbindet, den abzuschneidenden Theil absondern, so ziehe man* AE *und* AF *mit* DB *und* DC *parallel und schneide von dem Dreieck* EDF *nach* (α.) *den mten Theil ab. Fällt der Theilungspunct, wie* K, *zwischen* B *und* D, *so dafs* $\triangle EDK = \frac{1}{m} EDF$, *so ist* BADK *der abzuschneidende mte Theil des Dreiecks* ABC. *Fällt der Theilungspunct, wie* L, *aufserhalb* B *und* C, *so dafs* $\triangle EDL = \frac{1}{m} \triangle EDF$, *so ziehe man* LI *mit* BD *und* EA *parallel und durch* I *und* D *die Grade* ID. *Alsdann ist das Dreieck* IDA *der abzuschneidende mte Theil des Dreiecks* ABC. Die Dreiecke EBD und ABD nämlich, so wie CDF und CDA, über den Grundlinien BD und DC, und zwischen den Parallelen BD, EA und DC, AF sind gleich grofs; daher ist, wenn man das Dreieck BDC hinzu thut, das Dreieck ABC so grofs als das Dreieck EDF. Ist nun $\triangle EDK = \frac{1}{m} \triangle EDF$, so ist auch $BADK = \frac{1}{m} ABC$. Denn $\triangle EDK = \triangle BDK + \triangle EBD$ und $BADK = \triangle BDK + \triangle ABD$, und vorhin war $\triangle EBD = \triangle ABD$. Ist $EDL = \frac{1}{m} EDF$, so ist $\triangle IDA = \frac{1}{m} \triangle ABC$; denn die Dreiecke LBD und IBD, über der Grundlinie BD und zwischen den Parallelen LI und BD, sind gleich grofs: es ist aber $\triangle EDL = \triangle EDB - \triangle LBD$ und $\triangle IDA = \triangle BDA - \triangle IBD$; also ist, weil $\triangle EBD = \triangle BDA$ und $\triangle LBD = \triangle IBD$, $\triangle IDA = \triangle EDL = \frac{1}{m} \triangle EDF = \frac{1}{m} \triangle ABC$.

δ) *Soll die Theilungs Linie mit einer Seite des gegebenen Dreiecks einen gegebenen Winkel machen, so ziehe man unter eben diesem Winkel* BFA (Fig. 221.) *durch die der Seite gegenüberliegende Ecke* A, *die Grade* AF. *Nun schneide man vermittelst einer graden Linie* AD, *die durch eben die Ecke* A *geht, nach* (α.) *den mten Theil von* ABC *ab. Ueber denjenigen Theil der Grundlinie, in welchen* D *fällt, also in* (Fig. 221.) *über den Theil* BF, *ziehe man einen Halbkreis und* DE *durch* D *auf* BF *senkrecht, mache* BH = BE *und ziehe* GH *unter dem bestimmten Winkel* BHG *gegen* BC, *also mit* AF *parallel; so ist* $\triangle AGH = \frac{1}{m} \triangle ABC$. Denn in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken BDE und EDF ist $\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BF}$, und weil $BE = BH$ seyn soll, $\frac{BD}{BH} = \frac{BH}{BF}$. Aber wegen der Parallelen GH und AF sind die Dreiecke BGH und BAF ähnlich. Also ist $\frac{BH}{BF} = \frac{BG}{BA}$; folglich ist $\frac{BD}{BH} = \frac{BG}{BA}$, folglich $BD.BA = BH.BG$. Daher ist $\triangle BGH = \triangle BAD$. Aber $\triangle BAD = \frac{1}{m} \triangle ABC$, also $\triangle BGH = \frac{1}{m} \triangle ABC$.

Ein einzelner besonderer Fall ist es nur, wenn die Theilungs-Linie KL *mit einer Seite* AC *des Dreiecks parallel seyn soll. Das Verfahren bleibt das nämliche.* AF *fällt dann in* AC; *man muſs also alsdann den Halbkreis über die ganze Seite* BC *ziehen,* BK = BI *machen und durch* K, LK *mit* AC *parallel legen.*

Eben so ist es nur ein einzelner besonderer Fall wenn die Theilungs-Linie etwa auf BC *senkrecht seyn soll. Das Verfahren ist immer das Nämliche.*

ε) Soll die Theilungs-Linie durch irgend einen Punct auſserhalb oder innerhalb des gegebenen Dreiecks, z. B. wie DEF *durch den Punct* D (Fig. 222.) *auſserhalb des Dreiecks* ABC *gehen und das Dreieck* BEF $= \frac{1}{m} \triangle ABC$ *abschneiden, so ziehe man* AL *durch* A *mit* BC *und* KDL *durch* D *mit* AB *parallel, theile nach (α.) das Dreieck* $BAG = \frac{1}{m} ABC$ *ab, ziehe* LM *mit* AG *und* LH *mit* DM *parallel, halbire* KH *in* O, KO *in* Q, *mache* $KR = KB + KQ$, *ziehe über* RH *den Halbkreis* RNH, *setze das Perpendikel* KN *auf* RC *zu* KO, *in* OP, *mache* $BF = KP$ *und ziehe* DEF *grade; so ist* $\triangle BEF = \frac{1}{m} \triangle ABC$.

Denn wegen der Parallelen DM und LH sind die Dreiecke DML und DMH, folglich auch die Dreiecke KLM und KDH gleich groſs. Das Dreieck KLM ist aber, wegen $KL = BA$, $LM = AG$ und $KLM = BAG$, dem Dreiecke BAG gleich; also sind auch die Dreiecke KDH und ABG gleich groſs; mithin ist $\triangle KDH = \frac{1}{m} \triangle ABC$. Nun ist in den ähnlichen Dreiecken KDF und BEF, $\frac{KD}{BE} = \frac{KF}{BF}$, und da die Dreiecke KDH und BEF gleich groſs seyn sollen, $KD . KH = BE . BF$ (§. 169.), oder $\frac{KD}{BE} = \frac{BF}{KH}$. Also muſs, wenn die Dreiecke KDH und BEF gleich groſs und zwar beide so groſs als das Dreieck $ABG = \frac{1}{m} \triangle ABC$ seyn sollen, $\frac{KF}{BF} = \frac{BF}{KH}$ seyn. Nun wurde $KR = KB + KQ = KB + \frac{1}{4}KH$ und $BF = KN + KO = KN + \frac{1}{2}KH$ gemacht, so daſs $KN = BF - \frac{1}{2}KH$ ist. Es ist also, weil in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken RKN und NKH, $\frac{KN}{KR} = \frac{KH}{KN}$ ist, $\frac{BF - \frac{1}{2}KH}{KB + \frac{1}{4}KH} = \frac{KH}{BF - \frac{1}{2}KH}$, woraus $BF^2 - BF.KH + \frac{1}{4}KH^2 = KB.KH + \frac{1}{4}KH^2$, oder $BF^2 = BF.KH + KB.KH$, oder $BF^2 = (BF + KB) KH$, oder weil $BF + KB = KF$ ist, $BF^2 = KF . KH$, oder $\frac{KF}{BF} = \frac{BF}{KH}$ folgt. Das Nämliche muſste aber wegen der Gleichheit der Gröſse der Dreiecke KDH oder ABG und BEF seyn, also sind die Dreiecke ABG und BEF gleich groſs und es ist $\triangle BEF = \frac{1}{m} \triangle ABC$. Diese Aufgabe ist in (§. 370.) durch Rechnung gelöset.

408.

Vermittelst der Sätze (§. 407.) *von Theilung des Dreiecks, kann man von jeder beliebigen gradlinigen Figur, unter diesen oder jenen Bedingungen für die Lage der Theilungs-Linie, Stücke von gegebener Gröfse abschneiden.*

α) *Gesetzt man solle von der Figur* ABCDEFG (Fig. 223.) *parallel mit der Seite* AB, *ein Stück von gegebener Gröfse abschneiden, so ziehe man erst durch alle andere Ecken der Figur Parallelen mit* AB, *nämlich* GG_1, CC_1, FF_1, EE_1 *und berechne den Inhalt der Trapeze* $ABGG_1$, GG_1C_1C, C_1CFF_1, FF_1EE_1. *Man addire von denselben so viele, bis man eine Fläche findet, welche gröfser als die ist, die man abschneiden soll. Alsdann geht die Theilungslinie* XY *nothwendig durch das letzte Trapez hindurch, welches man addirte. Sie gehe z. B. zwischen* FF_1 *und* EE_1 *hindurch. Da man den Inhalt der Figur* $ABCF_1FC_1G$ *kennt, so weifs man auch wieviel noch von dem Trapeze* FF_1EE_1 *abzuschneiden ist. Dieses Stück noch abzuschneiden, verlängere man die Seiten des Trapezes* FE *und* F_1E_1, *bis sie sich in* P *schneiden, und berechne den Inhalt des Dreiecks* PEE_1. *Dazu den Rest* $EXYE_1$ *der von dem Trapeze* FF_1EE_1 *übrig bleiben mufste, giebt das Dreieck* EXY, *welches von dem Dreieck* EFF_1, *parallel mit seiner Grandlinie* FF_1, *abzuschneiden ist. Die Theilungs-Linie* XY *für diesen Abschnitt findet man nach* (§. 407. δ).

β) *Gesetzt von der Figur* ABCDEFG (Fig. 224.) *soll durch eine grade Linie* XY, *die verlängert durch einen gegebenen Punct* M *geht, ein Stück* XYBCDEX *von gegebener Gröfse abgeschnitten werden, so ziehe man durch den Punct* M *und durch alle Ecken der Figur grade Linien und berechne den Inhalt der durch dieselben abgeschnittenen Figuren* D_1DE, C_1CDD_1, B_1BC_1C, $G_1G_2B_1B$ *u. s. w. Man addire solcher, von der ersten an, so viele bis man eine Fläche bekommt, die gröfser ist als die abzuschneidende; so geht die Theilungs-Linie nothwendig durch das letzte addirte Trapez hindurch, z. B. durch* $G_1G_2BB_1$. *Zieht man den Inhalt der Figur* $BCDEB_1$ *von der abzuschneidenden Fläche ab, so bleibt die Fläche* $XYBB_1$, *welche noch von dem letzten Trapeze abzuschneiden ist. Für diese Fläche die Theilungs-Linie* XY, *unter der Bedingung, dafs sie verlängert durch den Punct* M *geht, zu finden, verlängere man die Seiten* BG_1 *und* B_1G_2, *bis sie sich in* P *schneiden und berechne den Inhalt des Dreiecks* PG_1G_2, *so kommt es, weil auch die Fläche* XG_2G_1Y *bekannt ist, nur darauf an, von dem Dreieck* PBB_1 *einen bestimmten Theil* PXY *mittelst einer, verlängert durch den bestimmten Punct* M *gehenden Theilungs-Linie* MXY *abzuschneiden; welches nach* (§. 407. ε) *geschieht u. s. w.*

Verbesserungen.

Seite 2 Zeile 8 v. o. lese man größer oder kleiner statt kleiner oder größer.

— 9 — 7 v. u. l. m. *EACBF* st. *EACDF*

— 10 — 2 v. u. l. m. keinen st. keinem

— 23 — 8 v. o. l. m. $(n-2)2\varrho$ st. $(n-2)\varrho$

— 27 — 6 v. o. l. m. *AC* st. *BC*

— 31 — 1 v. u. l. m. $\triangle EGF$ st. $\triangle EGI$

— 32 — 15 v. u. l. m. *GD* und *GF* st. *GD* und *GE*

— 34 — 6 v. u. *DF* st. *EF*

— 49 — 20 v. o. etc. l. m. II: *Wenn ein Dreieck über einer seiner Seiten gleichschenklig ist, und über der nemlichen Seite liegt zugleich ein anderes beliebiges Dreieck, der Winkel des gleichschenkligen Dreiecks aber, der gemeinschaftlichen Seite gegenüber etc.* statt II. *Wenn ein etc.* bis *gegenüber*

— 54 — 4 v. u. l. m. der st. die

— 65 — 22 v. u. l. m. *B* st. *D* und Z. 21 v. u. *D* st. *B*

— — — 1 v. o. l. m. Centricität st. Gleichheit

— 66 — 17 v. o. l. m. *B* st. *D*, Z. 19 v. o. *D* st. *B* und Z. 25 v. o. *M* st. *B*

— 70 — 14 v. o. und S. 76 Z. 20 v. u. l. m. einen st. einem

— 80 — 9 v. o. l. m. und st. urd

— 87 — 15 v. o. l. m. $\frac{2\varrho}{3}$ st. $\frac{2\varrho}{k}$.

— 93 — 1 v. u. l. m. $-[a.b]-([a.b]-[b^2])$ statt $-a.b-([a.b]-[b^2])$

— 98 — 3 v. u. l. m. Quadrats eines der gleichen st. Quadrats der gleichen

— 99 — 3 v. o. l. m. $[BD^2]$ st. $[BD^2]^2$

— 116 — 1 v. u. etc. müssen die Worte: „Wäre der Halbmes- „ser in dem einen Vieleck größer als im andern, „so wären alle Winkel am Mittel-Punct, über „gleichen Seiten, in dem ersten kleiner als in dem „andern (§. 104.), also die Summen der Winkel „am Mittel-Punct wiederum verschieden.“ wegfallen.

— 126 — 22 v. u. l. m. $(m+e)B$ st. $(m+e)A$

— 127 — 10 v. u. l. m. *des Paral.* st. *das Paral.*

— 133 — 8 v. u. l. m. *ABC* st. *ABG*

— 137 — 2 v. o. l. m. einen st. einem

— 141 — 10 v. u. l. m. $(a^2+c^2-b^2)^2$ st. $(a^2+b^2-c^2)^2$

— — — 6 v. u. l. m. 11 st. 10

— 142 — 9 u. 10 v. o. l. m. $16.\triangle^2$ st. $\triangle^2$ u. Z. 11 v. o. $\triangle$ st. $16.\triangle$

— 143 — 3 v. u. l. m. CD_3 st. BD_3

— 144 — 17 u. 18. v. u. l. m. *BC* st. BK_1

— 145 — 2 v. o. l. m. $9c^2$ st. $9c$

— — — 19 v. o. l. m. k_2^4 st. $-k_2^2$

Seite 453 Zeile 8 v. u. l. m. $\gamma_n = 2(n-2)\varrho - (\gamma_1 + \gamma_2 \ldots \gamma_{n-1})$ st. $\gamma_n = 2(n-2)\varrho - \gamma_2$

— 457 — 16 v. o. l. m. 24. $z^2_{3,n}$ st. 24. $z^2_{3,4}$

— — — 6 v. u. l. m. (§. 374. 3.) st. (§. 373. 3.)

— 459 — 7 v. o. l. m. (§. 374. 6.) st. (§. 373. 6.)

— — — 19 v. u. l. m. γ_1 st. γ

— 460 — 5 v. u. l. m. $q_{3,n}$ st. $q_{2,n}$

— 461 — 13 v. u. l. m. c_1 st. c

— 464 — 17 v. o. l. m. $z^2_{2,m}$ st. $y^2_{2,m}$

— 469 — 12 v. u. etc. mufs es statt die erste Zeile und von da bis so viel als heifsen:

Es ist $c_2 \sin\gamma_1 - c_3 \sin(\gamma_1 + \gamma_2) + c_4 \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \ldots$
$\ldots \pm c_{m-1} \sin(\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-2}) = p_{2,m-1}$. Setzt man

93. $\gamma_1 + \gamma_2 \ldots + \gamma_{m-1} = \alpha$,

so ist $\mp c_m \sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_{m-1}) = \mp c_m \sin\alpha$ und der Rest von (92.) so viel als

Seite 471 Zeile 2 v. o. l. m. VI. st. V und Zeile 4 v. o. VII st. V

— 473 Gl. 7 l. m. $\tang(\frac{1}{2}\pi + \lambda)$ st. $\tang(\pi - \lambda)$

— 474 Zeile 6 v. u. l. m. $a, b, \gamma, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ st. $a, b, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$

— 475 — 8 v. o. l. m. $\psi + \gamma$ st. ψ

— — — 12 v. u. l. m. $\beta_n + \gamma$ st. β_n

— 476 — 21 v. u. l. m. φ und ψ st. ψ und ψ

— 480 — 7 v. o. l. m. c_n st. c_4

— — — 22 v. o. l. m. $p_{4,n}$ st. $p_{3,n}$

— 481 — 20 v. u. l. m. $F_{3,n}$ (21.) st. $F_{2,n}$ (19.)

— 482 — 12 v. u. l. m. $C_n C_p$ st. $c_n c_p$ und $C_m C_n$ st. $C_{m,n}$

— 485 — 7 v. o. l. m. c_n st. c_1

— 488 — 7 v. o. l. m. $\frac{c_1}{\sin\varphi}$ st. $\frac{c}{\sin\varphi}$

— 500 — 18 v. o. l. m. gehören zu gleichen Theilen st. sind gleiche Theile

— 501 — 11 v. u. l. m. $SZ = \frac{1}{8}AC\sqrt{5}$ st. $SZ = \frac{1}{8}ACS\sqrt{5}$

— 503 — 20 v. u. l. m. QR st. QB

— — — 11 v. u. l. m. TMB st. FMB

— 504 — 5 v. u. l. m. ADC st. ADE

— — — 6 v. u. und 2 v. u. l. m. F_1DF st. E_1DE

— 505 — 14 v. u. l. m. HI st. HI_1

— 508 — 16 v. o. l. m. zusammensetzt st. zusammengesetzt.

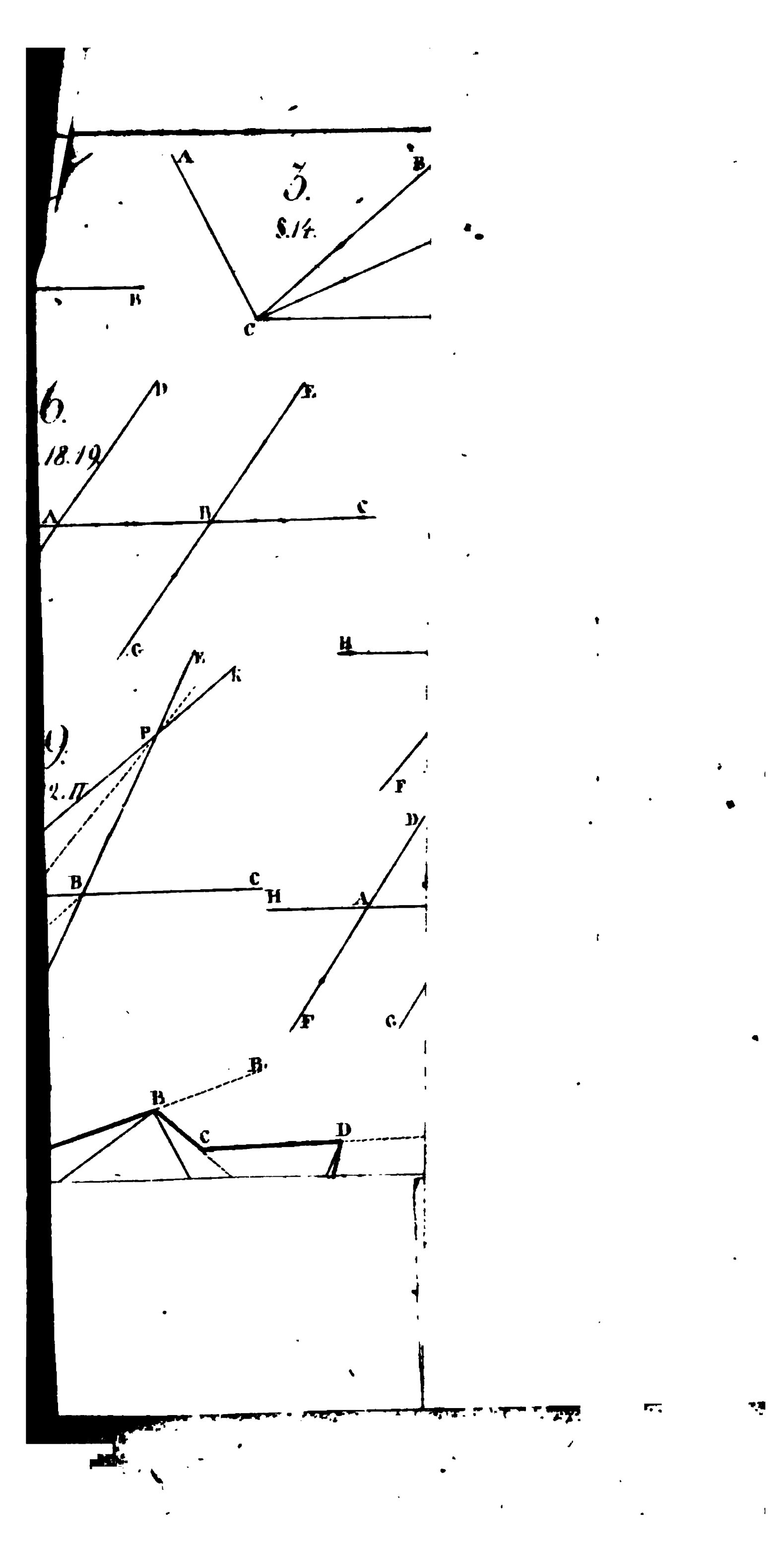
— — — 23 v. o. l. m. AG st. FG

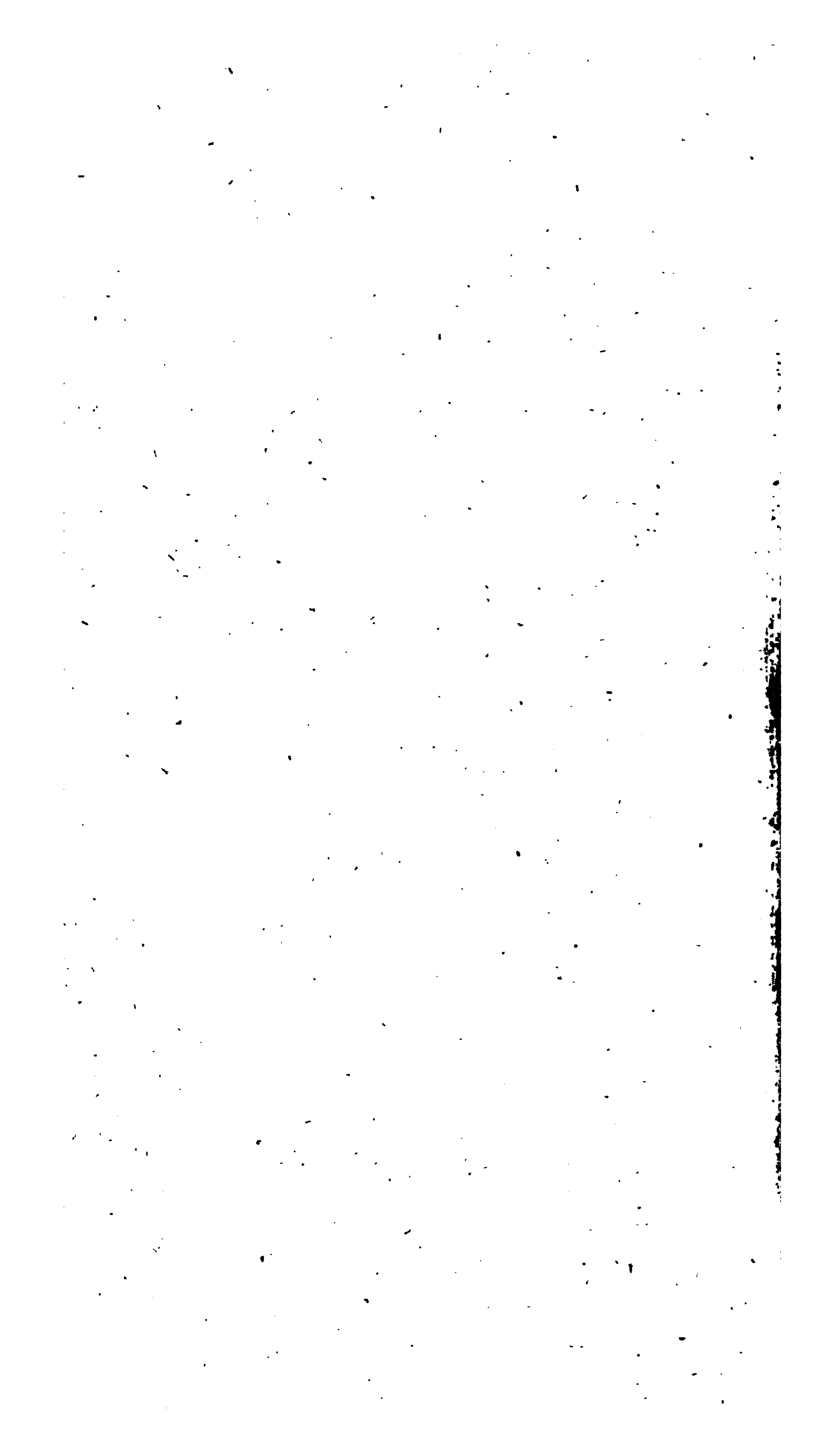
— — — 1 v. u. l. m. FD st. AB

— 510 — 16 v. o. l. m. FE st. FD

In Fig. 210 soll über der zweiten Linie Q st. H stehen

Seite 510 Zeile 8 v. u. l. m. FM_1 st. FM und CM_1 st. CM.


A
B
3.
§.14.
B
C
6.
18.19
D
E
A
B
C
G
H
E
K
P
9.
2.11
F
D
B
C
H
A
F
G
B
B
C
D



19.
§.40.

A C D

B

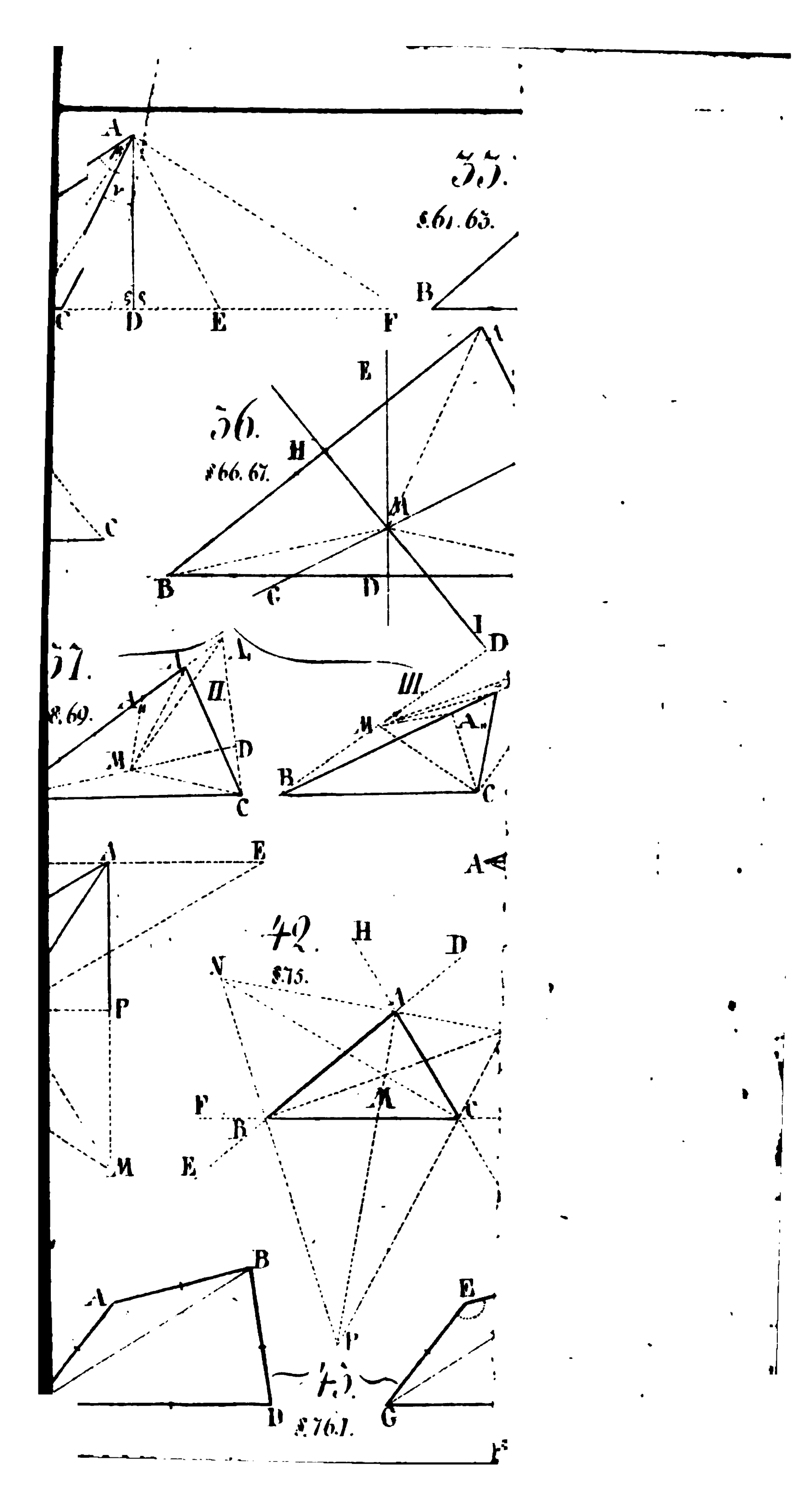
24.
§.41.

C D

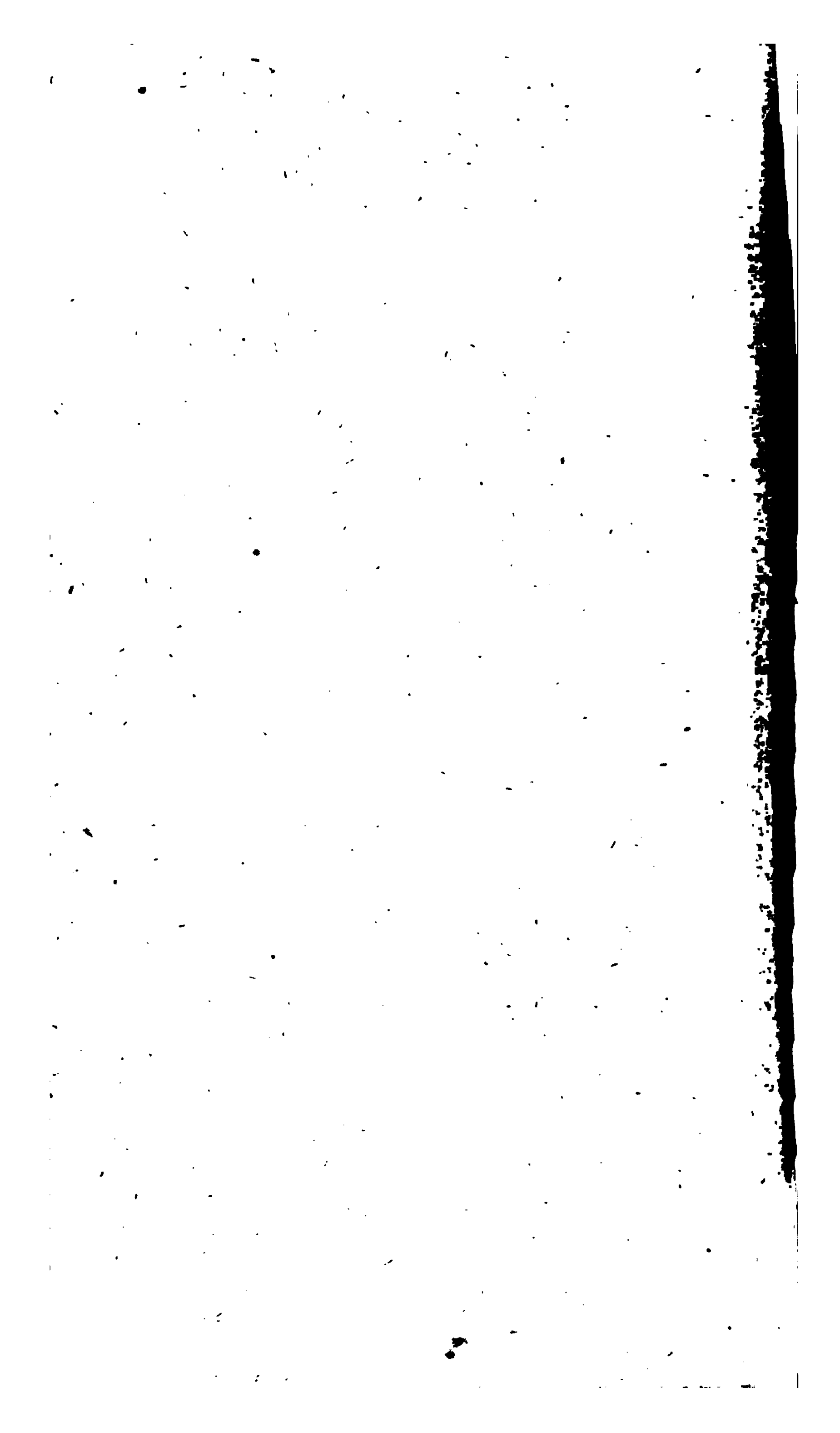
A
24.
§.46.47.
C
B D

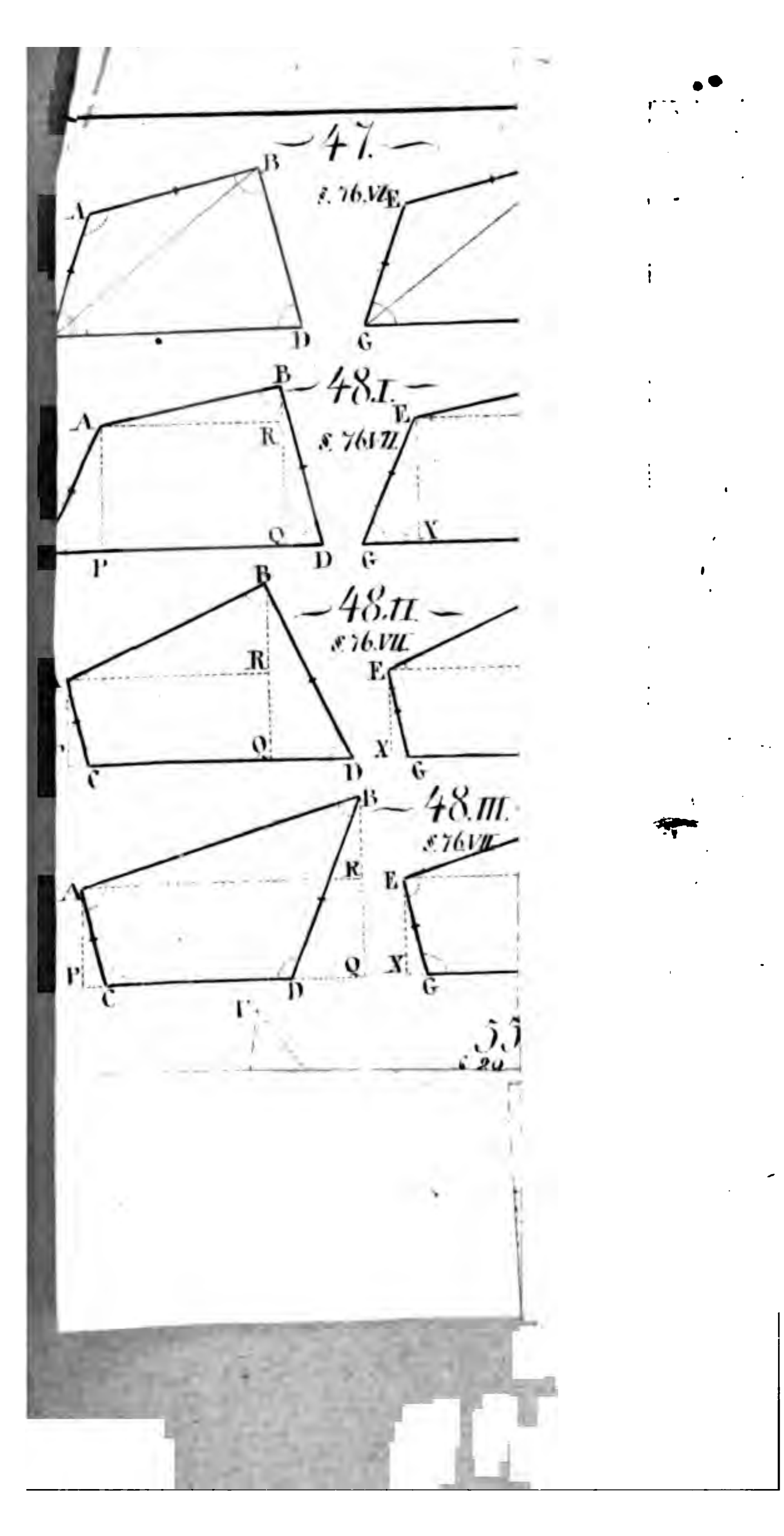
D
C H
G
F

A

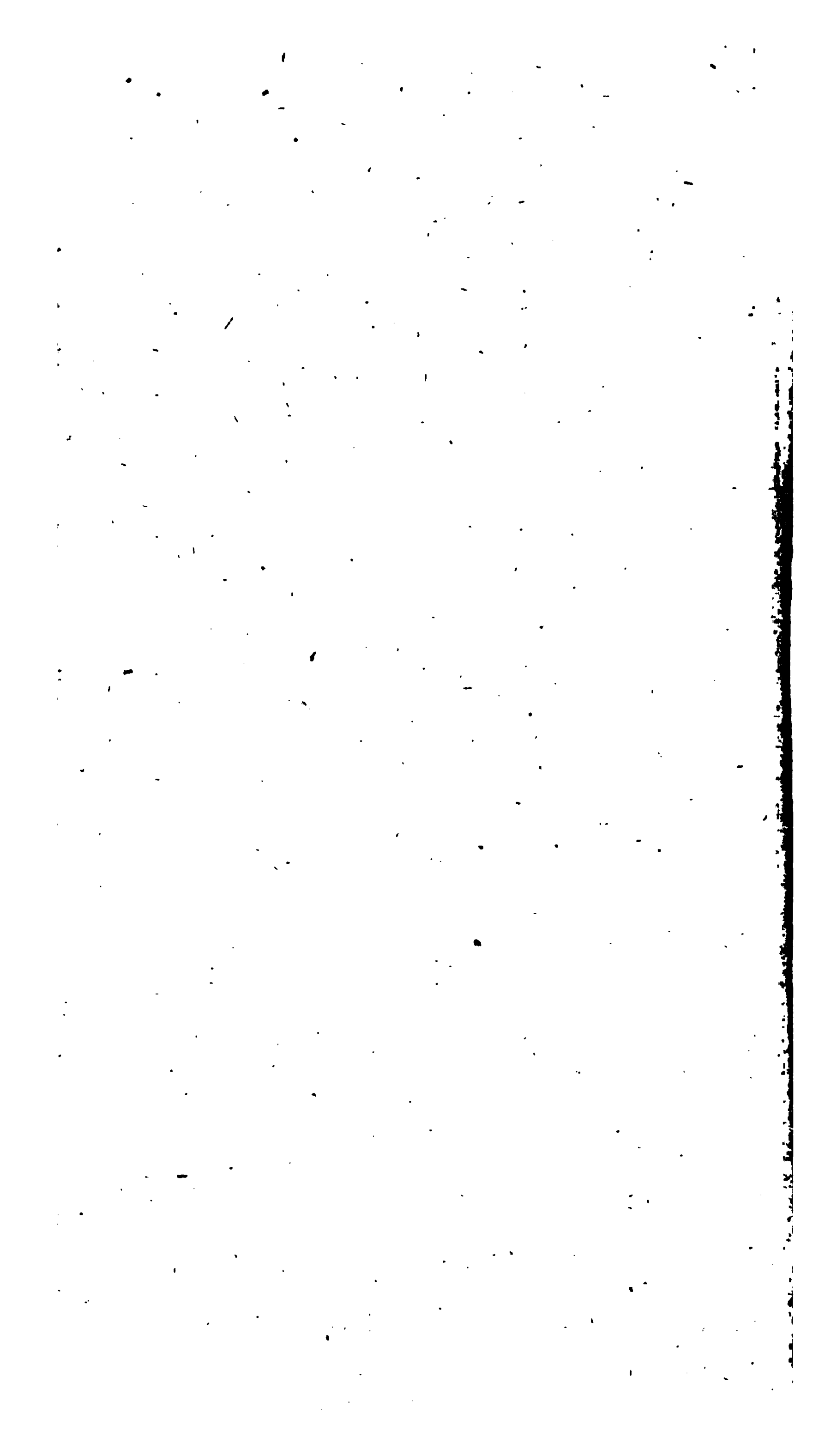


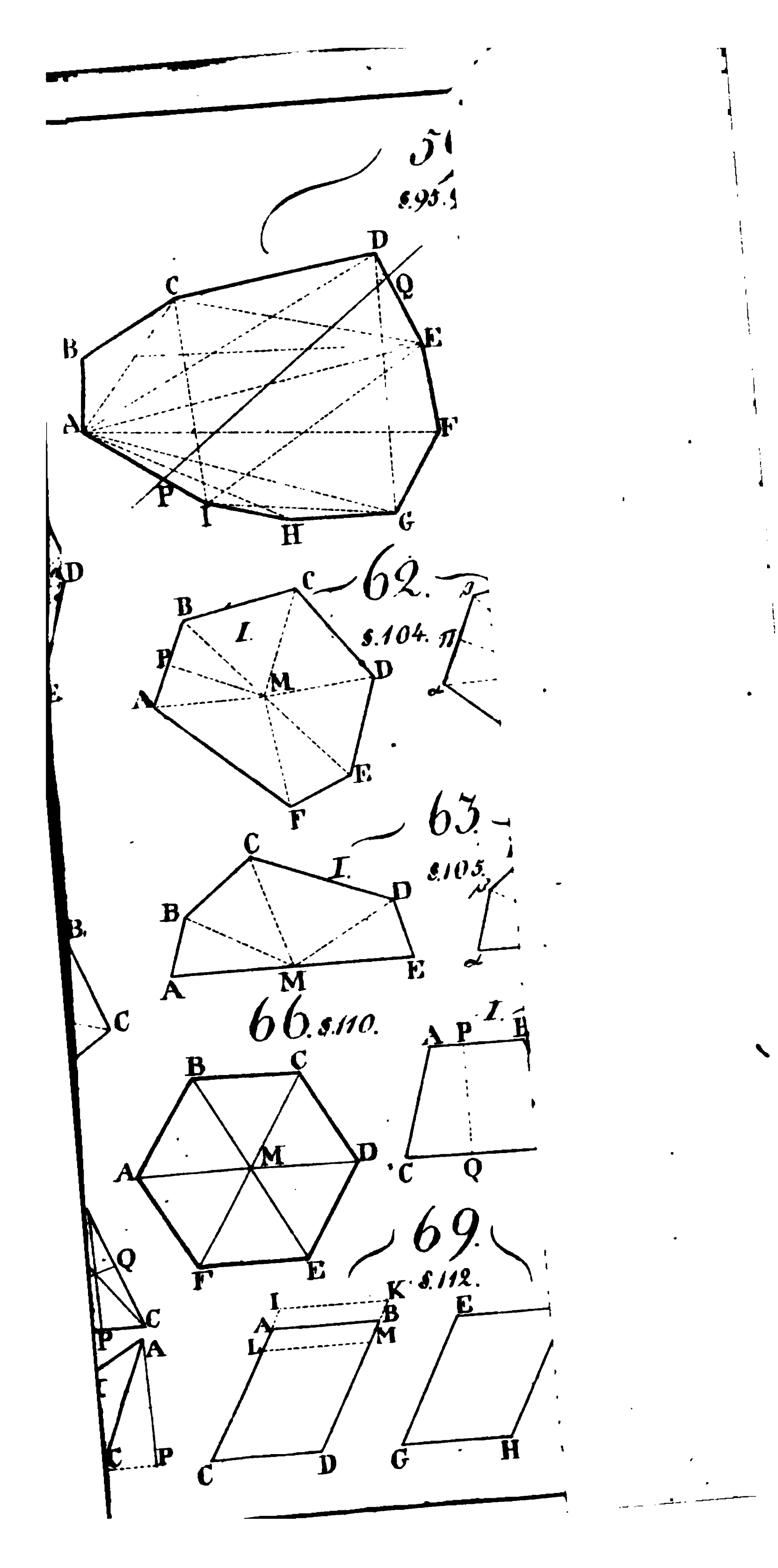
35.
§.61.63.
36.
§66.67.
37.
§.69.
42.
§75.
43.
§.76.1.



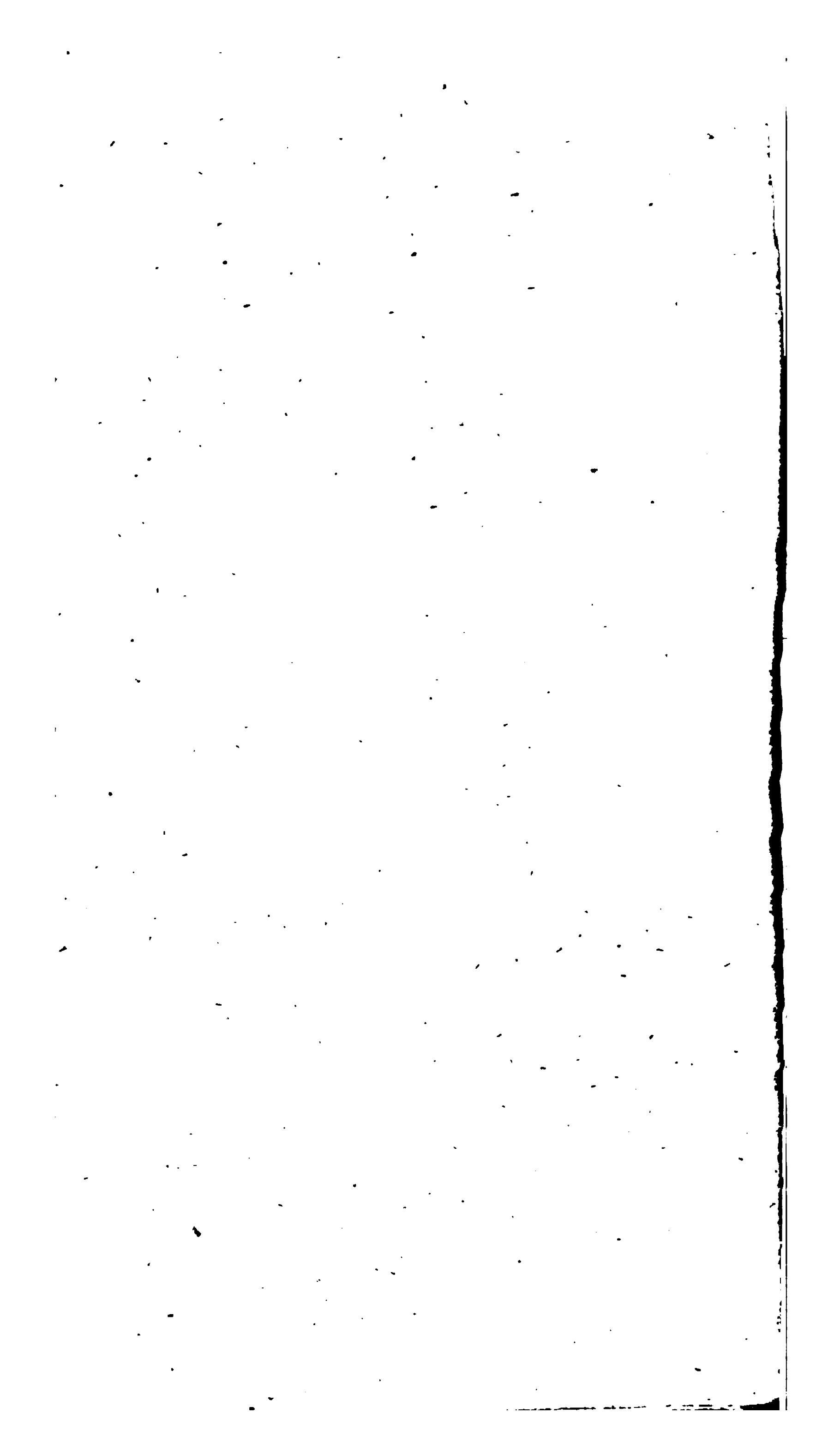


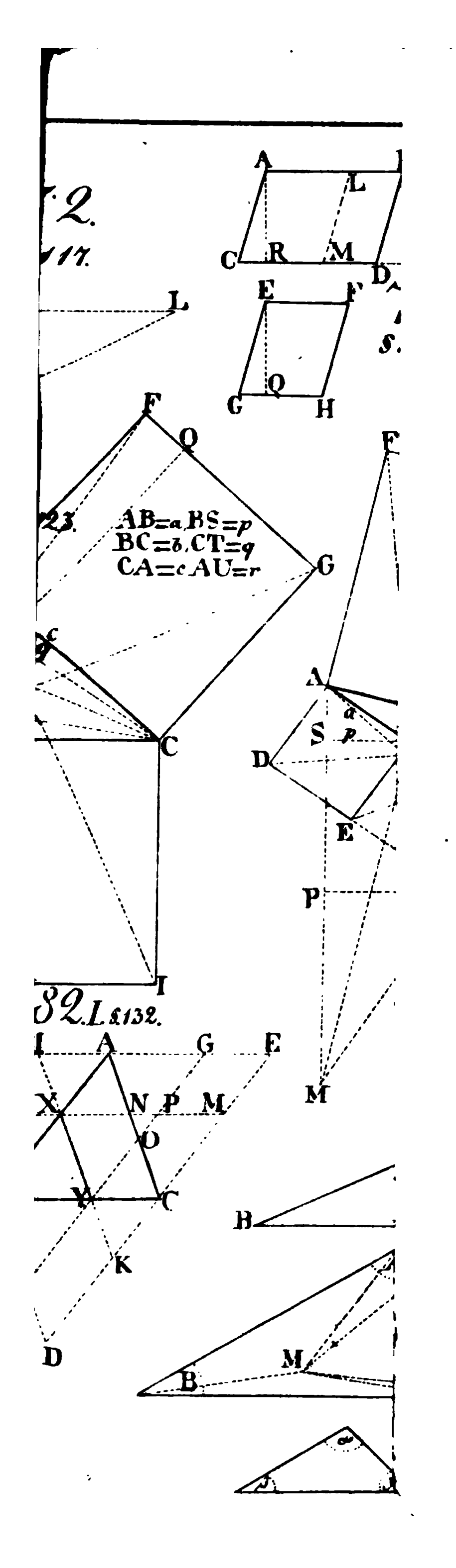
47.
f. 76.VI.
A
B
D
E
G
48.I.
f. 76.VII.
A
B
R
Q
P
D
E
X
G
48.II.
f. 76.VII.
B
R
E
Q
X
C
D
G
48.III.
f. 76.VII.
A
B
R
E
P
Q
X
C
D
G





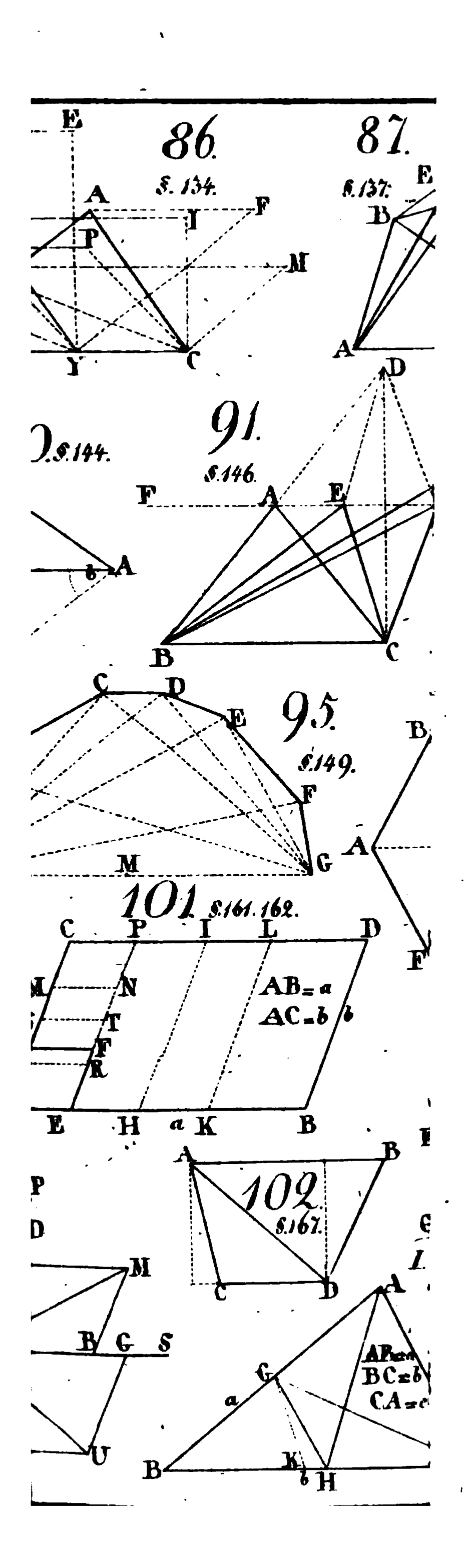
62.
§.104.
63.
§.105.
66. §.110.
69.
§.112.





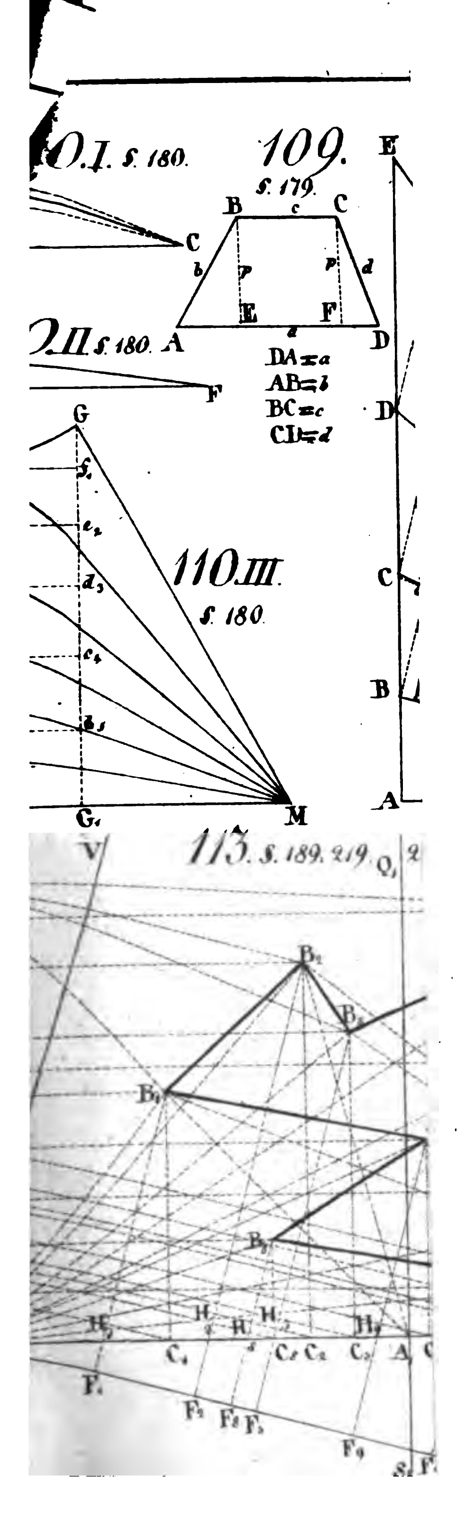
AB=a BS=p
BC=b CT=q
CA=c AU=r



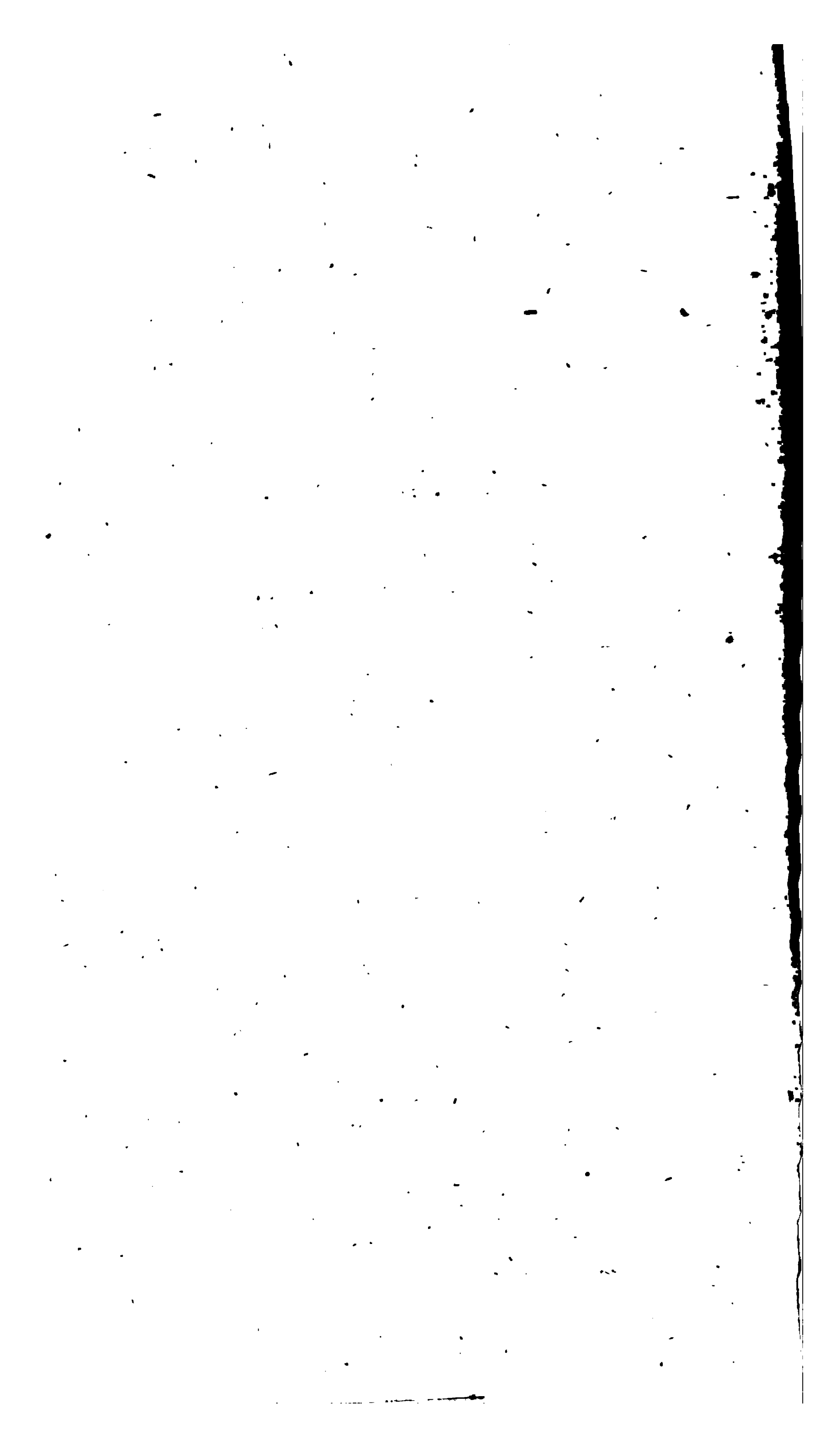


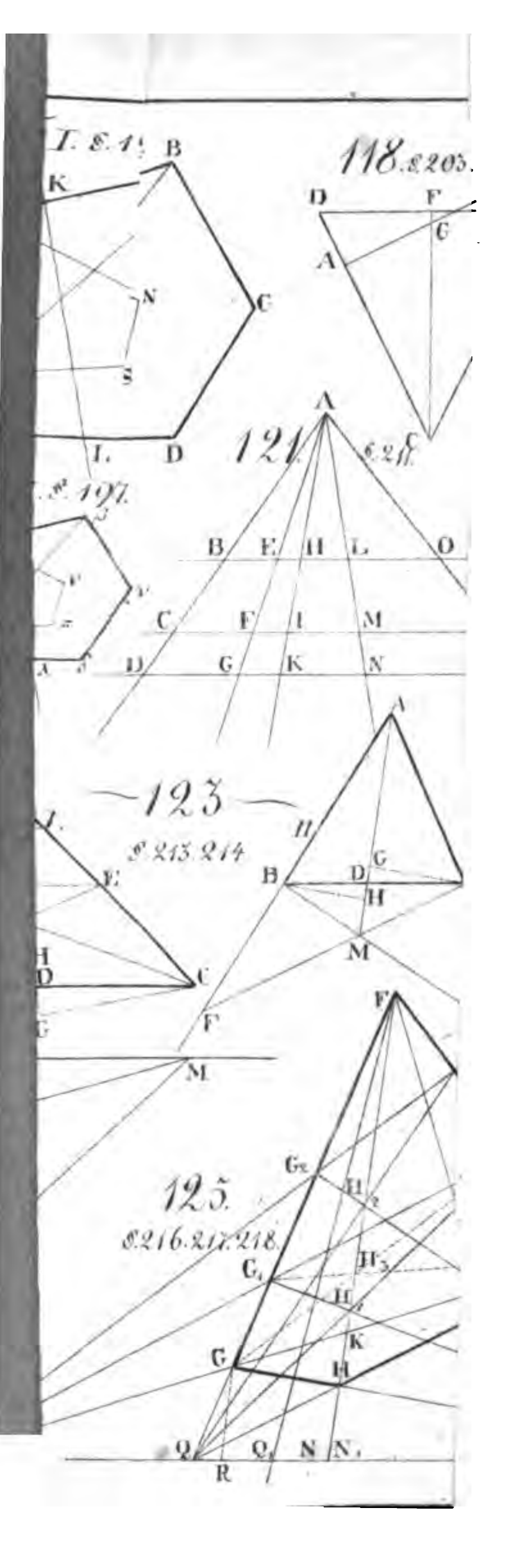
86.
§. 134.
87.
§. 137.
91.
§. 146.
§. 144.
95.
§. 149.
101.
§. 161. 162.
AB = a
AC = b
102.
§. 167.
AB = a
BC = b
CA = c



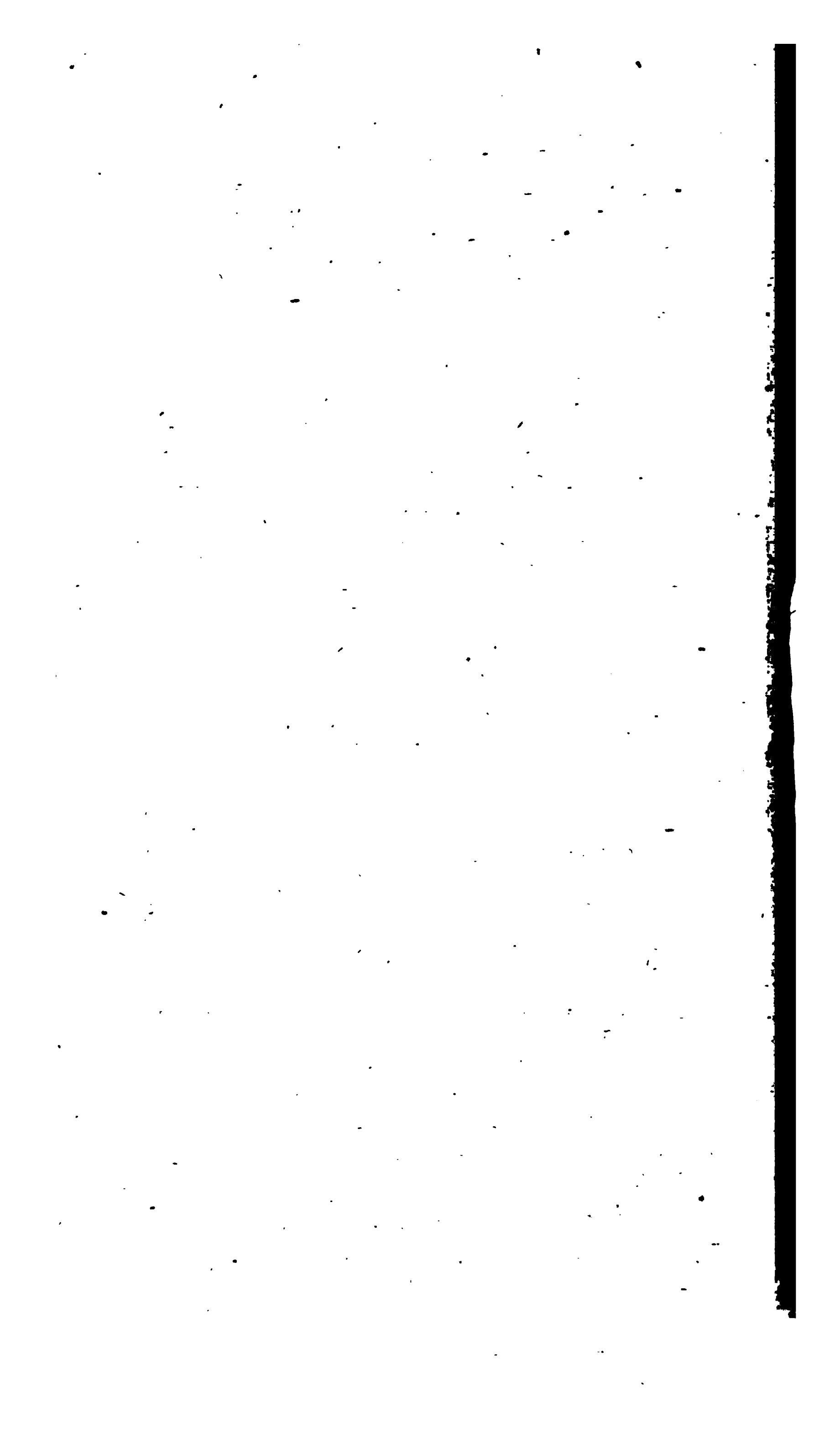


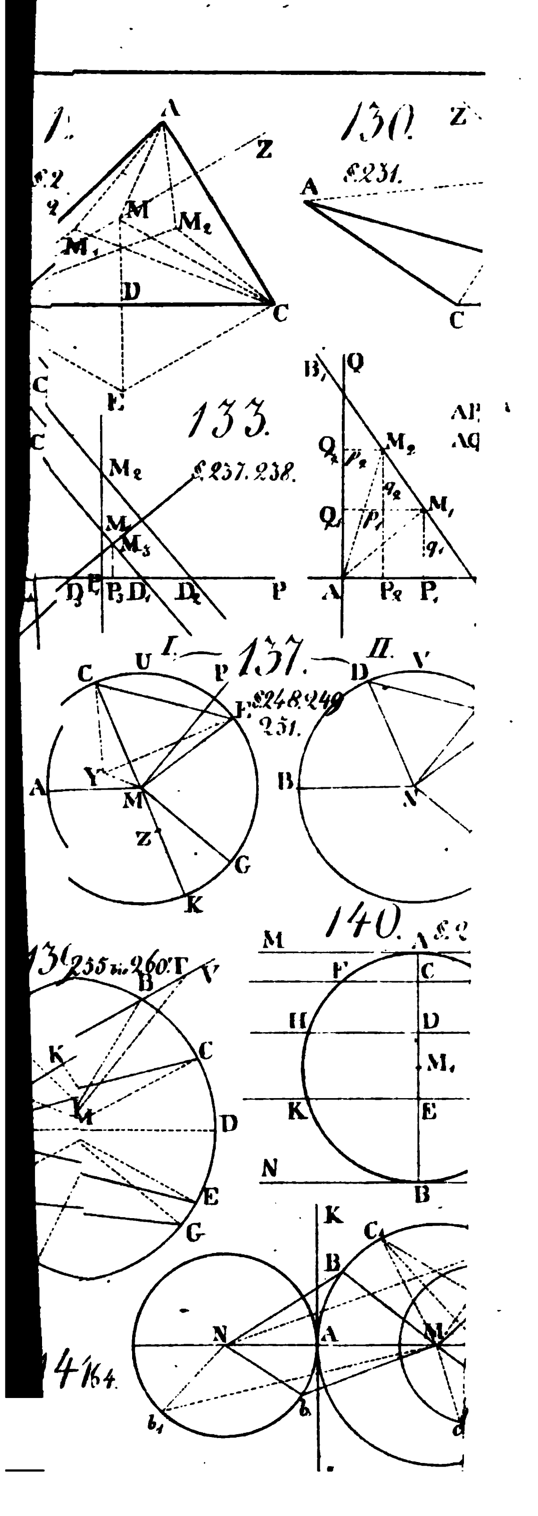
10.I. §. 180.
109.
§. 179.
B
c
C
b
p
p
d
E
F
A
a
D
DA=a
AB=b
BC=c
CD=d
C
II §. 180.
F
G
110.III.
§. 180
M
G
E
D
C
B
A
113. §. 189. 219.
V
B
B
B
B





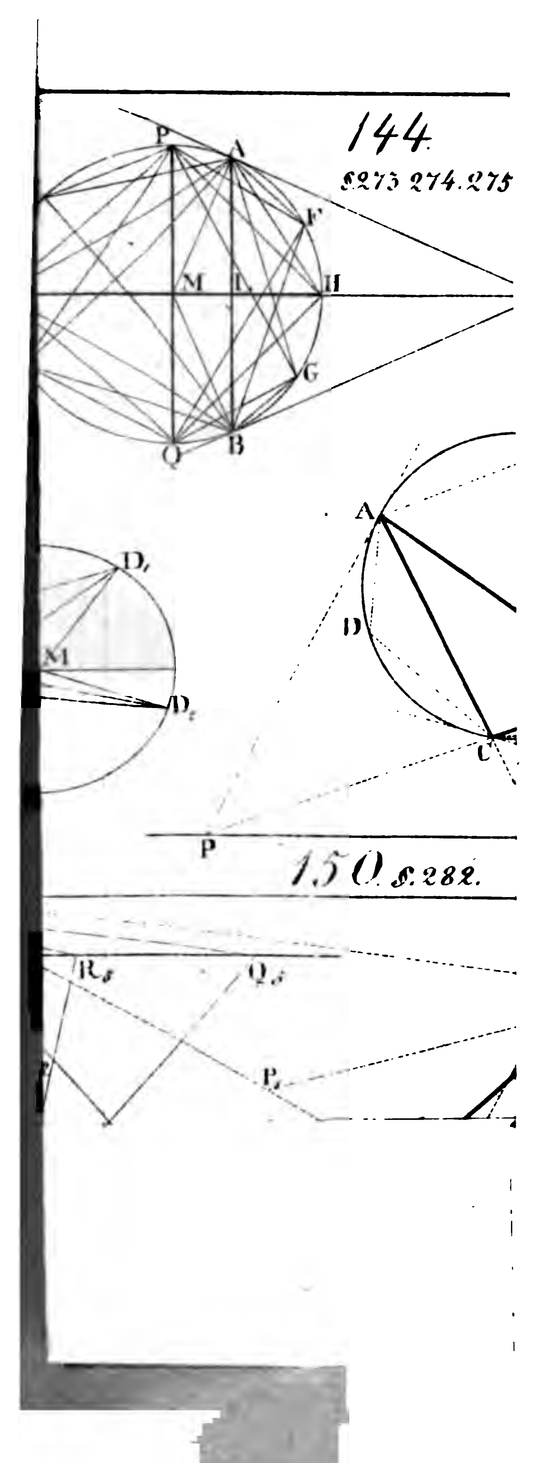
118. §. 203.
121. §. 211.
123
§. 213. 214
125.
§. 216. 217. 218.

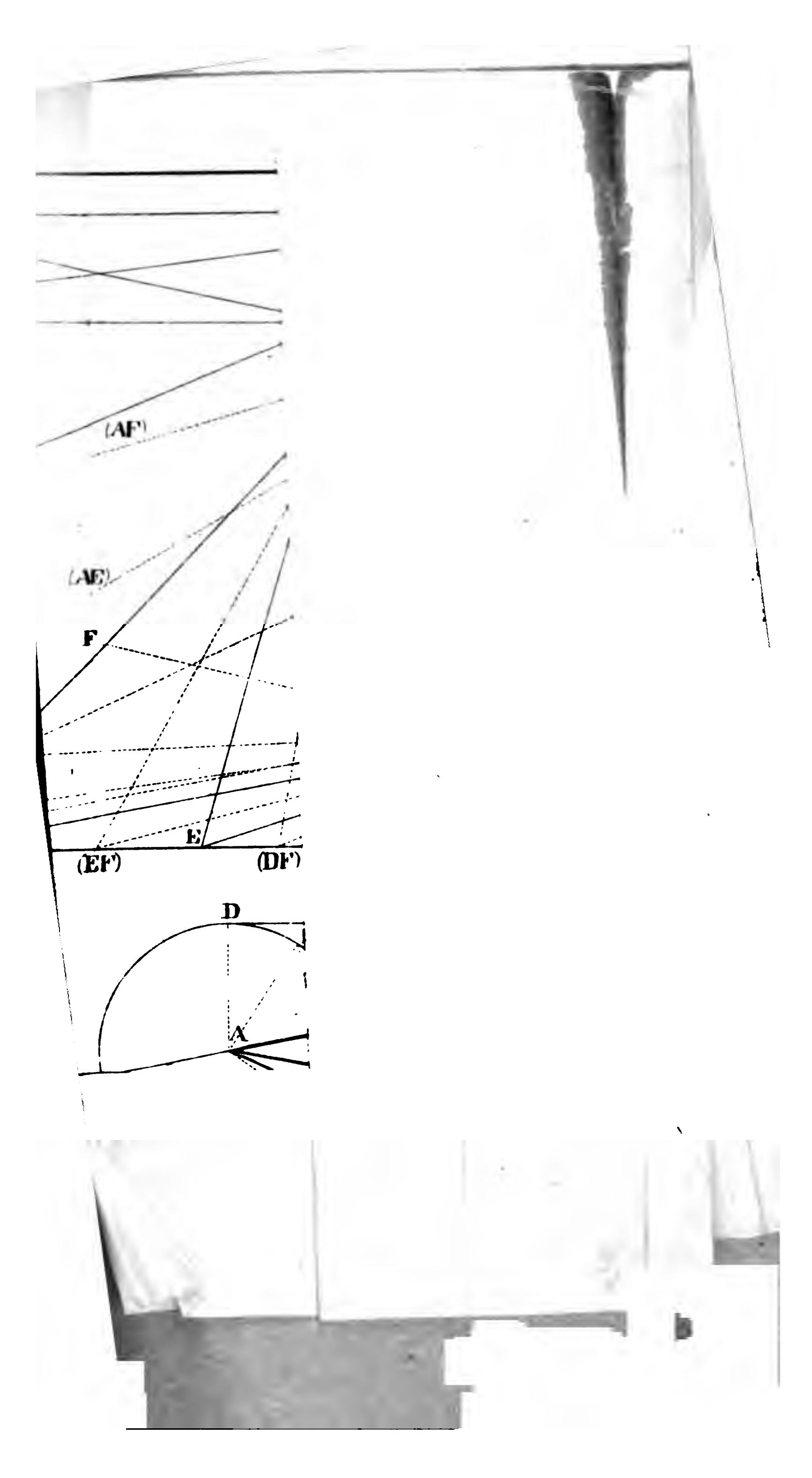




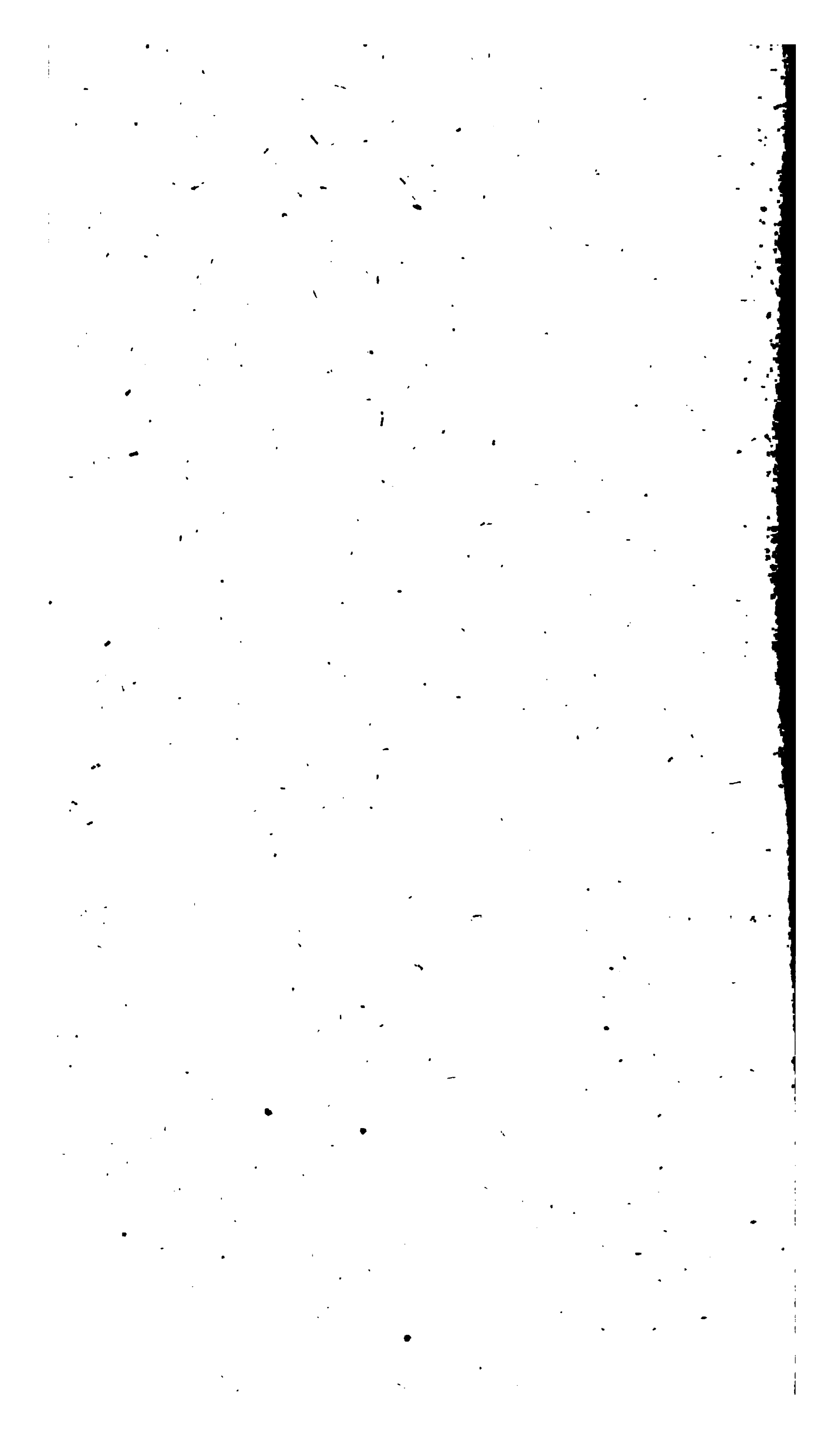
130.
§231.
133.
§237. 238.
137.
§248. 249 251.
140.

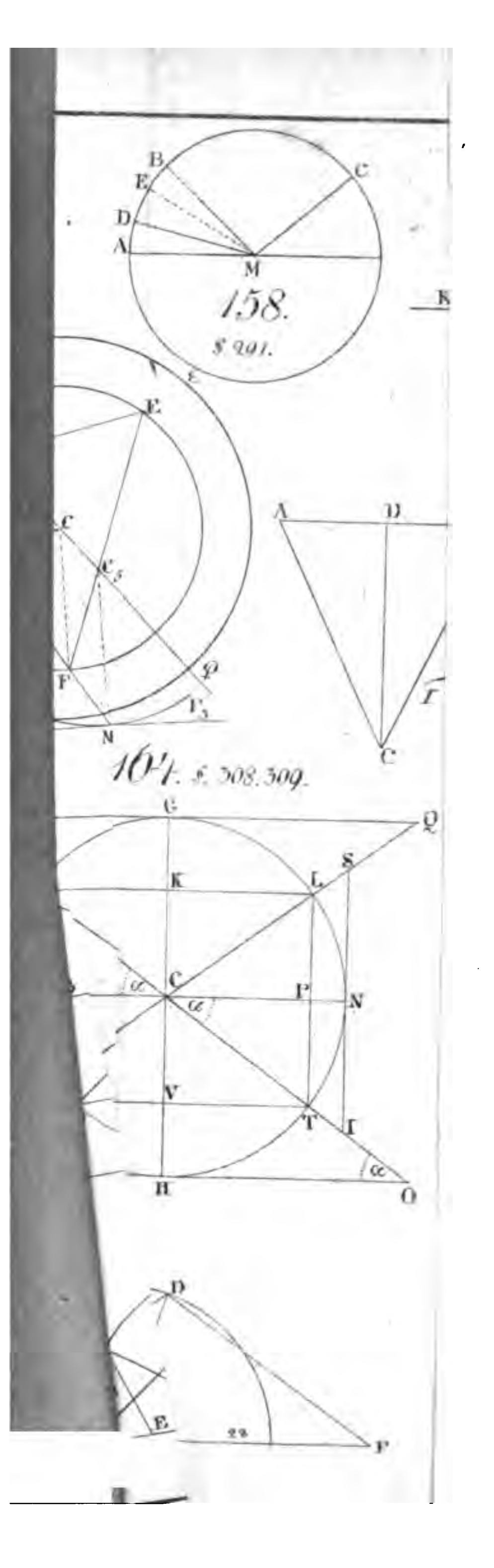


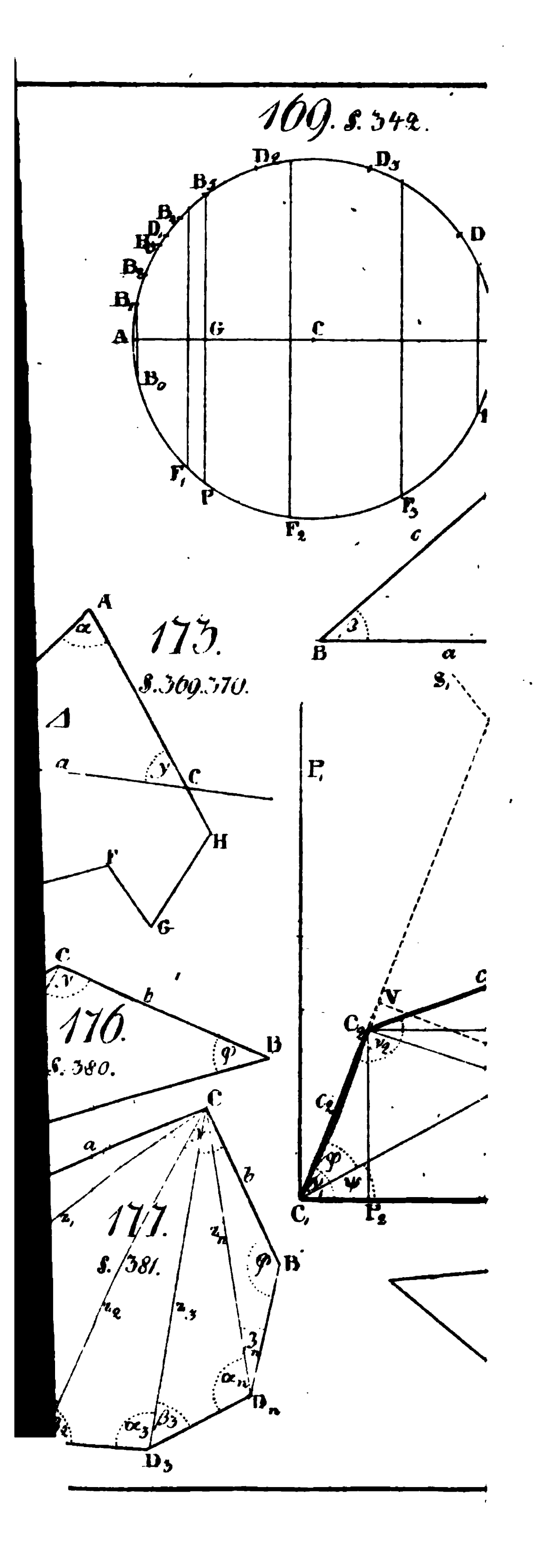

144.
§.273. 274. 275
P
A
F
M
L
H
G
Q
B
D,
M
D₂
A
D
C
P
150. §. 282.
R
Q
P



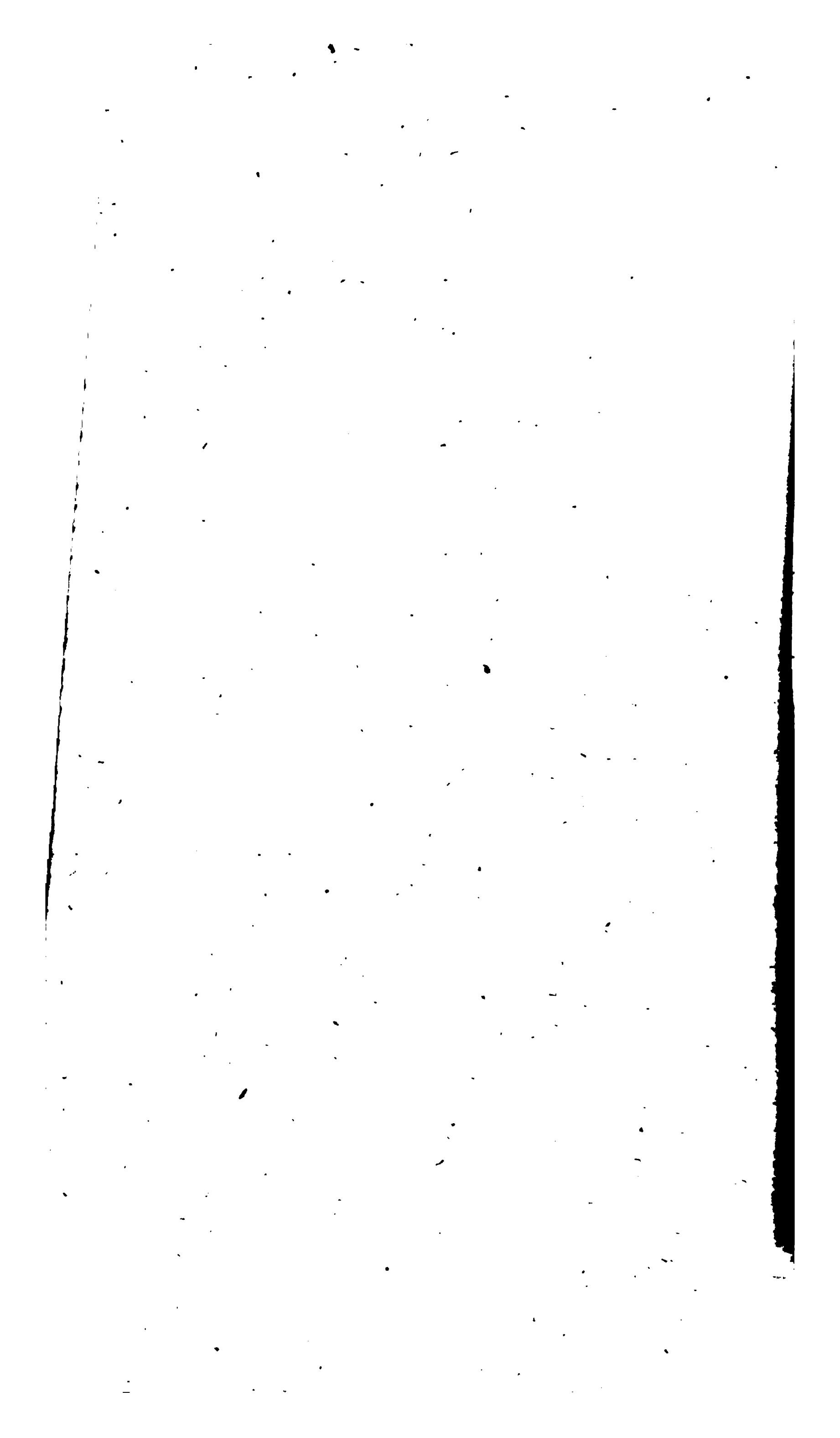
(AF')
(AE)
F
E
(EF')
(DF')
D
A




B
C
E
D
A
M
158.
§ 291.
E
C
C_5
F
N
F_5
A
D
C
164. § 308. 309.
G
Q
S
K
L
C
P
N
α
α
V
T
I
H
O
α
D
E
F



169. §. 342.
173.
§. 369.370.
176.
§. 380.
177.
§. 381.

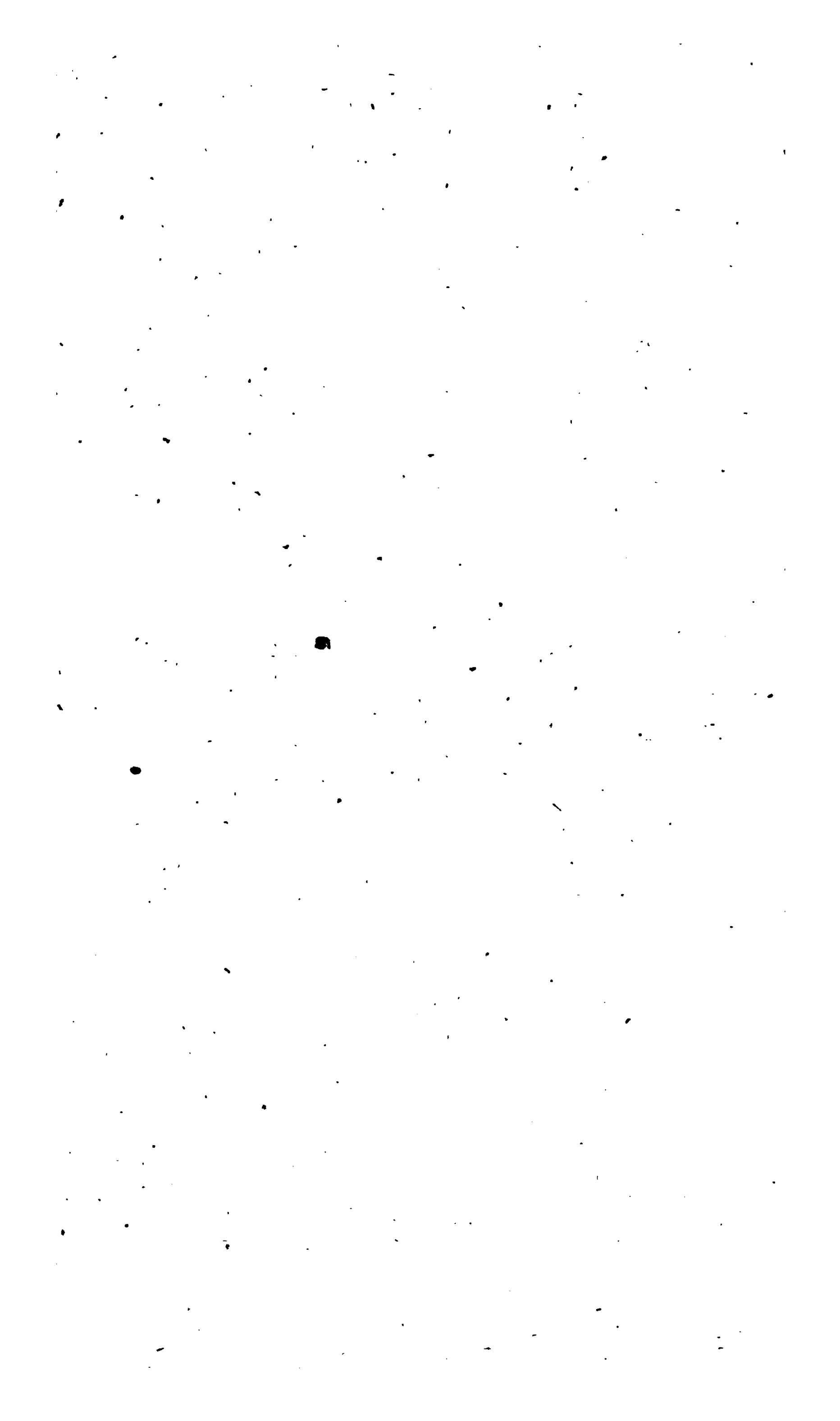


184. S. 392.

188.

S. 394. α.

S. 394



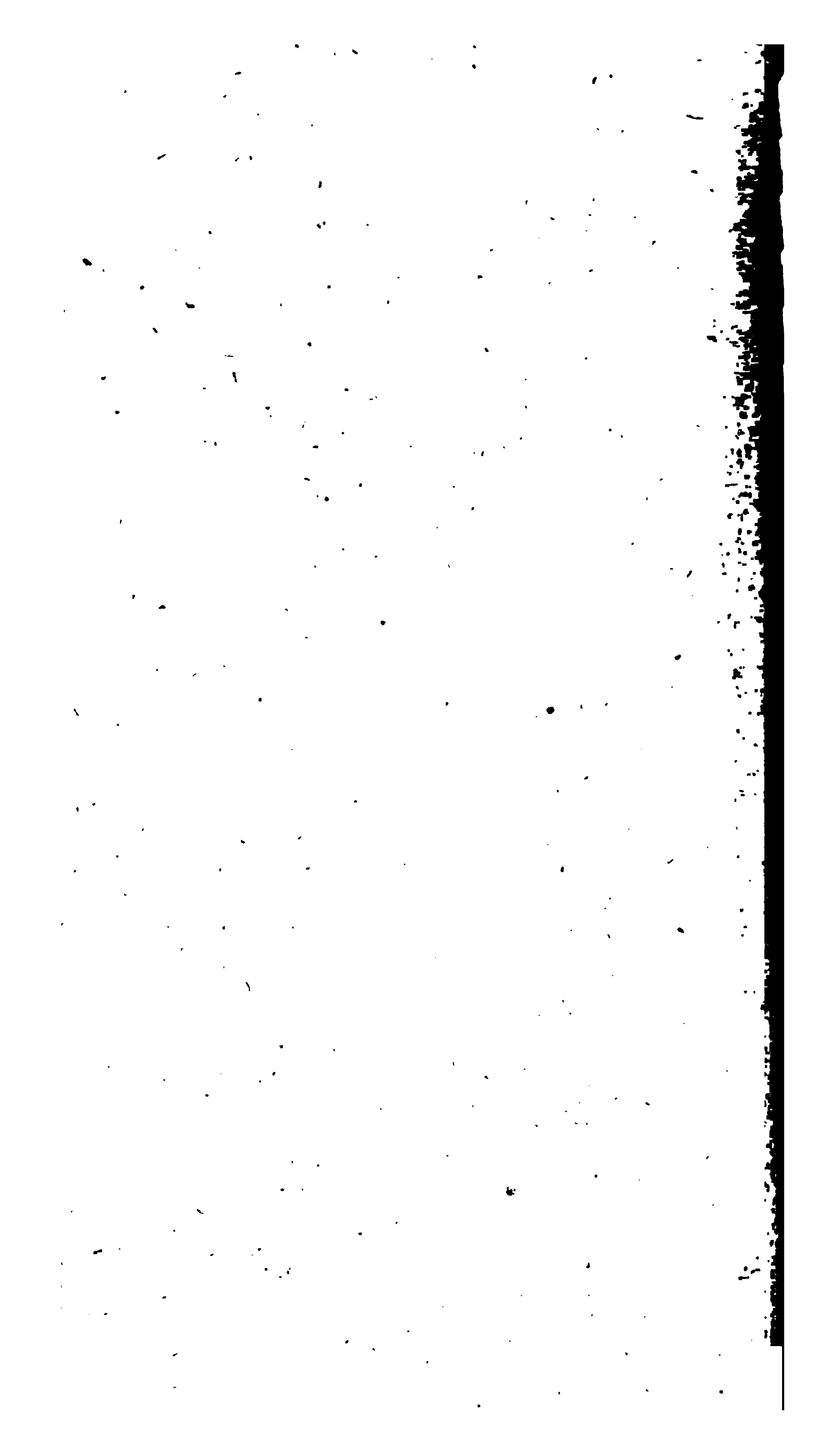
192. §. 394. δ.

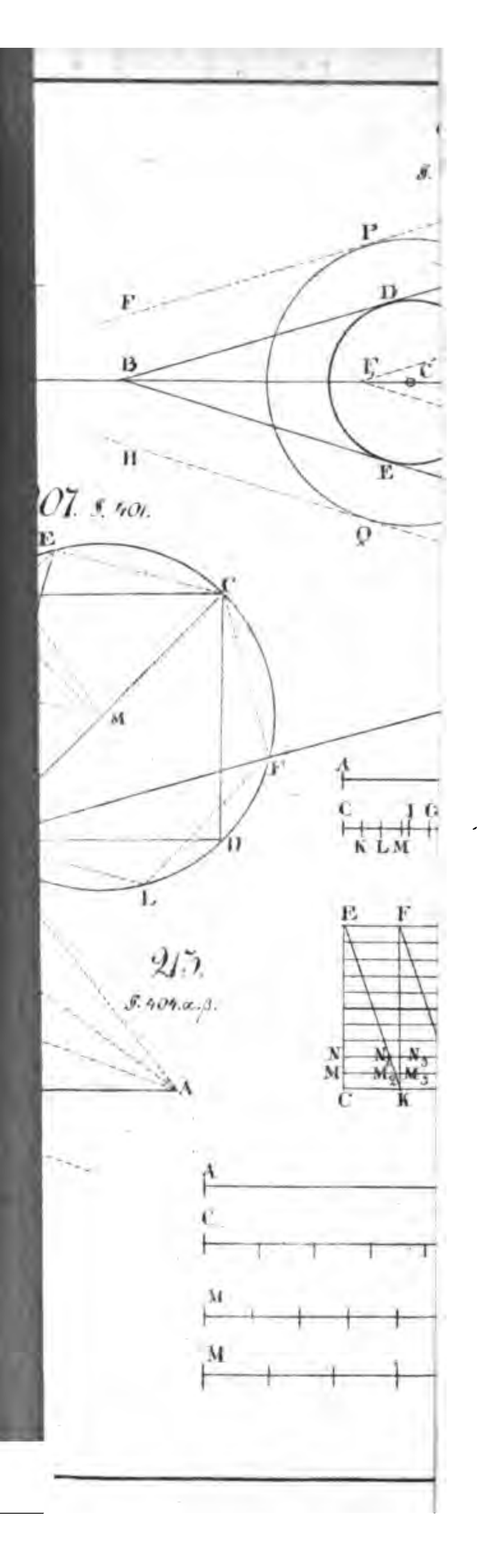
B

§. 39

.395. γ.

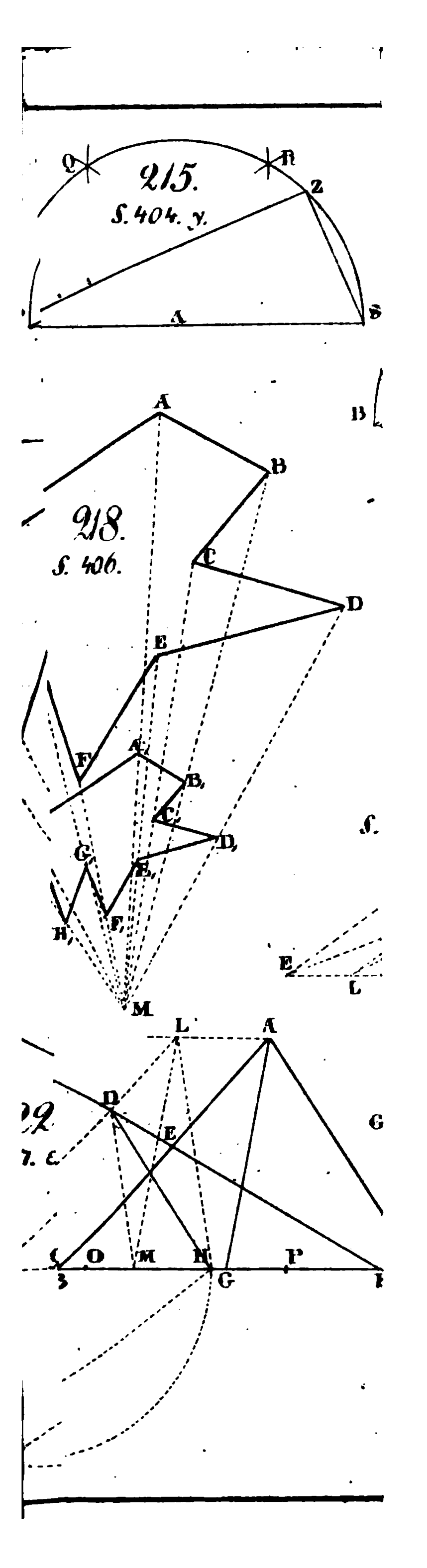
203. §. 399. δ.




P
F
D
B
E
C
H
E
Q
07. §. 401.
E
C
M
F
D
L
215.
§. 404. α. β.
A
A
C
I
G
K
L
M
E
F
N
M
C
K
A
C
M
M

215.
S. 404. γ.

218.
S. 406.



Q
R
215.
S. 404. γ.
Z
A
S
A
B
218.
S. 406.
C
D
E
F
A,
B,
C,
D,
G
E,
F,
H,
M
E
L
L
A
D
E
G
O
M
H
P
G

